Feuille d'exercices 6 : Théorèmes de Fubini – Changements de variable

Exercice 1. (Vrai ou faux ? Corriger au besoin.)

1. L'ensemble $\{(x,x), x \in \mathbb{R}\}$ est une partie négligeable de $\mathbb{R}^2$.
2. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est intégrable alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction réelle $y \mapsto f(x,y)$ est intégrable.
3. Une application linéaire non nulle de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ est un difféomorphisme.
4. Un théorème de Fubini affirme que, pour toutes $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ intégrables,
$$\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} f\mathrm{d}\lambda \int_{\mathbb{R}} g\mathrm{d}\lambda.$$

Exercice 2. (Intégrabilité sur $\mathbb{R}^2$).

1. Les fonctions suivantes ont-elles une intégrale sur $\mathbb{R}^2$ bien définie ? Sont-elles intégrables sur $\mathbb{R}^2$?
   (a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \frac{1}{(x^2+1)(y^2+1)}$;
   (b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = \frac{1+x^2}{1+y^2}$;
   (c) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $h(x,y) = \frac{\cos(xy)}{(x^2+1)(y^2+1)}$;
   (d) $\mathbb{1}_A$ où $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x-1 \leq y \leq x+1\}$.
2. L'assertion suivante est-elle vraie :
   Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vérifie que pour tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction réelle $y \mapsto f(x,y)$ est intégrable et pour tout $y \in \mathbb{R}$ la fonction réelle $x \mapsto f(x,y)$ est intégrable, alors f est intégrable.

Exercice 3. (Intégrale double sur un pavé).

1. Rappeler la valeur de
$$\int_{[0,\frac{\pi}{2}]^2} 1\mathrm{d}\lambda(x,y).$$
   Interpréter ce résultat géométriquement.
2. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \cos(x+y)\mathbb{1}_{[0,\frac{\pi}{2}]^2}(x,y)$ est intégrable.
3. Calculer
$$\int_{[0,\frac{\pi}{2}]^2} \cos(x+y)\mathrm{d}\lambda(x,y).$$

Exercice 4. (Intégrale double sur un triangle). Soit T le triangle de sommets $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,2)$.

1. Dessiner T.
2. Calculer de deux façons différentes $\int_T 1\mathrm{d}\lambda(x,y)$. Interpréter le résultat géométriquement.
3. Montrer que $(x,y) \mapsto (y-2x)\mathbb{1}_T(x,y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^2$.
4. Calculer l'intégrale suivante
$$\int_T (y-2x)\mathrm{d}\lambda(x,y).$$

Exercice 5. Dans cette exercice, on cherche à calculer $\int_{]0,+\infty[} \frac{\ln(x)}{x^2-1} \mathrm{d}\lambda(x)$. Soit $f :]0,+\infty[\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ donnée par $f(x,y) = \frac{1}{(1+x^2y)(1+y)}$.

1. Montrer que pour tout $y > 0$ et $x > 0$, $x \neq 1$

$$\frac{1}{(1+x^2y)(1+y)} = \frac{-\frac{x^2}{1-x^2}}{1+x^2y} + \frac{\frac{1}{1-x^2}}{1+y}.$$

2. Soit $n > 0$. En utilisant la question précédente, montrer que pour tout $x > 0$, $x \neq 1$

$$\int_{]0,n[} f(x,y)\mathrm{d}\lambda(y) = \frac{1}{x^2-1} \ln\left(\frac{1+x^2n}{1+n}\right).$$

Puis, en déduire que pour tout $x > 0$, $x \neq 1$

$$\int_{]0,+\infty[} f(x,y)\mathrm{d}\lambda(y) = \frac{2\ln(x)}{x^2-1}.$$

3. Montrer que

$$\int_{]0,+\infty[\times]0,+\infty[} f(x,y)\mathrm{d}\lambda(x,y) = \frac{\pi^2}{2}.$$

4. En déduire que

$$\int_{]0,+\infty[} \frac{\ln(x)}{x^2-1}\mathrm{d}\lambda(x) = \frac{\pi^2}{4}.$$

Exercice 6. (Formule du changement de variable).

1. Montrer que $\phi : (x,y) \mapsto (x+y, x-y)$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer son déterminant jacobien (c'est à dire le déterminant de la matrice jacobienne en tout point de $\mathbb{R}^2$).
3. En utilisant ce changement de variable, montrer que :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(x^2+1)(y^2+1)}\mathrm{d}\lambda(x,y) = 2\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{((x+y)^2+1)((x-y)^2+1)}\mathrm{d}\lambda(x,y).$$

4. En déduire la valeur de

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{((x+y)^2+1)((x-y)^2+1)}\mathrm{d}\lambda(x,y).$$

Exercice 7. (Changement de variable). Calculer

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x+y)^2-(x-y)^2}\mathrm{d}\lambda(x,y).$$

Exercice 8. (Coordonnées polaires).
Soit $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0, 1 < x^2+y^2 < 9\}$ et $f : \mathbb{R}^2_* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$.

1. Dessiner A.
2. Calculer $\int_A f \mathrm{d}\lambda$ (on n'oubliera pas d'expliquer pourquoi l'intégrale a un sens).

Exercice 9. On cherche à calculer l'intégrale $I = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{y^2 e^{-y^2}}{x^2y^2+1}\mathrm{d}\lambda(x,y)$.

1. Expliquer pourquoi cette intégrale à un sens.

2. Soit $y \in \mathbb{R}^*$. Calculer
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(xy)^2+1} \mathrm{d}\lambda(x).$$

3. Calculer explicitement la fonction de $\mathbb{R}$ dans $[0,+\infty]$ suivante
$$y \mapsto \int_{\mathbb{R}} \frac{y^2 e^{-y^2}}{x^2y^2+1} \mathrm{d}\lambda(x).$$
(Indication. On pensera à distinguer le cas $y=0$.)

4. Donner une primitive de la fonction réelle $y \mapsto ye^{-y^2}$ puis calculer (en justifiant)
$$\int_{\mathbb{R}} |y|e^{-y^2} \mathrm{d}\lambda(y).$$

5. En déduire que $I = \pi$.

Exercice 10. (Changement de variable).

1. On cherche à calculer, d'une manière différente, l'intégrale $J = \int_{\mathbb{R}\times]0,+\infty[} \frac{y^2e^{-y^2}}{x^2y^2+1} \mathrm{d}\lambda(x,y)$.

   (a) On admet que $\phi : (x,y) \mapsto (xy, e^{-y^2})$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}\times]0,1[$. Calculer son déterminant jacobien (c'est à dire le déterminant de la matrice jacobienne en tout $(x,y) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[$).

   (b) En utilisant ce changement de variable, montrer que $J = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}\times]0,1[} \frac{1}{x^2+1} \mathrm{d}\lambda(x,y)$.

   (c) En déduire la valeur de J.

2. (a) En utilisant le changement de variable $(x,y) \mapsto (x,-y)$, montrer que
$$\int_{\mathbb{R}\times]-\infty,0[} \frac{y^2e^{-y^2}}{x^2y^2+1} \mathrm{d}\lambda(x,y) = \frac{\pi}{2}.$$

   (b) Retrouver le résultat de l'exercice 9.

Exercice 11. (Un peu de géométrie)

1. Soient a et b deux réels strictement positifs. En utilisant le changement de variables $(x,y) \mapsto (ax,by)$, déterminer l'aire de l'ellipse
$$\mathcal{E} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1 \right\}.$$

2. À l'aide du théorème de Fubini-Tonelli, déterminer le volume du cône de $\mathbb{R}^3$ de sommet $(0,0,1)$ et de base le disque de centre $(0,0)$ et de rayon 1 dans $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$.

3. À l'aide du théorème de Fubini-Tonelli, déterminer le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^3$ (pour la norme euclidienne).

POUR S'ENTRAINER

Exercice 12. (Intégrale double non positive).

1. Montrer l'intégrabilité de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x,y) = \sin(x+y)e^{-y}\mathbb{1}_{[0,\pi]\times[0,+\infty[}(x,y).$$

2. Calculer $\int_{[0,\pi]\times[0,+\infty[} \sin(x+y)e^{-y}\mathrm{d}\lambda(x,y)$.
   (Indication. On pourra utiliser que $\cos(y) = \mathrm{Re}(e^{iy})$ pour déterminer une primitive de $y \mapsto e^{-y}\cos(y)$.)

Exercice 13. (Intégrale sur un triangle). Soit T' le triangle de sommets $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$.

1. Dessiner T'.
2. Calculer $\int_{T'} 1\mathrm{d}\lambda(x,y)$. Interpréter le résultat géométriquement.
3. Calculer l'intégrale suivante
$$\int_{T'} (x+y)\mathrm{d}\lambda(x,y).$$

Exercice 14. (Changement de variables). On reprend les notations des exercices 4 et 13.
Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $\phi(x,y) = \left(1-x, \frac{y}{2}\right)$.

1. Montrer que ϕ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme envoyant T sur T'. Expliciter sa réciproque.
2. En utilisant ce changement de variable, vérifier la cohérence de vos calculs des exercice 4 et 13.

Exercice 15. (Application Théorème de Fubini-Tonelli). Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ deux fonctions mesurables, positives et intégrables. On cherche à montrer l'existence d'une fonction $f * g$, appelée la convolée de f et g, donné par la formule $(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)\mathrm{d}\lambda(y)$. En admettant la mesurabilité de la fonction $y \mapsto f(y)g(x-y)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et en utilisant le Théorème de Fubini-Tonelli et un changement de variable appropriée, montrer que
$$\int_{\mathbb{R}} (f*g)(x)\mathrm{d}\lambda(x) = \left(\int_{\mathbb{R}} f\mathrm{d}\lambda\right) \times \left(\int_{\mathbb{R}} g\mathrm{d}\lambda\right).$$
Puis, en déduire que $f * g$ est finie presque partout.