

# Sujet D

## Exercice 1

### Question 1

On considère le sous-ensemble B de  $\mathbb{R}^3$  défini par  $B = \{(x ; y ; z) \in \mathbb{R}^3 ; x - y + 2z = 0\}$ .

(1)  $0 - 0 + 2 \times 0 = 0$  donc  $(0 ; 0 ; 0) \in B$  d'où B n'est pas vide.

(2) B est-il stable par + ?

Pour tous vecteurs  $u = (x ; y ; z)$  et  $v = (x' ; y' ; z')$  de B, on a :

d'une part  $u + v = (x + x' ; y + y' ; z + z')$ ,

d'autre part  $x + x' - (y + y') + 2(z + z') = \underbrace{x - y + 2z}_{=0 \text{ car } u \in B} + \underbrace{x' - y' + 2z'}_{=0 \text{ car } v \in B} = 0$ , donc  $u + v \in B$ .

B est stable par +.

(3) B est-il stable par  $\cdot$  ?

Pour tout vecteur  $u = (x ; y ; z)$  de B et pour tout réel  $\lambda$ , on a :

d'une part  $\lambda \cdot u = (\lambda x ; \lambda y ; \lambda z)$ ,

d'autre part  $\lambda x - \lambda y + 2(\lambda z) = \lambda \underbrace{(x - y + 2z)}_{=0 \text{ car } u \in B} = 0$ , donc  $\lambda \cdot u \in B$ .

B est stable par  $\cdot$ .

En conclusion, B est bien un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .

### Question 2

Pour tout vecteur  $u = (x ; y ; z)$  de  $\mathbb{R}^3$ ,

$u \in B \iff x - y + 2z = 0$

$u \in B \iff y = x + 2z$

$u \in B \iff u = (x ; x + 2z ; z)$  avec  $x, z$  quelconques dans  $\mathbb{R}$

$u \in B \iff u = x \cdot (1 ; 1 ; 0) + z \cdot (0 ; 2 ; 1)$  avec  $x, z$  quelconques dans  $\mathbb{R}$

Donc B est l'ensemble des combinaisons linéaires de  $(1 ; 1 ; 0)$  et de  $(0 ; 2 ; 1)$ .

D'où,  $\{(1 ; 1 ; 0) ; (0 ; 2 ; 1)\}$  est une famille génératrice de B.

## Exercice 2

### Question 3

$((1 ; 0 ; 1), (3 ; -1 ; 2), (4 ; 2 - m ; m))$  est une famille de trois vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ .

Or,  $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ . Donc, cette famille est une base de  $\mathbb{R}^3$  si, et seulement si, son déterminant est non nul.

Calculons donc son déterminant.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 - m \\ 1 & 2 & m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times (-1) \times m + 3 \times (2 - m) \times 1 + 4 \times 0 \times 2 - 1 \times (-1) \times 4 - 2 \times (2 - m) \times 1 - m \times 0 \times 3$$

$$= -m + 6 - 3m + 0 + 4 - 4 + 2m - 0 = -2m + 6$$

Donc, la famille  $((1 ; 0 ; 1), (3 ; -1 ; 2), (4 ; 2 - m ; m))$  est base de  $\mathbb{R}^3$  si, et seulement si,  $-2m + 6 \neq 0$  c'est-à-dire  $m \neq 3$ .

### Question 4

Si  $m \neq 3$ , cette famille de 3 vecteurs est libre, donc son rang est 3.

Si  $m = 3$ ,  $((1 ; 0 ; 1), (3 ; -1 ; 2), (4 ; 2 - m ; m)) = ((1 ; 0 ; 1), (3 ; -1 ; 2), (4 ; -1 ; 3))$ .

$\frac{1}{3} \neq \frac{0}{-1}$ , donc les vecteurs  $(1 ; 0 ; 1)$  et  $(3 ; -1 ; 2)$  ne sont pas proportionnels, d'où la sous-famille  $((1 ; 0 ; 1), (3 ; -1 ; 2))$  est libre et la famille  $((1 ; 0 ; 1), (3 ; -1 ; 2), (4 ; -1 ; 3))$  est de rang 2.

## Exercice 3

On considère les trois vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  suivants :  $((3 ; 9), (2 ; 6), (1 ; 5))$ .

### Question 5

$((3 ; 9), (2 ; 6), (1 ; 5))$  est une famille de trois vecteurs de  $\mathbb{R}^2$ .

Comme  $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$ , toute famille libre de  $\mathbb{R}^2$  a au maximum deux vecteurs.

Donc,  $((3 ; 9), (2 ; 6), (1 ; 5))$  est une famille liée de  $\mathbb{R}^2$ .

### Question 6

Cette famille de 3 vecteurs n'est pas libre, donc son rang n'est pas 3. D'autre part,  $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times 5 - 9 \times 1 = 6 \neq 0$ .

Donc, la sous-famille  $((3 ; 9), (1 ; 5))$  est libre et la famille  $((3 ; 9), (2 ; 6), (1 ; 5))$  est de rang 2.

### Question 7

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times 5 - 6 \times 1 = 4 \neq 0.$$

Donc,  $((3 ; 9), (1 ; 5))$  et  $((2 ; 6), (1 ; 5))$  sont deux bases de  $\mathbb{R}^2$  et par conséquent, deux familles génératrices de  $\mathbb{R}^2$ .  $((3 ; 9), (2 ; 6), (1 ; 5))$  contient deux familles génératrices de  $\mathbb{R}^2$  :  $((3 ; 9), (1 ; 5))$  et  $((2 ; 6), (1 ; 5))$ .

### Question 8

D'après la question précédente, pour tout vecteur  $u$  de  $\mathbb{R}^2$ , il existe deux réels  $a$  et  $b$  tels que

$$u = a \cdot (3 ; 9) + b \cdot (1 ; 5)$$

$$\text{d'où } u = a \cdot (3 ; 9) + 0 \cdot (2 ; 6) + b \cdot (1 ; 5).$$

Donc, tout vecteur de  $\mathbb{R}^2$  peut s'écrire sous forme d'une combinaison linéaire de  $(3 ; 9)$ ,  $(2 ; 6)$  et  $(1 ; 5)$ .

Ainsi,  $((3 ; 9), (2 ; 6), (1 ; 5))$  est une famille génératrice de  $\mathbb{R}^2$ .

## Exercice 4

### Question 9

Posons  $f(x) = x^3$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ .

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 5^3}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = f'(5) \text{ si la fonction } f \text{ est dérivable en } 5.$$

Or,  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $f'(x) = 3x^2$ , donc  $f$  est dérivable en 5 et  $f'(5) = 3 \times 5^2 = 75$ .

$$\text{D'où, } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 5^3}{x - 5} = 75.$$

## Exercice 5

### Question 10

Pour  $s = 10$ , l'équation  $(1 + s)^n = 3$  s'écrit  $(E) : 11^n = 3$ .

$$(E) \iff \ln(11^n) = \ln(3)$$

$$(E) \iff n \ln(11) = \ln(3)$$

$$(E) \iff n = \frac{\ln(3)}{\ln(11)}$$

$$\text{Donc, pour } s = 10, n = \frac{\ln(3)}{\ln(11)}.$$

### Question 11

Pour  $n = 5$ , l'équation  $(1 + s)^n = 3$  s'écrit  $(E) : (1 + s)^5 = 3$ .

$$(E) \iff 1 + s = 3^{\frac{1}{5}}$$

$$(E) \iff s = 3^{\frac{1}{5}} - 1$$

Donc, pour  $n = 5$ ,  $s = 3^{\frac{1}{5}} - 1$ .

$$\text{Donc, pour } s = 0,05, n = \frac{\ln(3)}{\ln(1,05)}.$$

### Question 12

On considère l'équation  $(F) : \exp(y) \times \exp(4) = 7 \exp(6)$  d'inconnue  $y$ .

$$(F) \iff \exp(y + 4) = 7 \exp(6)$$

$$(F) \iff y + 4 = \ln(7) + 6$$

$$(F) \iff y = \ln(7) + 6 - 4 = \ln(7) + 2$$

$(F)$  admet une solution et une seule  $\ln(7) + 2$ .