Université Paris-Saclay **Intégration MDD 302**
L3 DD **2024–2025**

Feuille d'exercices 5 : Parties négligeables - Intégrales à paramètres

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \times [1, +\infty[\to \mathbb{C}$ définie par

$$f(x,t) = \frac{e^{ixt^2 \ln t}}{1+t^4} \cdot$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

   On considère $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par

   $$F(x) = \int_{[1,+\infty[} f(x,t) \mathrm{d}\lambda(t).$$

2. Montrer que F est continue.
3. Montrer que F est $\mathcal{C}^1$.
4. Montrer, sans refaire de calculs, que

   $$x \mapsto \int_{[1,+\infty[} \frac{\sin(xt^2 \ln t)}{1+t^4} \mathrm{d}\lambda(t)$$

   est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 (Transformée de Fourier.)**.** Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ une fonction intégrable.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto f(t)e^{-itx} \in \mathbb{C}$ est intégrable.
2. Montrer que la transformée de Fourier $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de f définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-itx}\, dt$ est une fonction continue.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,t) = \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t+t^2}} \cdot$$

1. Les fonctions $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ et $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t+t^2}}$ sont-elles intégrables sur $]0, 1]$?
2. La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t+t^2}}$ est-elle intégrable sur $[1, \infty[$?
3. Montrer que l'application $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $x > 0$.

   On considère $F :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

   $$F(x) = \int_{]0,+\infty[} f(x,t) \mathrm{d}\lambda(t).$$

4. Soit $a > 0$. Montrer que F est continue sur $]a, \infty[$. En déduire que F est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
5. Soit $a > 0$. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, \infty[$. En déduire que F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
6. Soit (x_n) une suite de réels strictement positifs ayant pour limite $+\infty$ lorsque $n \to +\infty$. Montrer que $(F(x_n))$ converge et déterminer sa limite. En déduire que F a une limite en $+\infty$.
7. Soit (x_n) une suite décroissante de réels strictement positifs ayant pour limite 0 lorsque $n \to +\infty$. Montrer que $(F(x_n))$ a une limite dans $[0, \infty]$ et la déterminer. En déduire que F a une limite en 0.

Exercice 4. (Convergence dominée, version presque partout)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $f_n :]0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)^n$ pour $x \in]0,1]$.

1. Montrer que f_n est intégrable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Étudier le comportement de la suite $(f_n(x))$ pour $x = 1/\pi$.
3. Soit $x \in]0,1]$. Montrer que $\left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| < 1$ si et seulement si $x \notin \left\{\frac{1}{k\pi}, k \in \mathbb{N}^*\right\}$.
4. Montrer qu'il existe un ensemble négligeable N tel que la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle en dehors de N.
5. On pose $I_n = \int_{]0,1]} f_n d\lambda$. Montrer que (I_n) a une limite et la déterminer.

Exercice 5. (Contre-exemple à la continuité sous le signe $\int$)

Soit $f :]-1,1[\times [0,1] \to \mathbb{R}^+$ définie par 0 si $t \leq 0$ et pour $t > 0$:

$$f(t,x) = \begin{cases} \frac{4}{t^2}x & \text{si } x \in \left[0, \frac{t}{2}\right], \\ \frac{4}{t^2}(t-x) & \text{si } x \in \left]\frac{t}{2}, t\right], \\ 0 & \text{si } x \in]t,1]. \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction $f(t,\cdot)$ est intégrable sur $[0,1]$ pour tout $t \in]-1,1[$.

2. Montrer que la fonction $f(\cdot,x)$ est continue sur $]-1,1[$ pour tout $x \in [0,1]$.

   Pour $t \in]-1,1[$, on pose
   $$F(t) = \int_{]0,1[} f(t,x)\, d\lambda(x).$$

3. Montrer que $f(t,x) \to 0$ lorsque $t \to 0$, pour tout $x \in [0,1]$.
4. Montrer que $F(t) \not\to F(0)$ lorsque $t \to 0$, $t > 0$. Pourquoi ne peut-on pas appliquer le théorème de continuité sous le signe $\int$?
5. Pouvez vous adapter l'exercice pour que $F(t) \to F(0)$, donc la continuité en 0 mais qu'il n'y ai pas de domination ?

EXERCICES BONUS

Exercice 6. (Une intégrale, des paramètres) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ intégrable.

Pour tout $y > 0$ et $z \in \mathbb{R}$, on considère $g_{y,z} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g_{y,z}(x) = \frac{yf(x)}{(x-z)^2 + y^2}.$$

1. Montrer que pour tout $y > 0$ et tout $z \in \mathbb{R}$, la quantité suivante a un sens :
$$F(y,z) = \int_{\mathbb{R}} g_{y,z}(x) \mathrm{d}\lambda(x).$$
2. Soit $a > 0$. Montrer que la fonction F est continue sur $[a, +\infty[\times \mathbb{R}$. En déduire que F est continue sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$
Indication. Utiliser une stratégie analogue à celle de la preuve de théorème de continuité des intégrale à paramètre : utiliser un critère séquentiel de continuité et appliquer le théorème de convergence dominée.
3. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{R}$ fixé, $F(y,z) \to 0$ lorsque $y \to +\infty$. A-t-on convergence uniforme ?
4. (Plus délicat) On suppose de plus (et uniquement dans cette question) que f est continue et bornée. En utilisant les propriétés de l'intégrale de Lebesgue par homothétie, montrer que, pour tout $z \in \mathbb{R}$, on a $F(y,z) \to \pi f(z)$ lorsque $y \to 0$.
5. (Plus délicat et un peu long) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$.
Indication. On pourra utiliser (sans le redémontrer) le résultat suivant. Une application $g : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement si ses dérivées partielles existent et sont continues sur U. Pour montrer la continuité des dérivées partielles, on pourra utiliser une stratégie analogue à celle utilisée dans la question 2.
6. (Plus délicat et plus long) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$.
Indication. On pourra utiliser (sans le redémontrer) le résultat suivant. Une application $g : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ si et seulement si ses dérivées partielles d'ordre 2 existent et sont continues sur U.
7. Montrer que F satisfait l'équation aux dérivées partielles
$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0.$$

Exercice 7. (Continuité et dérivabilité des intégrales à paramètres)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée et $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-(x-t)^2} f(t) d\lambda(t).$$

1. Montrer que u est bien définie.
2. Soit $a > 0$,
   (a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in [-a, a]$,
   $$-(x-t)^2 \leq -t^2 + 2a|t|.$$
   (b) Montrer que la fonction $t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2} + 2a|t|}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.
   (c) Montrer que u est continue sur $]-a, a[$.
   (d) En déduire que u est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Soit $a > 0$, Montrer que u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-a, a[$. En déduire que u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.