Les réponses aux questions doivent être précisément justifiées. Les documents et calculatrices sont interdits, les téléphones portables doivent être éteints et rangés.
Barème indicatif: **22=6+5+5+6**

Durée 2 heures

Exercice 1. [Questions de cours] (6pts)

1. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$ est-elle nécessairement convergente?
2. Soit $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ une série absolument convergente. $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n)^2$ est-elle nécessairement convergente?
3. Les séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{\sqrt{n}}}{(\sqrt{n})^n}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{n+\sin n}{n+\cos n}$ sont-elles convergentes?
4. Combien de termes faut-il prendre pour calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$ à $0,001$ près

Exercice 2. [Séries numeriques] (5pts)

1. Etudier la convergence et la convergence absolue de la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ de terme général
$$u_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n\sqrt{n}}.$$
Indication: Pour étudier la convergence, soit utiliser la méthode DL, soit étudier la convergence de $\sum_{n\geq 2}\left(u_n - \frac{(-1)^n}{n}\right)$.
2. Montrer que la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ de terme général
$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$
est convergente et calculer sa somme $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$.

Exercice 3. [Convergence simple et uniforme](5pts)
On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $f_n : x \in [0,+\infty[\;\mapsto\; n\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$.

1. Admet-elle une limite simple sur $[0,+\infty[$?
2. La suite (f_n) converge-elle uniformément vers sa limite sur $[0,+\infty[$?
3. Dresser le tableau de variation de la fonction auxiliaire $x \in [0,1] \mapsto x - n\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?

Exercice 4. [Intégration](6pts)
On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie sur $[0,1]$ par $f_n(x) = n^2x$ si $x \in [0,\frac{1}{2n}]$, $f_n(x) = n - n^2x$ si $x \in]\frac{1}{2n},\frac{1}{n}]$ et $f_n(x) = 0$ si $x > \frac{1}{n}$.

1. Tracer le graphe de f_n pour $n = 2$ et 3. Les fonctions f_n sont-elles continues?

2. Etudier la convergence simple de la suite (f_n) sur $[0,1]$. Trouver la fonction limite f sur $[0,1]$, i.e. $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ pour tout $x \in [0,1]$.

3. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?

4. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)\,dt$ et $\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,dt$. Formuler une conclusion en prenant en compte un certain théorème du cours.