Université Paris-Saclay **Intégration MDD 302**
L3 DD **2023–2024**

Feuille d'exercices 5 : Parties négligeables - Intégrales à paramètres - Correction

Correction 1.

1. Fixons $x \in \mathbb{R}$. On a
$$|f(x,t)| = \left|\frac{e^{ixt^2 lnt}}{1+t^4}\right| \leq \frac{1}{1+t^4} < \frac{1}{t^4}$$
pour tout $t \in]1,+\infty[$. Or $t \mapsto t^{-4}$ est une fonction intégrable de référence sur $[1,+\infty[$, alors $t \mapsto f(x,t)$ est une fonction intégrable sur $[1,+\infty[$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ par la première question. Fixons $t \in]1,+\infty[$. Alors la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto f(x,t) = \frac{e^{ixt^2 lnt}}{1+t^4}$ est une fonction continue car la fonction exponentielle complexe est continue. En outre, par la question précédente, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t \in]1,+\infty[$, on a
$$|f(x,t)| < \frac{1}{t^4}$$
et $t \mapsto t^{-4}$ est une fonction intégrable de référence sur $[1,+\infty[$. On peut donc appliquer le théorème de la continuité sous l'intégrale, donc la fonction
$$F : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_{[1,+\infty[} f(x,t) \mathrm{d}\lambda(t)$$
est continue.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]1,+\infty[$. Pour tout $t \in]1,+\infty[$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De plus, on a
$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\frac{it^2 lnt \cdot e^{ixt^2}}{1+t^4}\right| \leq \frac{t^2 lnt}{1+t^4} < \frac{lnt}{t^2}$$
pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t \in [1,+\infty[$. En outre $t \mapsto t^{-2}lnt$ est une fonction intégrable sur $[1,+\infty[$. En utilisant le théorème de dérivabilité $\mathcal{C}^1$ sous l'intégrale, on obtient que la fonction $F : x \to \int_{[1,+\infty[} f(x,t)\mathrm{d}\lambda(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et
$$F'(x) = \int_{[1,+\infty[} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}\lambda(t) = \int_{[1,+\infty[} \frac{it^2 lnte^{ixt^2}}{1+t^4}\mathrm{d}\lambda(t)$$
pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4. La fonction considérée est la partie imaginaire de F.

Correction 2.

1. Soit $h(x,t) = f(t)e^{-ixt}$. Comme le module de e^{-ixt} est toujours 1 on a $|h(x,t)| \leq |f(t)|$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}$ par définition (f est intégrable sur $\mathbb{R}$) donc g est intégrable sur $\mathbb{R}$.

2. On applique ici le théorème de continuité sous le signe intégrale. On sait déjà que pour tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est intégrable et dominé par la fonction f qui est intégrable et indépendante de x.

   Il reste à voir la continuité en x pour presque tout t fixé. Soit $N = \{t \in \mathbb{R}, \text{tel que } f(t) = \pm\infty\}$. Observons tout d'abord que N est de mesure nulle car f est intégrable : $\lambda(N)*(+\infty) = \int_{\mathbb{R}} 1_N(t)\,|f(t)|\,\mathrm{d}\lambda(t) \leq$

$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|\,\mathrm{d}\lambda(t) < +\infty$ donc $\lambda(N) = 0$. Donc $N \cup \{\ 0\}$ est aussi de mesure nulle et pour tout $t \in \mathbb{R} \subset N \cup \{\ 0\}$ on a $\hat{f} : x \mapsto h(x,t)$ est continue donc pour presque tout t.

On peut donc appliquer le théorème de continuité sous le signe intégrale qui dit que $\hat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Correction 3.

1. La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0,1]$ (c'est une intégrale de référence). Pour tout $t \in]0,1]$,

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{t+t^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{t}}$$

donc $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t+t^2}}$ est également intégrable sur $]0,1]$.

2. Pour tout $t \in [1,\infty[$, on a $t \leq t^2$, d'où

$$\frac{1}{\sqrt{t+t^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{t^2+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}t}$$

or $t \mapsto \frac{1}{t}$ n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$ donc la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t+t^2}}$ n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$.

3. Soit $x > 0$. On considère $f_x : t \mapsto \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t+t^2}}$. Pour tout $t \in]0,1]$, on a $e^{-tx} \leq 1$ et

$$|f_x(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{t+t^2}}$$

donc f_x est intégrable sur $]0,1]$ par la première question. Pour tout $t \in [1,\infty[$, on a $\sqrt{t+t^2} \geq 1$ et

$$|f_x(t)| \leq e^{-tx}$$

et, comme, $t \mapsto e^{-tx}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (c'est une intégrale de référence), on obtient que f_x est intégrable sur $[1,+\infty[$. Donc f_x est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Soit maintenant $x \leq 0$. On considère $f_x : t \mapsto \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t+t^2}}$. Pour tout $t \in [1,+\infty[$ on a $e^{-tx} \geq 1$ et

$$f_x(t) \geq \frac{1}{\sqrt{t+t^2}} \geq 0.$$

Or, la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t+t^2}}$ n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$. Donc f_x n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$ et donc sur $]0,+\infty[$.

Donc l'application $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ si et seulement si $x > 0$.

4. Soit $a > 0$.

   - Pour $x > a$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ par la question précédente.
   - Pour $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t) = \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t+t^2}}$ est continue sur $]a,+\infty[$ car la fonction exponentielle est continue.
   - Pour tout $t > 0$ et tout $x > a$, on a $e^{-tx} \leq e^{-ta}$ et donc

   $$|f(x,t)| = \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t+t^2}} \leq \frac{e^{-ta}}{\sqrt{t+t^2}} = f(a,t)$$

   et $t \mapsto f(a,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre s'applique donc et F est continue sur l'ouvert $]a,+\infty[$. Par conséquent F est continue sur $\cup_{a>0}]a,+\infty[\, = \,]0,+\infty[$.

5. Soit $a > 0$.

   - Pour $x > a$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ par la question précédente.
   - Pour $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t) = \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t+t^2}}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]a,+\infty[$ car la fonction exponentielle est $\mathcal{C}^1$ et pour tout $x > a$, on a
   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{-te^{-tx}}{\sqrt{t+t^2}}$$
   - Pour tout $t > 0$ et tout $x > a$, on a $e^{-tx} \leq e^{-ta}$ et $t \leq \sqrt{t+t^2}$ et donc
   $$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{te^{-tx}}{\sqrt{t+t^2}} \leq e^{-ta}$$
   et $t \mapsto e^{-ta}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

   Le théorème de classe $\mathcal{C}^1$ des intégrales dépendant d'un paramètre s'applique donc et F est $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $]a,+\infty[$. Par conséquent F est $\mathcal{C}^1$ sur $\cup_{a>0}]a,+\infty[=]0,+\infty[$. En outre, pour tout $x > 0$, on a
   $$F'(x) = \int_{]0,+\infty[} \frac{-te^{-tx}}{\sqrt{t+t^2}} \mathrm{d}\lambda(t).$$

6. Comme $x_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$, il existe $a > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $x_n \geq a$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère $f_n :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f_n(t) = f(x_n,t)$. Alors

   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t > 0$, on a par les calculs précédents,
   $$|f_n(t)| = \frac{e^{-tx_n}}{\sqrt{t+t^2}} \leq \frac{e^{-ta}}{\sqrt{t+t^2}} = f(a,t)$$
   et $t \mapsto f(a,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.
   - Soit $t > 0$, alors $\lim_{n\to\infty} -tx_n = -\infty$ d'où $\lim_{n\to\infty} e^{-tx_n} = 0$ et $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = 0$. Par conséquent (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.

   Le théorème de convergence dominée s'applique à la suite (f_n) et on obtient que $\left(\int_{]0,+\infty[} f_n(t)\mathrm{d}\lambda(t)\right)$ converge vers 0. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
   $$F(x_n) = \int_{]0,+\infty[} f_n(t)\mathrm{d}\lambda(t).$$
   Par conséquent $(F(x_n))$ converge vers 0 quand $n \to +\infty$. Par caractérisation séquentielle de la limite F a pour limite 0 en $+\infty$.

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère $g_n :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g_n(t) = f(x_n,t)$. Alors

   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $g_n \geq 0$.
   - Soit $t > 0$ alors $\lim_{n\to\infty} -tx_n = 0$ d'où $\lim_{n\to\infty} e^{-tx_n} = 1$ et $\lim_{n\to\infty} g_n(t) = \frac{1}{\sqrt{t+t^2}}$. Par conséquent (g_n) converge simplement vers la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t+t^2}}$.
   - Montrons que (g_n) est croissante. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t > 0$. Alors $x_{n+1} \leq x_n$ d'où $-tx_{n+1} \geq -tx_n$ (car $-t < 0$). Ainsi, par croissance de l'exponentielle, on obtient $e^{-tx_{n+1}} \geq e^{-tx_n}$ et donc $g_{n+1}(t) \geq g_n(t)$. Par conséquent (g_n) est croissante.

   Par le théorème de convergence monotone, la suite $\left(\int_{]0,+\infty[} f(x_n,t)\mathrm{d}\lambda(t)\right)$ converge vers
   $$\int_{]0,+\infty[} \frac{1}{\sqrt{t+t^2}} \mathrm{d}\lambda(t) = +\infty.$$

Ainsi $(F(x_n))$ converge vers $+\infty$ quand $n \to \infty$. Par caractérisation séquentielle de la limite, F a pour limite $+\infty$ en 0. (Attention, on utilise ici une variante de la caractérisation séquentielle de la limite un peu plus forte que d'habitude : on se contente de vérifier la convergence séquentielle pour les suites monotones. C'est le moment de revoir la preuve de la caractérisation séquentielle de la limite dans votre cours de première année et de vérifier que le critère monotone utilisé ici est également correct.)

Correction 4.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour pour $x \in]0,1]$, on a $|f_n(x)| \leq 1$ et une fonction constante est intégrable sur un intervalle borné donc f_n est intégrable.

2. Pour $x = 1/\pi$, on a $f_n(x) = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc la suite $(f_n(x))$ ne converge pas.

3. Soit $x \in]0,1]$. On a $\left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| < 1$ si et seulement si $\cos\left(\frac{1}{x}\right) \neq \pm 1$, c'est à dire si et seulement si $\frac{1}{x} \notin \{k\pi, k \in \mathbb{N}^*\}$, c'est à dire si et seulement si $x \in \left\{\frac{1}{k\pi}, k \in \mathbb{N}^*\right\}$.

4. On pose $N = \left\{\frac{1}{k\pi}, k \in \mathbb{N}^*\right\}$. Comme $\mathbb{N}$ est dénombrable, N est également dénombrable et donc négligeable. En outre, soit $x \in]0,1] \setminus N$. Par la question précédente, on a $\left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| < 1$. Ainsi $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Par conséquent, (f_n) converge simplement vers la fonction nulle en dehors de N.

5. On applique le théorème de convergence dominée (version avec presque partout) à la suite (f_n).

   - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est intégrable et, pour tout $x \in]0,1]$, on a $|f_n(x)| \leq 1$ avec 1 intégrable sur $]0,1]$.
   - La suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle presque partout.

   Par conséquent la suite $\left(\int_{\mathbb{R}} f_n \mathrm{d}\lambda\right)$ converge vers $\int_{\mathbb{R}} 0 \mathrm{d}\lambda = 0$.

Correction 5. Faire un dessin, pour t fixé la fonction $f(t,\cdot)$ est une "tente" de base entre $[0,t]$ et de point culminant $\frac{2}{t}$.

1. pour tout $t \in]-1,1[$, la fonction $x \mapsto f(t,x)$ est continue donc mesurable et intégrable sur $[0,1]$. Pour la continuité il suffit de vérifier les compatibilités en $x = \frac{t}{2}$ et $x = t$.

2. pour tout $x \in [0,1]$, la fonction $t \mapsto f(t,x)$ est continue. Elle vaut 0 tant que $t \leq x$. Puis quand $t \geq x \geq t/2$ elle vaut $\frac{4}{t^2}(t-x)$ avec donc la continuité en $t = x$. Finalement quand $t \geq 2x$ elle vaut $\frac{4}{t^2}(x)$ avec encore la continuité en $t = 2x$. Son maximum est atteint en $t = 2x$ et vaut $\frac{1}{x}$.

3. Pour tout $x \in [0,1]$, la fonction $t \mapsto f(t,x)$ converge vers 0 quand t converge vers 0 par continuité de $t \mapsto f(t,x)$. On a même vu que cette fonction vaut 0 pout $t \leq x$.

4. Pour calculer $F(t)$ on remarque déjà que par définition pour tout $t \leq 0$ $x \mapsto f(t,x)$ est la fonction nulle donc $F(t) = 0$. Si $t > 0$ on peut soit faire le calcul directement (intégration de fonctions affines par morceaux), soit se rappeler du dessin et que pour tout $t \leq 0$ $x \mapsto f(t,x)$ est une fonction tente donc l'intégrale est égale à l'air du triangle sous la tente soit base*hauteur/2 cela donne $F(t) = \frac{1}{2}t\frac{2}{t} = 1$ donc F n'est pas continue en $t = 0$.

   On ne peut pas appliquer le théorème de continuité sous le signe $\int$, en effet la meilleure domination possible de f indépendante de t doit dépasser $f(2x,x) = \frac{1}{x}$ pour presque tout x qui n'est pas une fonction intégrable sur $[0,1]$.

5. Oui, il suffit de réduire la base de la tente pour que l'aire du triangle tende vers 0. Une base de longueur t^2 suffit par exemple avec la même hauteur maximale.