Sujet C

Exercice 1

Question 1
On considère le sous-ensemble B de $\mathbb{R}^3$ défini par $\mathrm{B} = \{(x\ ;\ y\ ;\ z) \in \mathbb{R}^3\ ;\ x - 4y + z = 0\}$.
(1) $0 - 4 \times 0 + 0 = 0$ donc $(0\ ;\ 0\ ;\ 0) \in \mathrm{B}$ d'où B n'est pas vide.
(2) B est-il stable par $+$?
Pour tous vecteurs $u = (x\ ;\ y\ ;\ z)$ et $v = (x'\ ;\ y'\ ;\ z')$ de B, on a :
d'une part $u + v = (x + x'\ ;\ y + y'\ ;\ z + z')$,
d'autre part $x + x' - 4(y + y') + z + z' = \underbrace{x - 4y + z}_{=0 \text{ car } u \in \mathrm{B}} + \underbrace{x' - 4y' + z'}_{=0 \text{ car } v \in \mathrm{B}} = 0$, donc $u + v \in \mathrm{B}$.
B est stable par $+$.
(3) B est-il stable par $\cdot$?
Pour tout vecteur $u = (x\ ;\ y\ ;\ z)$ de B et pour tout réel λ, on a :
d'une part $\lambda \cdot u = (\lambda x\ ;\ \lambda y\ ;\ \lambda z)$,
d'autre part $\lambda x - 4(\lambda y) + \lambda z = \lambda(\underbrace{x - 4y + z}_{=0 \text{ car } u \in \mathrm{B}}) + = 0$, donc $\lambda \cdot u \in \mathrm{B}$.
B est stable par $\cdot$.
En conclusion , B est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Question 2
Pour tout vecteur $u = (x\ ;\ y\ ;\ z)$ de $\mathbb{R}^3$,
$u \in \mathrm{B} \iff x - 4y + z = 0$
$u \in \mathrm{B} \iff z = -x + 4y$
$u \in \mathrm{B} \iff u = (x\ ;\ y\ ;\ -x + 4y)$ avec x, y quelconques dans $\mathbb{R}$
$u \in \mathrm{B} \iff u = x \cdot (1\ ;\ 0\ ;\ -1) + y \cdot (0\ ;\ 1\ ;4)$ avec x, y quelconques dans $\mathbb{R}$
Donc B est l'ensemble des combinaisons linéaires de $(1\ ;\ 0\ ;\ -1)$ et de $(0\ ;\ 1\ ;\ 4)$.
D'où, $\{(1\ ;\ 0\ ;\ -1)\ ;\ (0\ ;\ 1\ ;\ 4)\}$ est une famille génératrice de B.

Exercice 2

Question 3
$((1\ ;\ 0\ ;\ 1),\ (2\ ;\ -1\ ;\ 2),\ (4\ ;\ 1 + m\ ;\ -2m))$ est une famille de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
Or, $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$. Donc, cette famille est une base de $\mathbb{R}^3$ si, et seulement si, son déterminant est non nul.
Calculons donc son déterminant.
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1+m \\ 1 & 2 & -2m \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{matrix}$$
$= 1 \times (-1) \times (-2m) + 2 \times (1 + m) \times 1 + 4 \times 0 \times 2 - 1 \times (-1) \times 4 - 2 \times (1 + m) \times 1 - (-2m) \times 0 \times 2$
$= 2m + 2 + 2m + 0 + 4 - 2 - 2m - 0 = 2m + 4$
Donc, la famille $((1\ ;\ 0\ ;\ 1),\ (2\ ;\ -1\ ;\ 2),\ (4\ ;\ 1 + m\ ;\ -2m))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ si, et seulement si, $2m + 4 \neq 0$ c'est-à-dire $m \neq -2$.

Question 4
Si $m \neq -2$, cette famille de 3 vecteurs est libre donc son rang est 3.
Si $m = -2$, $((1\ ;\ 0\ ;\ 1),\ (2\ ;\ -1\ ;\ 2),\ (4\ ;\ 1 + m\ ;\ -2m)) = ((1\ ;\ 0\ ;\ 1),\ (2\ ;\ -1\ ;\ 2),\ (4\ ;\ -1\ ;\ 4))$.
$\dfrac{1}{2} \neq \dfrac{0}{-1}$, donc les vecteurs $(1\ ;\ 0\ ;\ 1)$ et $(2\ ;\ -1\ ;\ 2)$ ne sont pas proportionnels, d'où la sous-famille de 2 vecteurs $((1\ ;\ 0\ ;\ 1),\ (2\ ;\ -1\ ;\ 2))$ est libre et la famille $((1\ ;\ 0\ ;\ 1),\ (2\ ;\ -1\ ;\ 2),\ (4\ ;\ -1\ ;\ 4))$ est de rang 2.

Exercice 3
On considère la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ suivante : $((3\ ;\ 6),\ (2\ ;\ 4),\ (1\ ;\ 5))$.

Question 5
$((3\ ;\ 6),\ (2\ ;\ 4),\ (1\ ;\ 5))$ est une famille de trois vecteurs de $\mathbb{R}^2$.
Comme $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$, toute famille libre de $\mathbb{R}^2$ a au maximum deux vecteurs.
Donc, $((3\ ;\ 6),\ (2\ ;\ 4),\ (1\ ;\ 5))$ est une famille liée de $\mathbb{R}^2$.

Question 6
$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times 5 - 6 \times 1 = 9 \neq 0.$
Donc, la sous-famille $((3\ ;\ 6),\ (1\ ;\ 5))$ est libre et la famille $((3\ ;\ 6),\ (2\ ;\ 4),\ (1\ ;\ 5))$ est de rang 2.

Question 7
$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times 5 - 4 \times 1 = 6 \neq 0.$
Donc, $((3\ ;\ 6),\ (1\ ;\ 5))$ et $((2\ ;\ 4),\ (1\ ;\ 5))$ sont deux bases de $\mathbb{R}^2$ et par conséquent, deux familles génératrices de $\mathbb{R}^2$.
$((3\ ;\ 6),\ (2\ ;\ 4),\ (1\ ;\ 5))$ contient deux familles génératrices de $\mathbb{R}^2$: $((3\ ;\ 6),\ (1\ ;\ 5))$ et $((2\ ;\ 4),\ (1\ ;\ 5))$.

Question 8
D'après la question précédente, pour tout vecteur u de $\mathbb{R}^2$, il existe deux réels a et b tels que
$u = a \cdot (3\ ;\ 6) + b \cdot (1\ ;\ 5)$
d'où $u = a \cdot (3\ ;\ 6) + 0 \cdot (2\ ;\ 4) + b \cdot (1\ ;\ 5)$.
Donc, tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ peut s'écrire sous forme d'une combinaison linéaire de $(3\ ;\ 6)$, $(2\ ;\ 4)$ et $(1\ ;\ 5)$.
Ainsi, $((3\ ;\ 6),\ (2\ ;\ 4),\ (1\ ;\ 5))$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4

Question 9
Posons $f(x) = x^5$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^5 - 3^5}{x - 3} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3} = f'(3)$ si la fonction f est dérivable en 3.
Or, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 5x^4$, donc f est dérivable en 3 et $f'(3) = 5 \times 3^4 = 405$.
D'où, $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^5 - 3^5}{x - 3} = 405$.

Exercice 5

Question 10
Pour $s = 0,05$, l'équation $(1+s)^n = 3$ s'écrit $(E)\ :\ 1,05^n = 3$.
$(E) \iff \ln(1,05^n) = \ln(3)$
$(E) \iff n\ln(1,05) = \ln(3)$
$(E) \iff n = \dfrac{\ln(3)}{\ln(1,05)}$
Donc, pour $s = 0,05$, $n = \dfrac{\ln(3)}{\ln(1,05)}$.

Question 11
Pour $n = 10$, l'équation $(1+s)^n = 3$ s'écrit $(E)\ :\ (1+s)^{10} = 3$.
$(E) \iff 1 + s = 3^{\frac{1}{10}}$
$(E) \iff s = 3^{\frac{1}{10}} - 1$
Donc, pour $n = 10$, $s = 3^{\frac{1}{10}} - 1$.

Question 12
On considère l'équation $(F)\ :\ \exp(y) \times \exp(7) = 6\exp(4)$ d'inconnue y.
$(F) \iff \exp(y + 7) = 6\exp(4)$
$(F) \iff y + 7 = \ln(6) + 4$
$(F) \iff y = \ln(6) - 3$
(F) admet une solution et une seule $\ln(6) - 3$.