Histoire des mathématiques, cours 2

Jean-Marie Coquard Jean-marie.coquard@universite-paris-saclay.fr Histoire sur la longue durée, les nombres

I. Histoire sur la longue durée, les nombres

L'écriture des nombres en Mésopotamie

Le système sexagésimal de position

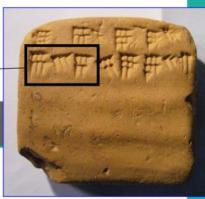
Ainsi le signe peut signifier 1 ou 60 ou les puissances de $60 : 60^2$, 60^3 , 60^4 etc. ou les fractions de 60 : 1/60, $1/60^2$, $1/60^3$ etc.. Par exemple :





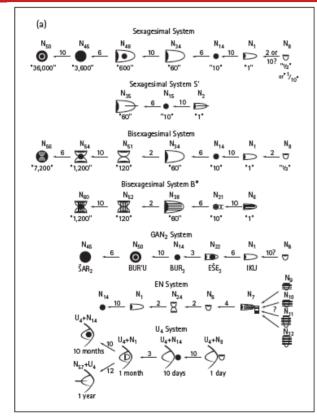
$$6 \times 60^{2} + 35 = 395$$

ou $6 \times 60^{2} + 35 \times 60 = 23700$
ou $6 \times 60^{3} + 35 \times 60^{2} = 1422000$
etc.



Source : Grégory Chambon, séminaire histoire des nombres à l'EHESS

L'écriture des nombres en Mésopotamie



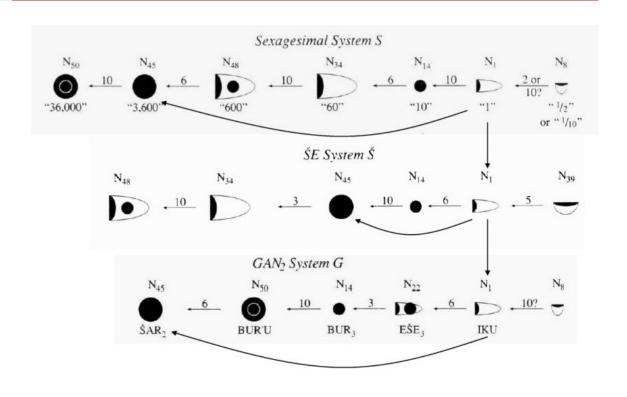
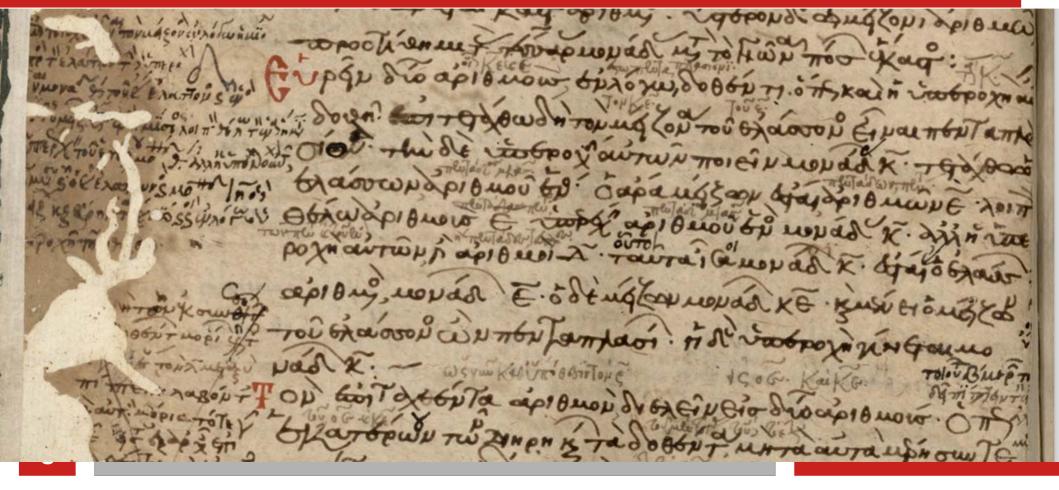


FIGURE 2.4 Proto-cuneiform numerical sign systems. Several systems of numerical signs served to qualify discrete objects (a), while others qualified measures of grains, (semi-)liquids, and time (a and b). (Drawing by Robert K. Englund)

Xe 200 genron a VE fan De me abs grangen THE Spans BybyToid de 184010 TOWN I Surross of wall of morground majokon of amound an orgon & mane, Elde wien. ape averi adapountinks ra monta seusiwy, mogin au montoio de versica von et kai dui ou ve. ¿ o cocurro indolog Lourding groxpextebon. Lidger my ummonimony, gropy midel Les cia parop good ne jour at run o étomment pron. o mon graker mon atopool your offer . Signe the own mpo o wilder Kair the brite MONEIN TO Papers mador mi our mes da powal son

Les nombres chez les grecs (Diophante, antiquité tardive, ms XIe s.)



in quo perfecit deus opera sua. Vnde ratio numeri contenenda non est, quæ in multis sanctaru scripturaru locis, es magni estimãs da sit, elucet diligeter intuentibus. Nec frus stra in laudib. dei dictu est: Omnia in mens sura, & numero, & pondere disposuisti.

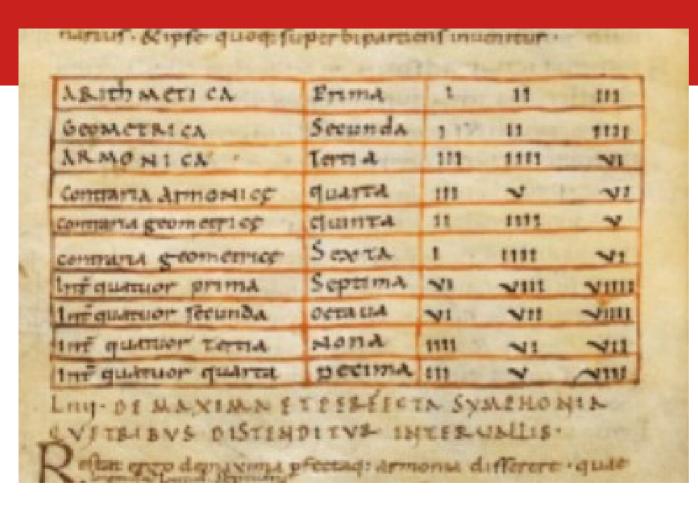
L. VIVES

Aec auté propter senarif numeri persectione.] Omnia numeris constare existimauit Pythago ras Samius, que Plato secutus est. Numeroruq mysteria tam mysteriose tradiderunt, ut etiam initiatos

Divi Aurelii Augustini Hipponensis episcopi De civitate Dei libri XXII, ed. J.-L. Vivès, Frobenius, Bâle, 1555. « D'où il suit qu'il ne faut point mépriser la raison des nombres; raison dont les saintes Écritures, en de nombreux passages, dévoilent toute la valeur aux regards attentifs. Aussi n'est-ce pas en vain qu'il est dit à la louange de Dieu: « Tu as tout disposé selon la mesure, le nombre et le poids ». »

(livre XI, chapitre XXX)

La citation de fin : Sagesse de Salomon, 11, 21.

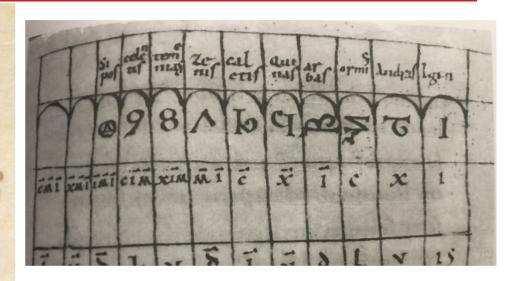


Pseudo-Boèce, *De arithmetica*, X - XIe siècle

https://www.bl.uk/ manuscripts/ Viewer.aspx? ref=harley_ms_3595_f00 1r I magorici u ne in multiplicationib; et partitionib; et in podifini aliquando fallerent.

U tin omnib; etanti ingenio sissimi et subtilissimi descripserunt sibi quanda formula quam ob honore siu preceptoris mensampitagoream nomunabant. quia hoc quod depinaterant magistro premonstrante cognouerant. a posteriorib; appellabat Abacus Vt quod alta mente concepant melius siquasi undendo ostenderent in notina omniu transfundere possent eamq subterius habita sat mira descriptione formabant.

| mouera 9 coresis | odonaria 8 Temenus | ZEHIS | lenarius Li CALTIS | avions | Quainari Q Cul ARBAS | ormis | ANDRAS | unmal I | 4 |
|------------------------------------|--------------------------|-------|--------------------|--------|----------------------------|-------|--------|---------|---|
| THE RESERVE OF THE PERSON NAMED IN | xãĩ | | ĩ | 莱 | ĩ | c | × | 1 | |
| LÄÏ | vãĩ | 70 | ĩ | ₹ | 70 | 1 | ~ | 5 | |



Pseudo-Boèce, De arithmetica, XIe siècle

https://www.bl.uk/manuscripts/Viewer.aspx?ref=harley_ms_3595_f001r

Pseudo-Boèce, De arithmetica, XIe siècle

https://maa.org/press/periodicals/convergence/gerbert-daurillacand-the-march-of-spain-a-convergence-of-cultures-gerberts-abacus

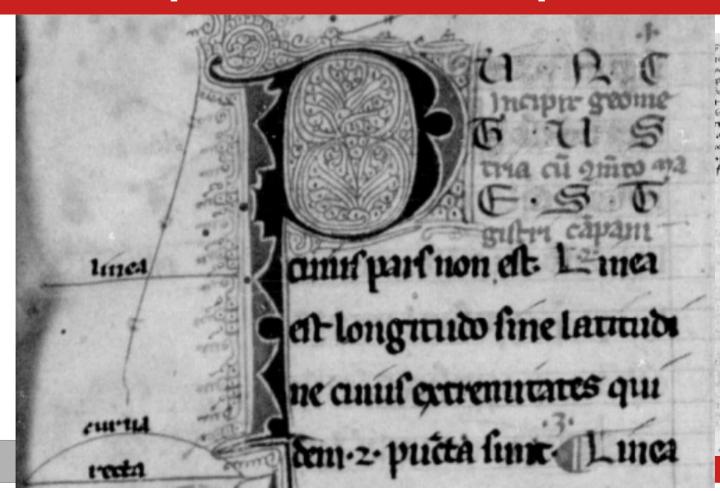
Al-Karaji (fin Xe s., début XIe s.), triangle de Pascal (!!!)



Euclide arabe par Muhammad Al-Tusi (XIIIe siècle) https://gallica.bnf.fr/ ark:/12148/ btv1b11001769d/ f5.item#



Campanus de Novare édite la version latine de référence (vers 1260) à partir de versions arabes. Mais il y en a d'autres en circulation au XIIIe siècle, Adélard de Bath etc.



pte late sugar be plus to toute me vote per gitt fit full me to alla ozionti que fer ampar tampias tato pri pri funt tampias tato la pri funt late mi late sugar ama un late sugar ama un late sugar ama un late sugar late sugar late sugar ama un late sugar late sugar la pri con sugar la prima sugar

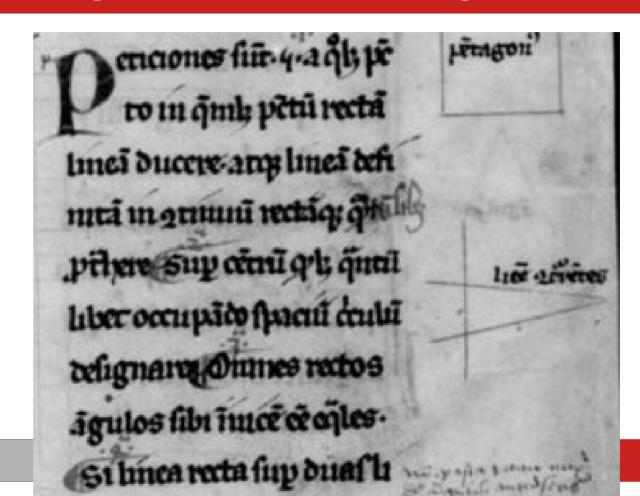
opine on ficase. conalis over alle of conalis over alle of control first long artific of the opine opine

on adampedation along a disconsisted and ordered and ordered and produced produced for the protocology of the angle of the protocology of the adams of the protocology of the adams of the protocology of t

ad ortho for inco huca . ad conales : radit net forme ? Por o malla ore

ce dem z case fines. al

Campanus de Novare édite la version latine de référence (vers 1260) à partir de versions arabes. Mais il y en a d'autres en circulation au XIIIe siècle, Adélard de Bath etc.



Campanus de Novare édite la version latine de référence (vers 1260) à partir de versions arabes. Mais il y en a d'autres en circulation au XIIIe siècle, Adélard de Bath etc.

Dans différentes langues Euclide (0323-0285 av. J.-C.). Elements de géométrie (hébreu). אוקלידס. ספר היסודות XIVe siècle



Pourquoi le XIIIe siè



Euclides, Geometria cum commentario Hermanni (XIIIe)

https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b9066077c?rk=21459;2

Le nombre classique chez Euclide, livre VII

Campanus de Novare. XIIIe. Bâle. 1537

EVCLIDIS MEGARENSIS GRAE

CI PHILOSOPHI, GEOMETRICORVM ELE/

Ex Campano triplex principiorum genus.

Primum.

Diffinitiones.



Nitas, est qua una quæç res una dicitur. 2 Nu merus, est multitudo ex unitatibus composita.

Naturalis series numerorum, dicitur in qua secundum unitatis additionem sitipsorum com putatio. 4 Differentia numerorum, appella tur numerus quo maior abundat à minore.

Numerus primus dicitur, qui sola unitate metitur. 6 Numerus compositus dicitur qué

7 Numeri contra se primi dicuntur, qui nul

- 1. L'unité est ce par quoi chaque chose est dite une.
- 2. Le nombre est une multitude composée d'unités.

L'unité n'est pas qualifiée de nombre, elle est par ailleurs indivisible. Les fractions, les racines... ne sont pas des nombres non plus.

En lien avec le nombre chez Aristote

EVCLIDIS MEGARENSIS MA=

THE MATICI CLARISSIMI ELEMEN,

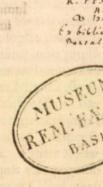
h all buffel of noung torum Geometricorum. Lib.X V.

Cum expositione THEONIS in priores XIII à Bartholomae Veneto latinitate do, nata, CAMPANI in omnes, & HYPSICLIS Alexandrini in duos po, stremos.

Mis adiceta sunt Phanomena, Catoptrica & Optica, deinde Protheoria Marini & Data,

Postremum uero, Opusculum de Leui & Ponderoso, hactenus non uisum, eiusdem





MENSE AVGVSTO, ANNO
M. D. XXXVII.

Cum privilegio Cafareo.

Les milieux universitaires jusqu'à la première moitié du XVIe siècle

Arithmétique

Géométrie

Philologie (mais on refait souvent les démonstrations)

Cadre d'enseignement : arts libéraux du quadrivium (avec l'astronomie et la musique), préparatoire à d'autres disciplines, comme la médecine, la théologie ou le droit

Culture savante marquée par la langue latine, parfois le grec, le travail sur les textes classiques, l'absence de calculs et peu de chiffres arabes jusqu'au XVIe siècle. Eis το αὐτό το πρῶτου, εξειγεμάτων Πρόκλο βιέλ.δ.

Adiecta præfatiuncula in qua de disciplinis

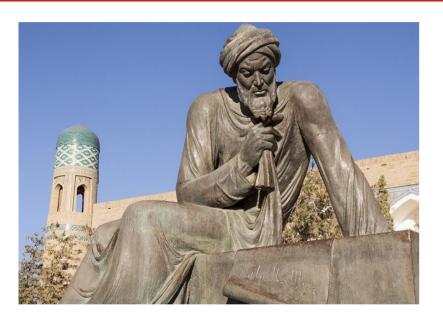
Mathematicis nonnihil.



BASILEAE APVD IOAN. HERVAGIVM ANNO M. D. XXXIII. MENSE SEPTEMBRI.



Les chiffres indo-arabes



Livre de l'addition et de la soustraction d'après le calcul des indiens, chiffres dans différentes versions latines du XIIe siècle

Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (IXe siècle)

Kitābu 'l-jāmi` wa 't-tafrīq bi-ḥisābi 'l-Hind (il n'y a pas de témoin connu en arabe!)

| 9 | 8 | 7 | G | S | ጸ | 7 | 3 | 1 | 07 |
|---|----|---|---|---|----|---|---|---|----|
| 9 | 88 | 7 | હ | 4 | 2 | r | 7 | 1 | 0 |
| 9 | 8 | 9 | G | 4 | 90 | 3 | 7 | J | 0 |
| 9 | 8 | 1 | 6 | 4 | 9. | 3 | 2 | 1 | 0 |

Les chiffres indo-arabes



Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (IXe siècle)

Kitābu 'l-mukhtaṣar fī ḥisābi 'l-jabr wa'lmuqābalah

Livre abrégé du calcul par la restauration et la comparaison

Al-jabr → « algèbre »

Al-Khwarizmi → « algorithme »

Le passage vers l'Europe : Al-Andalus et les milieux monastiques

lib mannict filmmovil alchonium te

to ne complete to the constant and complete of the constant of

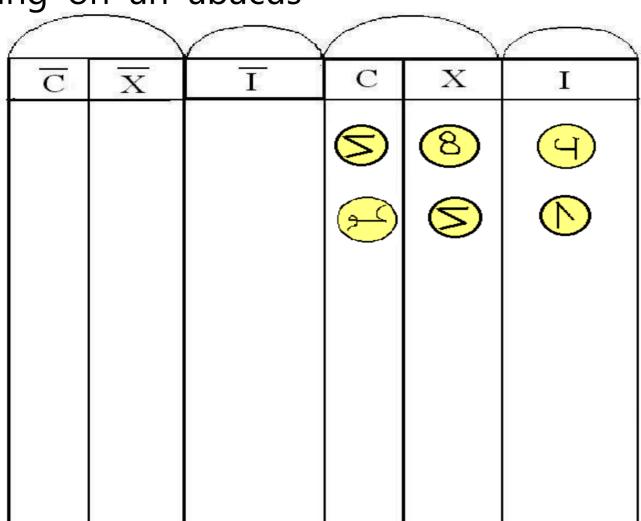
Gerbert d'Aurillac (mathématicien puis « pape de l'an mil »)

Il connaît les ouvrages d'Al-Khwarizmi mais n'a pas véritablement de postérité en dehors de quelques monastères

← un traité d' « algebra et almuchabala » du XIIe siècle (on n'en trouve d'autres à Tolède)

Tradition de traités d'« algorismes » sur les nombres et le calcul des quatre opérations.

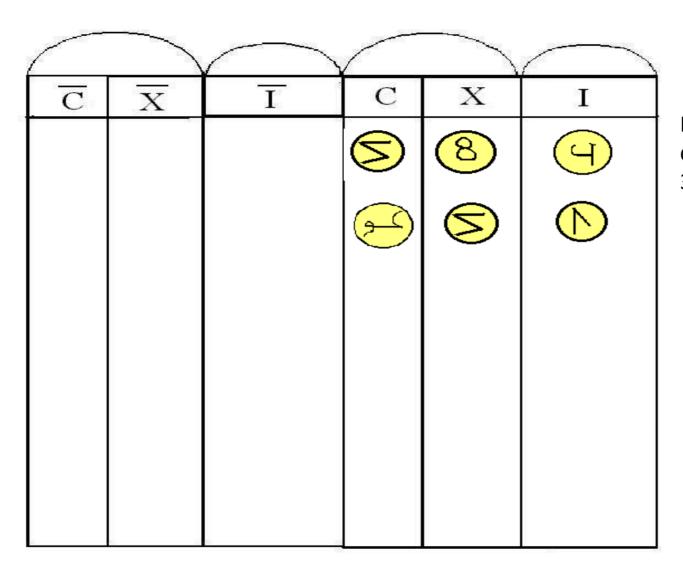
Adding on an abacus



Add two numbers...

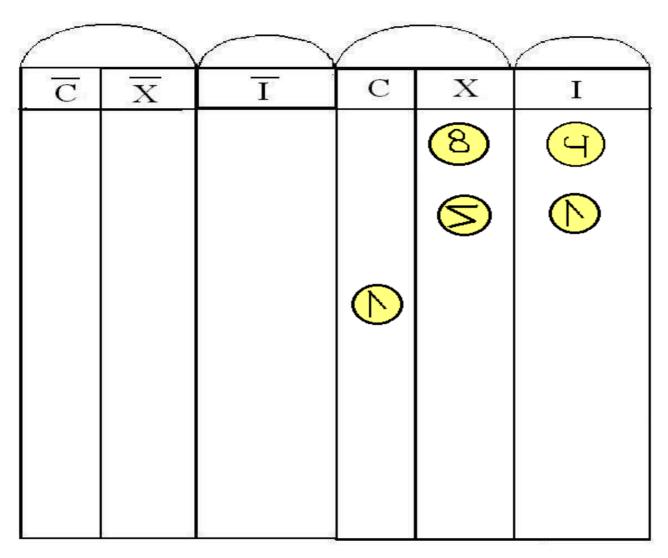
385 + <u>437</u>

First place the numerals In the proper columns.



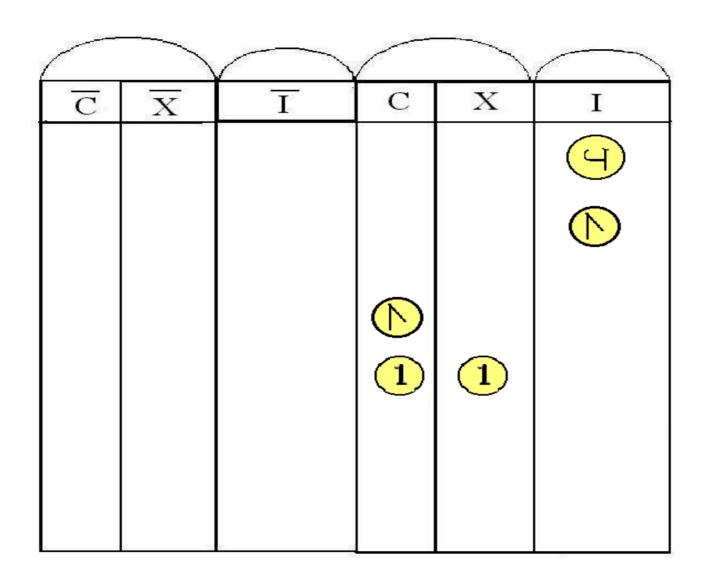
First add the hundreds digits:

$$3 + 4 = 7$$

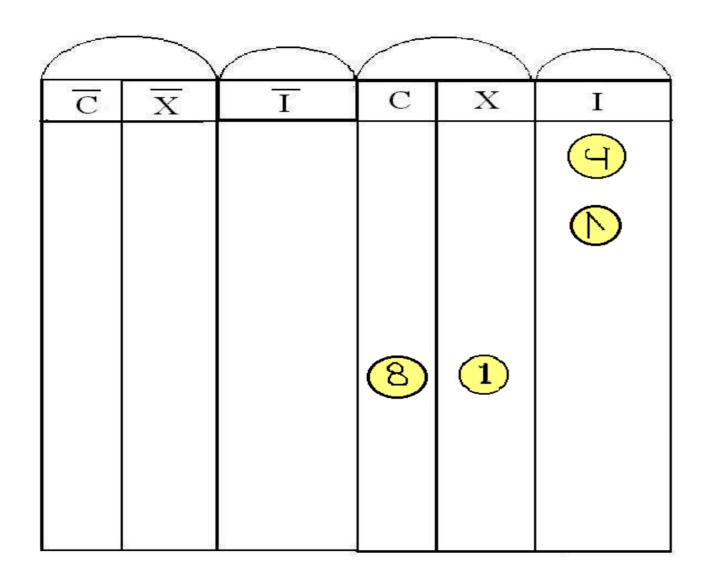


Now add the tens:

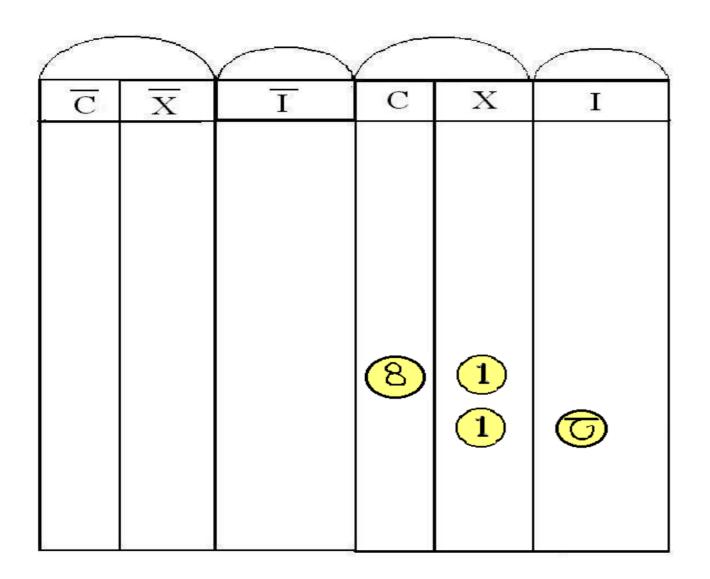
$$8 + 3 = 11$$



Now adjust the hundreds:



And add the ones:

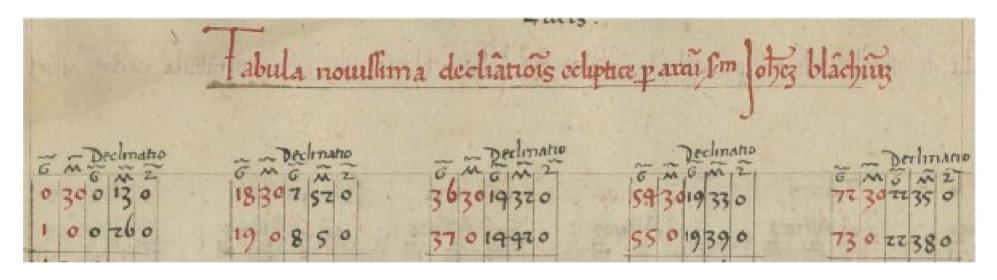


Finally, adjust the tens.

Final answer

The final answer is 822.

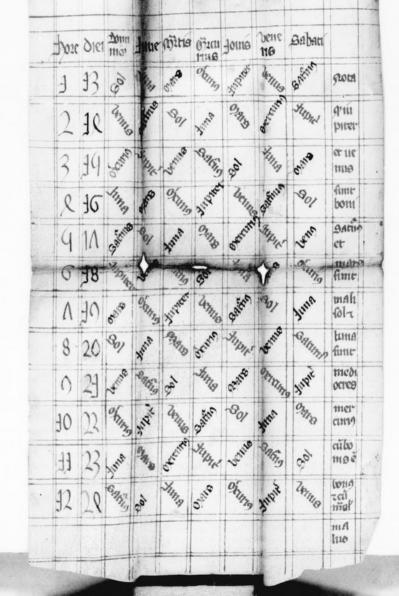
Un usage particulièrement important des chiffres indoarabes : les tables astronomiques



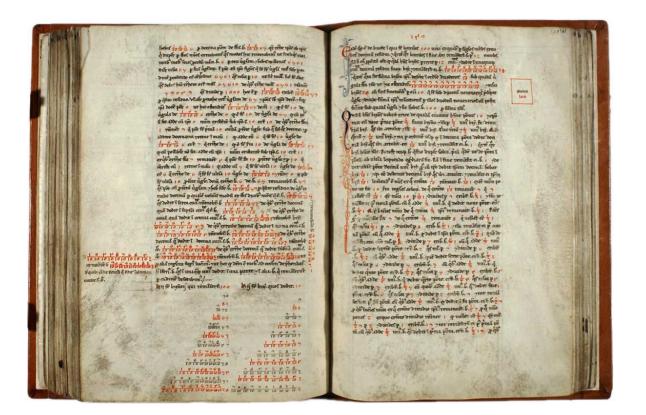
Grégoire de Cracovie (astrologue du pape Paul II) et Franciscus Quatuor e Castris, BJ MS 556. Canon issu des tables alphonsines.

Un usage: l'astrologie

Petrus de Dacia (XIIIe siècle) : calendrier portatif Édition vers 1350.



Le passage vers l'Europe des chiffres indo-arabes : Léonard de Pise (Fibonacci) et les mathématiques marchandes



Liber abaci (1202)

10 mg J.N. JULIE Oine. Sepn

Le passage vers l'Europe : Léonard de Pise (Fibonacci) et les mathématiques marchandes

et disputationis didici conflictum. Sed hoc totum etiam et algorismum atque arcus pictagore quasi errorem computaui respectu modi indorum. Quare amplectens strictius ipsum modum indorum, et attentius studens in eo, ex proprio sensu quedam addens, et quedam etiam ex subtilitatibus euclidis geometrice artis apponens, summam huius libri, quam intelligibilius potui, in .xv. capitulis distinctam componere laboraui,

(...)

Incipit primum capitulum.

Nouem figure indorum he sunt

9 8 7 6 5 4 3 2

Cym his itaque nouem figuris, et cum hoc signo 0, quod arabice zephirum appellatur, scribitur quilibet numerus, ut inferius demonstratur. Nam numerus est unitatum perfusa collectio siue congregatio unitatum, que per suos in infinitum ascendit gradus.

Liber abaci (1202)

← Transcription (ce ne sont pas les « bons » chiffres!)

Mais il y a le zéro

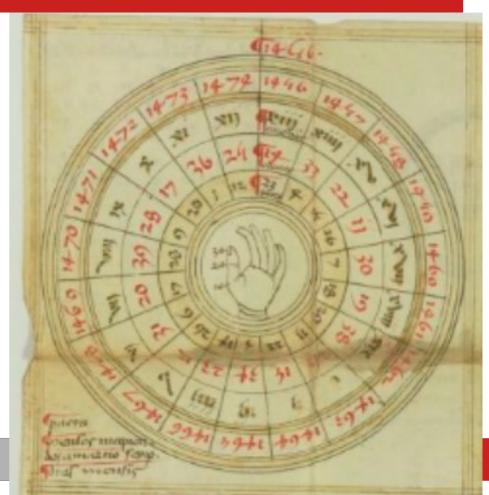
Et de l'algèbre!

 $\textbf{Zephirum} \rightarrow \textbf{chiffre}$

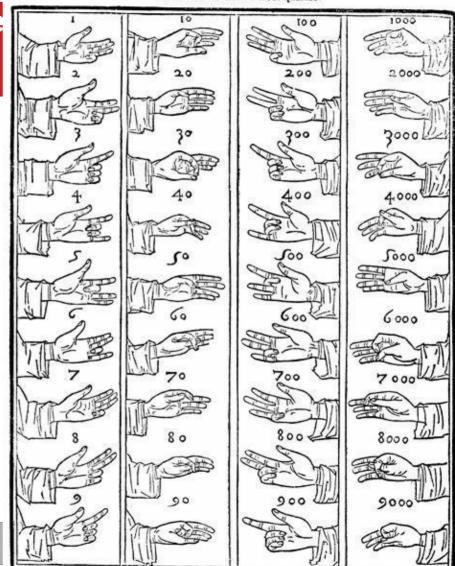
Tradition italienne marchande avec l'algèbre : abacisme

Calendrier portatif, Ms Latin 7478, 1456, Italie du Nord





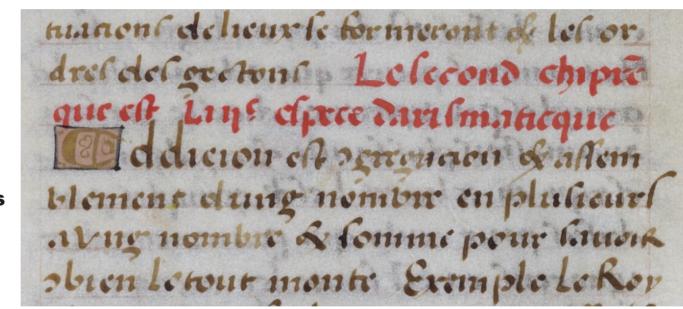
Luca Pacioli, Summa de arithmetica..., 1494



Une tradition bien implantée : les abaques / jetons

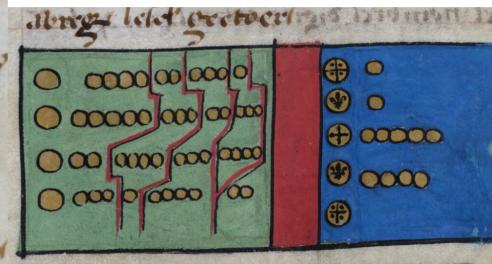
Traité d'arithmétique, par Jehan Adam, secrétaire de Nicolle Tilhart, notaire, secrétaire et auditeur des comptes du roi Louis XI, 1474

https://genovefa.bsg.univ-paris3.fr/s/genovefa/item/867481#? c=&m=&s=&cv=&xywh=-5044%2C-639%2C18367%2C12762



Une tradition bien implantée : les abaques / jetons

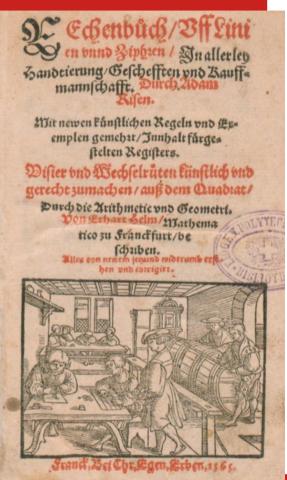
donne amonte Lepannence mi Po's vem Amont Lelebaron my Infestelit Amont ! lefauck in ? n . veni l' H Among Lemante doutelon xhilt Pour limour shien of fornet montent que est addicion fault asseou ses gec tocel and que well en celle table chapt et stren que celle Reple fort ligie &



Tradition d'abaques

Adam Ries, Rechenbuch, auf der Linien (en unnd Ziphren), 1527 et 1565





Tradition d'abaques

Item einer hat empfangen/wie hie verzeychent.

123 17 9

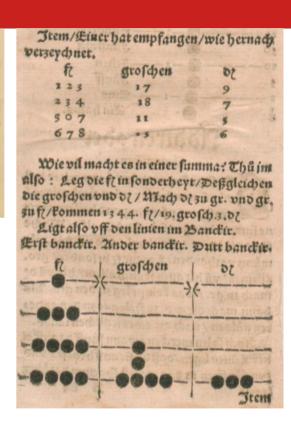
234 floren 18 grosch 7 pfen.

307 11 5

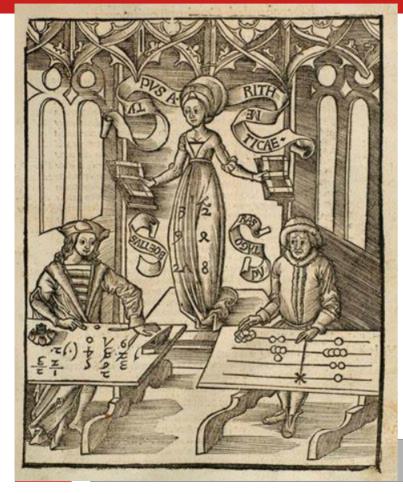
678 13 6

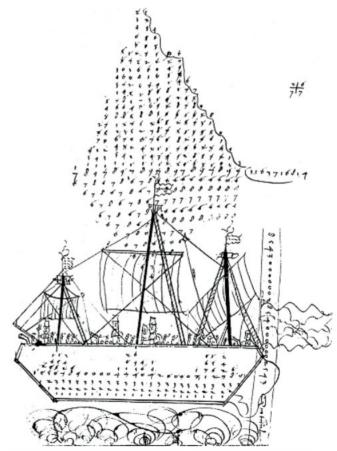
Wie vil macht es in einer summa/ Thủ im also/
leg die flo.in sonderheyt/des gleichen die groschen
vnd pfenning/217ach pfen. 3ử grosch. vn grosch.
3ử flor. Eumbt. 13 44. flor. 19. grosch. 2. pfenning.
Item einer hat aus geben das nach geschribens

Adam Ries, Rechenbuch, auf der Linien (en unnd Ziphren), 1527 et 1565



Une tradition concurrencée par les nombres





Figuur 3.22. Delingen in de vorm van een zeilschip.

Les milieux marchands ou artisanaux jusqu'à la fin du XVe siècle ou début du XVIe siècle

Arithmétique pratique, quatre opérations avec un abaque (boulier) ou des nombres indo-arabes, règle de trois pour les conversions de monnaies, poids, mesures... comptabilité ; éventuellement de l'algèbre

Numération mais pas de définition abstraite du nombre. Le nombre est « utile », c'est une grandeur continue par défaut en tant qu'outil de mesure.

Pas ou peu de référence aux classiques (Euclide, Boèce...)

Début de cartographie (temporelle, géographique, sociale) des nombres et de leurs usages

| Culture savante | Universitaire (théologie) | Université (Arts libéraux et notamment astronomie) | Marchands et artisans |
|--------------------------------------|------------------------------|---|--------------------------|
| Calcul | non | oui | oui |
| Abaques | Non | Oui ? | oui |
| Chiffres indo-arabes | Non (ou très peu) | Oui | oui |
| Calcul avec les chiffres indo-arabes | Non | oui | Non (oui pour les profs) |
| Langue | latin | latin | vernaculaire |
| Définition du nombre | Non (ou très peu) | oui | non |

II. Quelques éléments de méthodologie

Quelques questions à se poser ; quelques ressources

Qui est l'auteur.e du texte ? Trouver quelques éléments biographiques qui peuvent nous éclairer sur les raisons d'existence du texte

Quel est le contexte d'écriture et/ou de parution ?

Quand ce texte est-il paru ? L'imprimeur / éditeur est-il particulier ? Quel est le public visé ?

Que peut-on dire de la structure du texte?

Y a-t-il quelques idées ou manières de faire mathématiques qui vous surprennent? Qui sont en décalage par rapport à ce que vous feriez ou ce que vous enseignez? En français:

Wikipedia (regarder si la page de l'auteur est bien faite ou non ; cf bibliographie)

Persée.fr

Cairn

Openedition (livres et revues)

IREM, Tangente, Images des maths...

En anglais:

Jstor

Libgen et sci-hub (par exemple avec TOR)

III. A vous de jouer!