Quelques Corrigés pour la feuille 3
Groupe PM MDD201

Ex 1 Il est bon de se souvenir précisément des critères de d'Alembert et de Cauchy pour les séries numériques (à termes >0).

(a) On pose $u_n = \frac{|x|^n}{\sqrt{n}}$ (pour $x \neq 0$) et on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} |x| = \frac{1}{\sqrt{1+1/n}} |x| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x|$$

D'après d'Alembert, si $|x|<1$ la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}|x|^n$ converge et si $|x|>1$, la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}|x|^n$ diverge.

Donc le rayon de convergence R de $\sum \frac{1}{\sqrt{n}} x^n$ vaut $\boxed{R=1}$.

(b) On pose $u_n = \left|\frac{(-1)^n}{3^n+1}\right| |x|^{2n+1} = \frac{1}{3^n+1}|x|^{2n+1}$, et on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^n+1}{3^{n+1}+1}|x|^2$$
$$= \frac{1}{3} \times \frac{1+\frac{1}{3^n}}{1+\frac{1}{3^{n+1}}}|x|^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{3}|x|^2$$

D'après d'Alembert, si $\frac{1}{3}|x|^2<1$ (c'est à dire si $|x|<\sqrt{3}$) la série $\sum \left|\frac{(-1)^n}{3^n+1} x^{2n+1}\right|$ converge et si $\frac{1}{3}|x|^2>1$ (c'est à dire si $|x|>\sqrt{3}$) la série $\sum \left|\frac{(-1)^n}{3^n+1} x^{2n+1}\right|$ diverge.

Donc $\boxed{R=\sqrt{3}}$.

(c) On pose $u_n = (2^n-n)|x|^n$ (Rem : $\forall n\geq 1$, $2^n-n>0$)

et on a
$$u_n^{1/n} = \left[2^n\left(1-\frac{n}{2^n}\right)\right]^{1/n}|x| = 2|x|\left(1-\frac{n}{2^n}\right)^{1/n}$$
$$= 2|x|\, e^{\frac{1}{n}\ln\left(1-\frac{n}{2^n}\right)} = 2|x|\, e^{\frac{1}{n}\left(-\frac{n}{2^n}+\frac{n}{2^n}\varepsilon_n\right)}$$

avec $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$. Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n^{1/n} = 2|x|$

D'après le critère de Cauchy, si $2|x|<1$ la série $\sum(2^n-n)|x|^n$ converge et si $2|x|>1$ la série $\sum(2^n-n)|x|^n$ diverge.

Donc $\boxed{R=\frac{1}{2}}$.

(d) On pose $u_n = \left|\tan\left(\frac{1}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right| |x|^n$.

On rappelle le DL $\tan u = u + \frac{u^3}{3} + u^3 \varepsilon(u)$

où $\lim_{u\to 0} \varepsilon(u) = 0$. On a donc

$$u_n = |u_n| = \left| \cancel{\frac{1}{n}} + \frac{1}{3n^3} - \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{6n^3}\right) + \frac{1}{n^3}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right| |x|^n$$

$$= \left|\frac{1}{2n^3} + \frac{1}{n^3}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right| |x|^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^3}|x|^n \quad (*)$$

On en déduit $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^3}{(n+1)^3}|x| \underset{n\to+\infty}{\sim} |x|$

Grâce à d'Alembert, on voit que $\boxed{R=1}$

Bonus : si E est le domaine de convergence de la série entière $\sum \left(\tan\left(\frac{1}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)x^n$, on sait déjà que $]-R,R[\subset E \subset [-R,R]$ avec $R=1$. On regarde alors la convergence de la série entière en $x=1$ et $x=-1$.

On remarque que, en utilisant $(*)$ pour $x = \pm 1$,

que $\left|\tan\left(\frac{1}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right| |x|^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^3}$

Comme $\sum \frac{1}{2n^3}$ converge, la série $\sum \left(\tan\left(\frac{1}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)x^n$ converge absolument pour $x = \pm 1$ (donc converge pour $x=\pm 1$).

On a montré que $E = [-1, 1]$.

(e) On pose $u_n = e^{-n^2}|x|^n$ et on a $u_n^{1/n} = e^{-\frac{n^2}{n}}|x| = e^{-n}|x| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. donc $\lim_{n\to+\infty} u_n^{1/n} = 0 < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

D'après Cauchy, $\sum u_n$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$

donc $\boxed{R = +\infty}$

(f) On pose $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}|x|^n$ et on a $u_n^{1/n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n |x|$

$$= e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}|x| = e^{n\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right)}|x|$$

$$= e^{1+\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)}|x| \xrightarrow[n\to+\infty]{} e|x|.$$

On en déduit que si $e|x| < 1$, $\sum u_n$ converge et si $e|x| > 1$ $\sum u_n$ diverge. Donc $\boxed{R = \frac{1}{e}}$.

Ex 2 : • Si $\sum a_n$ diverge alors $\sum |a_n|$ diverge donc $\sum |a_n| 1^n$ diverge. Le point $x = 1$ n'est donc pas dans le domaine de convergence absolue de la série entière $\sum a_n x^n$ donc $\boxed{R \leq 1}$ par définition du rayon de convergence R.

• Si $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$ alors la suite (a_n) est bornée en valeur absolue par un certain réel $M > 0$

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $|a_n x^n| \leq M |x|^n$.

Mais la série géométrique $\sum |x|^n$ converge si $|x| < 1$.

Par comparaison, $\sum |a_n x^n|$ converge (au moins) pour $|x| < 1$. Donc $]-1, 1[$ est inclus dans le domaine de convergence absolue de la série entière $\sum a_n x^n$ et donc $\boxed{R \geq 1}$.

On en déduit que $\boxed{R = 1}$.

Ex 3 Attention on ne peut utiliser ici les critères de Cauchy et d'Alembert qui sont des critères suffisants de convergence.

On remarque que $\sum a_n x^{2n} = \sum a_n (x^2)^n$

On discute : si $0 \leq x^2 < R$, alors $\sum |a_n| (x^2)^n$ converge donc $\sum |a_n| |x|^{2n}$ converge.

si $x^2 > R$, alors $\sum |a_n| (x^2)^n$ diverge donc $\sum |a_n| |x|^{2n}$ diverge

Conclusion : le rayon de convergence ρ de la série entière $\sum a_n x^{2n}$ vaut $\boxed{\rho = \sqrt{R}}$.

Ex 4 ① On pose $u_n = \dfrac{|x|^{4n+1}}{4n+1}$ et on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|x|^{4n+4+1}}{4n+4+1} \Big/ \frac{|x|^{4n+1}}{4n+1} = |x|^4 \, \frac{4n+1}{4n+5}$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} |x|^4$$

D'après d'Alembert, si $|x|^4 < 1$ (c'est à dire si $|x|<1$) la série $\sum u_n$ converge et si $|x|^4 > 1$ (c'est à dire si $|x|>1$) la série $\sum u_n$ diverge. Donc $\boxed{R=1}$.

② Le domaine de convergence ouvert de cette série entière est donc $]-1,1[$. La somme f de cette série entière est C^∞ sur $]-1,1[$ et

$$f'(x) = \sum_{n\geq 0} \left(\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\right)' = \sum_{n\geq 0} x^{4n} \quad \text{pour tout } x\in]-1,1[$$

$$= \sum_{n\geq 0} (x^4)^n = \frac{1}{1-x^4}$$ (on a reconnu une somme géométrique).

③ On en déduit que, pour tout $x\in]-1,1[$, on a

$$f(x) - f(0) = \int_0^x \frac{1}{1-t^4}\,dt$$

$$= \int_0^x \left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+t^2} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-t^2}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt + \frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-t} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\big[\arctan t\big]_0^x + \frac{1}{4}\big[-\ln(1-t)\big]_0^x + \frac{1}{4}\big[\ln(1+t)\big]_0^x$$

$$= \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

donc $f(x) = \dfrac{1}{2}\arctan x + \dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$, $\forall x\in]-1,1[$

(car $f(0)=0$).

Ex 5 (a) $R=3$ et $\forall x\in]-3,3[$, on a

$$a'(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\cancel{n}3^n}\cancel{n}x^{n-1} = \frac{1}{3}\sum_{n\geq 1}\left(\frac{x}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3}\sum_{m\geq 0}\left(\frac{x}{3}\right)^m$$

avec le changement d'indice $m=n-1$.

On reconnait une série géométrique et on a :

$a'(x) = \frac{1}{3}\frac{1}{1-x/3}$ pour tout $x \in]-3,3[$

d'où $a(x) = a(0) + \int_0^x \frac{1}{3}\frac{1}{1-t/3}\,dt$

$= 0 \cancel{+} \ln(1 - x/3)$

$$\boxed{a(x) = -\ln\left(1-\frac{x}{3}\right), \quad \forall x \in]-3,3[}$$

(b) $R = 1$.

On a $\frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$ donc, pour tout $x \in]-1,1[$

on a $b(x) = \sum_{n\geq 0}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)x^n = \sum_{n\geq 0} x^n + \sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n+1}$

car $\sum x^n$ et $\sum \frac{x^n}{n+1}$ sont aussi de rayon de convergence 1.

On note $S(x) = \sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n+1}$. pour $x \in]-1,1[$.

On a $xS(x) = \sum_{n\geq 0}\frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x)$ (voir cours sinon on redémontre cela en dérivant $(xS(x))' = \sum_{n\geq 0} x^n$

$= \frac{1}{1-x}$ etc...)

On en déduit $S(x) = \begin{cases} \frac{-\ln(1-x)}{x} & \text{si } x \in]-1,1[\setminus\{0\} \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

↳ (voir la définition de $S(x)$!)

puis $b(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} - \frac{\ln(1-x)}{x} & \text{si } x \in]-1,1[\setminus\{0\} \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

(Rem : bien sûr, $b(x)$ est C^∞ sur $]-1,1[$ comme somme d'une série entière de rayon $R=1$)

(c)

$R = +\infty$. (habituel ...)

$c(x) = \sum_{n\geq 0}\frac{n}{n!}x^n - \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}x^n = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n-1)!}x^n - \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}x^n$

(car ces 2 séries sont de rayon $+\infty$ également)

$c(x) = x\sum_{n\geq 1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - \sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!} = x\sum_{m\geq 0}\frac{x^m}{m!} - \sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}$

$= xe^x - e^x = (x-1)e^x$.

on a donc $\boxed{c(x) = (x-1)e^{x}, \quad \forall x\in\mathbb{R}}$

Ex 7 (a) On décompose en éléments simples la fraction

$$\frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x-2}$$
$$= \frac{(\alpha+\beta)x + (-2\alpha+\beta)}{(x+1)(x-2)}$$

donc $\begin{cases} \alpha+\beta = 0 \\ -2\alpha+\beta = 1 \end{cases}$ donc $\alpha = -\frac{1}{3}$, $\beta = \frac{1}{3}$

on rappelle le DSE $\displaystyle\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n$ pour $|x|<1$

On a donc $\displaystyle\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n$

pour $\left|\frac{x}{2}\right| < 1$.

On en déduit que pour $|x|<1$ on a à la fois

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n \quad \text{et} \quad \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}x^n$$

donc

$$\frac{1}{(x+1)(x-2)} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n - \frac{1}{2\times 3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}x^n$$
$$= -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]x^n$$

pour tout $x\in\,]-1,1[$

(b) On rappelle que $\displaystyle\forall x\in\,]-1,1[,\ \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty}x^n$

En dérivant on obtient

$$\forall x\in\,]-1,1[,\ \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} n x^{n-1}.$$

En dérivant encore une fois

$$\forall x\in\,]-1,1[,\ \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}$$

On obtient donc

$$b(x) = \frac{1}{(x-7)^3} = -\frac{1}{7^3}\,\frac{1}{\left(1-\frac{x}{7}\right)^3}$$
$$= -\frac{1}{7^3\times 2}\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{x}{7}\right)^{n-2}$$

pour $\left|\frac{x}{7}\right| < 1$. On a donc

$$b(x) = -\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{7^{n+1}} x^{n-2}$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(m+2)(m+1)}{7^{m+3}} x^{m} \quad \text{pour } x \in]-7,7[.$$

(c) On linéarise :

$$f(x) = \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

et on rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(2x)^{2n}$

$$= -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} 2^{2n-1} x^{2n}$$

(d) on rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

donc $\frac{\sin x}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}$ pour $x \neq 0$

on voit que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

s'écrit donc $h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On a donc $f(x) = \int_0^x h(t)\,dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n}\,dt$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n}\,dt \quad \text{car la série entière converge sur } \mathbb{R}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$$

(e) On a $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{1}{1-(-x^2)}$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n \quad \text{pour } |-x^2| < 1$$

Donc $\forall x \in]-1,1[$, on a $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$

on en déduit que

$$f(x) = f(0) + \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n} \right) dt \quad \text{pour tout } x \in]-1,1[$$

$$= 0 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

(f) Astuce ! On peut réécrire

$$f(x) = \frac{1}{1+x+x^2} = \frac{1-x}{(1-x)(1+x+x^2)} = \frac{1-x}{1-x^3}$$

pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Donc pour tout $x \in]-1,1[$, on a

$$f(x) = (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} (x^3)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n} - \sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n+1}$$

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} a_m x^m \quad \text{où} \quad \begin{cases} a_{3n} = 1 \\ a_{3n+1} = -1 \\ a_{3n+2} = 0 \end{cases}$$

Ex 8 Méthode ! Une méthode pour montrer qu'une certaine fonction g est C^∞ dans un voisinage de $x=0$ (par exemple) consiste à montrer qu'elle est la somme d'une série entière dans ce voisinage de $x=0$.

Ici, on rappelle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$

(Cela fait partie des DSE à connaître.)

On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} x^{2n}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} x^{2(n-1)} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+2)!} x^{2m}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4!} x^2 + \frac{1}{6!} x^4 - \cdots$$

Si on pose $\boxed{f(0) = \frac{1}{2}}$, on voit que la fonction f ainsi prolongée en $x = 0$ s'écrit

$$f(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+2)!} x^{2m} \quad \text{pour } \underline{\text{tout } x \in \mathbb{R}}.$$

f ainsi prolongée est donc $\underline{C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$.

Ex 9 [Exercice typique!]

① On a $y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ L'énoncé impose $y(0) = 1$. On a donc $y(0) = a_0$.

donc $\boxed{a_0 = 1}$.

(Rappel en passant : on sait que $a_p = \dfrac{y^{(p)}(0)}{p!}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$)

Comme $y(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ $\forall x \in]-R, R[$ est une série entière de rayon $R > 0$, on a

$$y'(x) = \sum_{n\geq 0} n a_n x^{n-1} = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n\geq 0} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n\geq 2} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

On calcule

$$x y''(x) + 2y'(x) + x y(x) = \sum_{n\geq 0} n(n-1) a_n x^{n-1} + \sum_{n\geq 0} 2n a_n x^{n-1} + \sum_{n\geq 0} a_n x^{n+1}$$

$$= \sum_{n\geq 1} n(n-1) a_n x^{n-1} + \sum_{n\geq 1} 2n a_n x^{n-1} + \sum_{n\geq 0} a_n x^{n+1}$$

$$= \sum_{m\geq 0} (m+1) m\, a_{m+1} x^m + \sum_{m\geq 0} 2(m+1) a_{m+1} x^m + \sum_{j\geq 1} a_{j-1} x^j$$

$$= \sum_{m\geq 0} \left((m+1) m\, a_{m+1} + 2(m+1) a_{m+1}\right) x^m + \sum_{m\geq 1} a_{m-1} x^m$$

$$= \underbrace{2a_1 + \sum_{m\geq 1} \left[(m+1)(m+2) a_{m+1} + a_{m-1}\right] x^m}_{\text{série entière dont la somme est } xy''(x) + 2y'(x) + xy(x)}$$

On déduit de ce calcul que,

y solution de $(E) \iff \begin{cases} 2a_1 = 0 \\ (m+1)(m+2)\, a_{m+1} + a_{m-1} = 0, \ \forall m \geq 1 \end{cases}$

Car une série entière est nulle sur $]-R, R[$ si et seulement si ses coefficients sont tous nuls.

(2) On a donc $a_1 = 0$ et $a_{m+1} = -\dfrac{a_{m-1}}{(m+1)(m+2)}$ $(*)$

on voit que $a_3 = -\dfrac{a_1}{3 \times 4} = 0$, $a_5 = -\dfrac{a_3}{5 \times 6} = 0$,

etc ...

Soit P_k la propriété " $a_{2k+1} = 0$ "

- on a montré que P_0, P_1, P_2 sont vraies.
- Supposons P_k vraie. On a grâce à la formule de récurrence $(*)$. $a_{2(k+1)+1} = a_{2k+3} = -\dfrac{a_{2k+1}}{(2k+3)(2k+4)}$

$$= -\frac{0}{(2k+3)(2k+4)} = 0$$

donc P_{k+1} est vraie.

On en déduit que P_k est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.

On note maintenant Q_k la propriété " $a_{2k} = \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!}$ "

On a $a_0 = 1 = \dfrac{(-1)^0}{(2\times 0+1)!}$ donc Q_0 est vraie.

Supposons que Q_k est vraie. Grâce à la relation $(*)$

on a $a_{2(k+1)} = a_{2k+2} = \dfrac{-a_{2k}}{(2k+2)(2k+3)} = \dfrac{(-1)(-1)^k}{(2k+1)!\,(2k+2)(2k+3)}$

$$= \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+3)!} = \frac{(-1)^{k+1}}{(2(k+1)+1)!}$$

donc Q_{k+1} est vraie.

On en déduit que Q_k est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.

On a montré que si $y(x)$ est une sol^t série entière de l'équation différentielle (E) elle s'écrit forcément

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}.$$

③ On calcule le rayon de convergence R de cette série entière. On pose $u_n = \left|\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}\right| = |a_{2n}|\,|x|^{2n}$

et on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left|\frac{a_{2n+2}}{a_{2n}}\right| |x|^2 = \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} |x|^2$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0 < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On en déduit que $\boxed{R = +\infty}$ d'après d'Alembert.

(Le fait que le rayon de convergence obtenu soit > 0 justifie tous les calculs précédents et $y(x)$ ainsi déterminée est bien solution de (E).)

On remarque que, pour $x \neq 0$, $y(x) = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

$= \frac{\sin x}{x}$.

Donc
$$y(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Ex 11 : Raisonnement habituel $\boxed{R = +\infty}$ (le faire !)

On note alors $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.

On reconnait

$$S(x^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \text{partie paire du DSE de } e^x$$

$$= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x \quad (\text{cosinus hyperbolique de } x)$$

$$S(-x^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \cos x$$

Conclusion :
$$S(u) = \begin{cases} \operatorname{ch}(\sqrt{u}) & \text{si } u \geq 0 \\ \cos(\sqrt{-u}) & \text{si } u \leq 0. \end{cases}$$