

Sujet B

Exercice 1

Question 1

Posons $f(x) = x^3$ pour tout x de \mathbb{R} .

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 5^3}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = f'(5) \text{ si la fonction } f \text{ est dérivable en } 5.$$

Or, f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout x de \mathbb{R} , $f'(x) = 3x^2$, donc f est dérivable en 5 et $f'(5) = 3 \times 5^2 = 75$.

$$\text{D'où, } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 5^3}{x - 5} = 75.$$

Exercice 2

Question 2

Pour $s = 10$, l'équation $(1 + s)^n = 3$ s'écrit $(E) : 11^n = 3$.

$$(E) \iff \ln(11^n) = \ln(3)$$

$$(E) \iff n \ln(11) = \ln(3)$$

$$(E) \iff n = \frac{\ln(3)}{\ln(11)}$$

$$\text{Donc, pour } s = 10, n = \frac{\ln(3)}{\ln(11)}.$$

Question 3

Pour $n = 5$, l'équation $(1 + s)^n = 3$ s'écrit $(E) : (1 + s)^5 = 3$.

$$(E) \iff 1 + s = 3^{\frac{1}{5}}$$

$$(E) \iff s = 3^{\frac{1}{5}} - 1$$

$$\text{Donc, pour } n = 5, s = 3^{\frac{1}{5}} - 1.$$

Question 4

On considère l'équation $(F) : \exp(y) \times \exp(4) = 7 \exp(6)$ d'inconnue y .

$$(F) \iff \exp(y + 4) = 7 \exp(6)$$

$$(F) \iff y + 4 = \ln(7) + 6$$

$$(F) \iff y = \ln(7) + 2$$

(F) admet une solution et une seule $\ln(7) + 2$.

Exercice 3

Question 5

On considère le sous-ensemble B de \mathbb{R}^3 défini par $B = \{(x ; y ; z) \in \mathbb{R}^3 ; x - y + 2z = 0\}$.

(1) $0 - 0 + 2 \times 0 = 0$ donc $(0 ; 0 ; 0) \in B$ d'où B n'est pas vide.

(2) B est-il stable par $+$?

Pour tous vecteurs $u = (x ; y ; z)$ et $v = (x' ; y' ; z')$ de B , on a :

d'une part $u + v = (x + x' ; y + y' ; z + z')$,

d'autre part $x + x' - (y + y') + 2(z + z') = \underbrace{x - y + 2z}_{=0 \text{ car } u \in B} + \underbrace{x' - y' + 2z'}_{=0 \text{ car } v \in B} = 0$, donc $u + v \in B$.

B est stable par $+$.

(3) B est-il stable par \cdot ?

Pour tout vecteur $u = (x ; y ; z)$ de B et pour tout réel λ , on a :

d'une part $\lambda \cdot u = (\lambda x ; \lambda y ; \lambda z)$,

d'autre part $\lambda x - \lambda y + 2(\lambda z) = \lambda \underbrace{(x - y + 2z)}_{=0 \text{ car } u \in B} = 0$, donc $\lambda \cdot u \in B$.

B est stable par \cdot .

En conclusion, B est bien un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

Question 6

Pour tout vecteur $u = (x ; y ; z)$ de \mathbb{R}^3 ,

$$u \in B \iff x - y + 2z = 0$$

$$u \in B \iff y = x + 2z$$

$$u \in B \iff u = (x; x + 2z; z) \text{ avec } x, y \text{ quelconques dans } \mathbb{R}$$

$$u \in B \iff u = x \cdot (1; 1; 0) + z \cdot (0; 2; 1) \text{ avec } x, z \text{ quelconques dans } \mathbb{R}$$

Donc B est l'ensemble des combinaisons linéaires de $(1; 1; 0)$ et de $(0; 2; 1)$.

D'où, $\{(1; 1; 0); (0; 2; 1)\}$ est une famille génératrice de B .

Exercice 4

Question 7

$((1; 0; 1), (3; -1; 2), (4; 2 - m; m))$ est une famille de trois vecteurs de \mathbb{R}^3 .

Or, $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$. Donc, cette famille est une base de \mathbb{R}^3 si, et seulement si, son déterminant est non nul.

Calculons donc son déterminant.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 - m \\ 1 & 2 & m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times (-1) \times m + 3 \times (2 - m) \times 1 + 4 \times 0 \times 2 - 1 \times (-1) \times 4 - 2 \times (2 - m) \times 1 - m \times 0 \times 3$$

$$= -m + 6 - 3m + 0 + 4 - 4 + 2m - 0 = -2m + 6$$

Donc, la famille $((1; 0; 1), (3; -1; 2), (4; 2 - m; m))$ est base de \mathbb{R}^3 si, et seulement si, $-2m + 6 \neq 0$ c'est-à-dire $m \neq 3$.

Question 8

Si $m \neq 3$, cette famille de 3 vecteurs est libre, donc son rang, taille de la plus grande famille libre qu'elle contient, est 3.

Si $m = 3$, cette famille de 3 vecteurs n'est pas libre, donc son rang n'est pas 3,

d'autre part $((1; 0; 1), (3; -1; 2), (4; 2 - m; m)) = ((1; 0; 1), (3; -1; 2), (4; -1; 3))$.

$\frac{1}{3} \neq \frac{0}{-1}$, donc les vecteurs $(1; 0; 1)$ et $(3; -1; 2)$ ne sont pas proportionnels, d'où la sous-famille de 2 vecteurs

$((1; 0; 1), (3; -1; 2))$ est libre et la famille $((1; 0; 1), (3; -1; 2), (4; -1; 3))$ est de rang 2.

Exercice 5

On considère les trois vecteurs de \mathbb{R}^2 suivants : $((3; 9), (2; 6), (1; 5))$.

Question 9

$((3; 9), (2; 6), (1; 5))$ est une famille de trois vecteurs de \mathbb{R}^2 .

Comme $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$, toute famille libre de \mathbb{R}^2 a au maximum deux vecteurs.

Donc, $((3; 9), (2; 6), (1; 5))$ est une famille liée de \mathbb{R}^2 .

Question 10

cette famille de 3 vecteurs étant liée, son rang n'est pas 3.

$$\text{D'autre part } \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times 5 - 9 \times 1 = 6 \neq 0.$$

Donc, la sous-famille $((3; 9), (1; 5))$ est libre et la famille $((3; 9), (2; 6), (1; 5))$ est de rang 2.

Question 11

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times 5 - 6 \times 1 = 4 \neq 0.$$

Donc, $((3; 9), (1; 5))$ et $((2; 6), (1; 5))$ sont deux bases de \mathbb{R}^2 et par conséquent, deux familles génératrices de \mathbb{R}^2 .

$((3; 9), (2; 6), (1; 5))$ contient deux familles génératrices de \mathbb{R}^2 : $((3; 9), (1; 5))$ et $((2; 6), (1; 5))$.

Question 12

D'après la question précédente, pour tout vecteur u de \mathbb{R}^2 , il existe deux réels a et b tels que

$$u = a \cdot (3; 9) + b \cdot (1; 5)$$

$$\text{d'où } u = a \cdot (3; 9) + 0 \cdot (2; 6) + b \cdot (1; 5).$$

Donc, tout vecteur de \mathbb{R}^2 peut s'écrire sous forme d'une combinaison linéaire de $(3; 9)$, $(2; 6)$ et $(1; 5)$.

Ainsi, $((3; 9), (2; 6), (1; 5))$ est une famille génératrice de \mathbb{R}^2 .