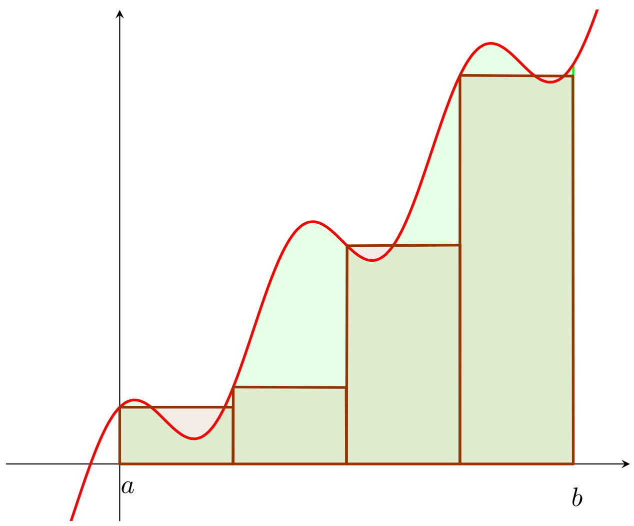
Cours de Maths du S1 :
Bloc 4



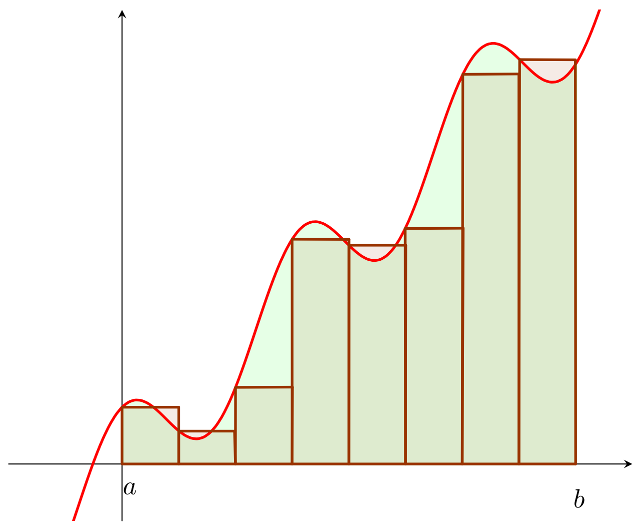


Table des matières

Chapitre 10

AAV 10 : Calculer une intégrale

Liste des Savoir-Faire du chapitre :

- ☐ SF60 : Savoir calculer une intégrale connaissant la primitive
- ☐ SF64 : Savoir trouver les fonctions pour faire une IPP
- ☐ SF65 : Savoir faire un changement de variable donné
- ☐ SF 1188 : Savoir représenter une intégrale sur un graphe de fonction
- ☐ SF 1196 : Savoir calculer une intégrale via un changement de variable non donné
- ☐ SF 1195 : Savoir décomposer une fraction rationnelle en éléments simples avec deux ou trois pôles simples
- ☐ SF 1253 : Savoir utiliser la positivité et croissance de l'intégrale

10.1 Objet et représentation graphique

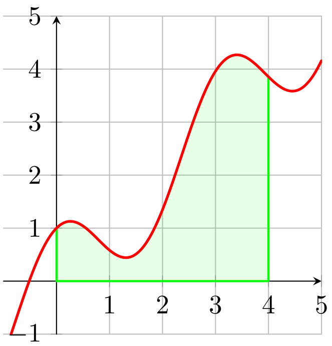
- Comment calculer l'aire sous une courbe ?
- Comment calculer l'aire d'un cercle ?
- Comment calculer des volumes d'objets tridimensionnels ?

Toutes ces questions ont motivé l'introduction de la notion d'intégrale. Cette notion est sujette à de multiples applications en physique, en traitement du signal, en probabilités ...

10.1.1 Construction de l'intégrale

Comment calculer l'aire emprisonnée sur une courbe ?

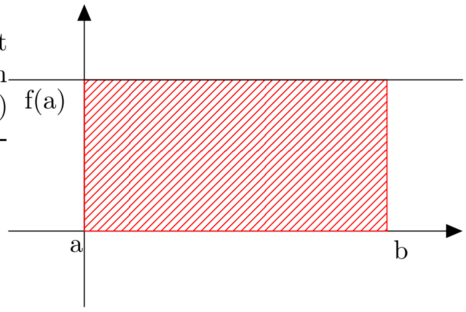
Pour une courbe quelconque, comme celle présentée sur le dessin, il n'est absolument pas évident de savoir comment calculer l'aire sous la courbe. L'idée première fut donc de trouver une façon de le faire pour des courbes plus simples. Un premier cas très simple est le cas d'une fonction constante.



d'une constante

Dans le cas d'une fonction constante, il est particulièrement simple de calculer l'aire sous la courbe. L'intégrale d'une fonction constante sur $[a, b]$ est l'aire d'un rectangle donnée par $(b-a)f(a)$ puisque $f(a)$ et $b-a$ sont les longueurs des deux côtés du rectangle. On a alors si f est constante

$$\int_a^b f(t)dt = (b-a)f(a)$$



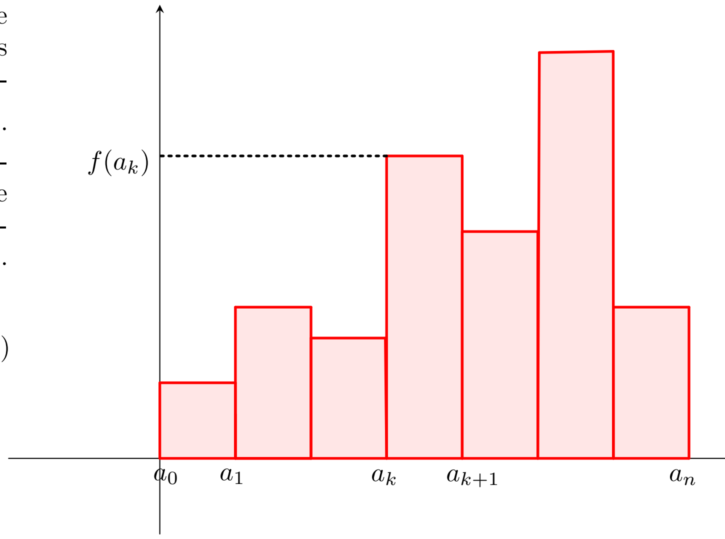
d'une fonction en escalier

Connaissant l'aire d'un rectangle, il est possible de calculer l'aire d'une fonction composée de plusieurs rectangles. On suppose comme sur le dessin que le segment $[a, b]$ est découpé en n segments de longueur $\frac{1}{n}$. Sur chacun de ces segments, la fonction prend une valeur constante. L'aire sous la courbe est alors la somme des aires des différents rectangles. On voit sur le dessin que la valeur de la fonction sur $[a_k, a_{k+1}]$ est $f(a_k)$. Alors l'aire de la fonction est

$$f(a_0)(a_1-a_0)+f(a_1)(a_2-a_1)+\ldots+f(a_{n-1})(a_n-a_{n-1})$$

ce qui s'écrit de manière synthétique comme

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)(a_{k+1}-a_k)$$



▸ **Pour aller plus loin.**

- Déterminer la valeur de a_k en fonction de a, b, k, n.
- Déterminer la valeur des $f(a_k)$ en fonction de f et de a, b, k, n.

- $a_k = a + k\frac{n}{(b-a)}$.
- $f(a_k) = f(a + k\frac{n}{(b-a)})$.

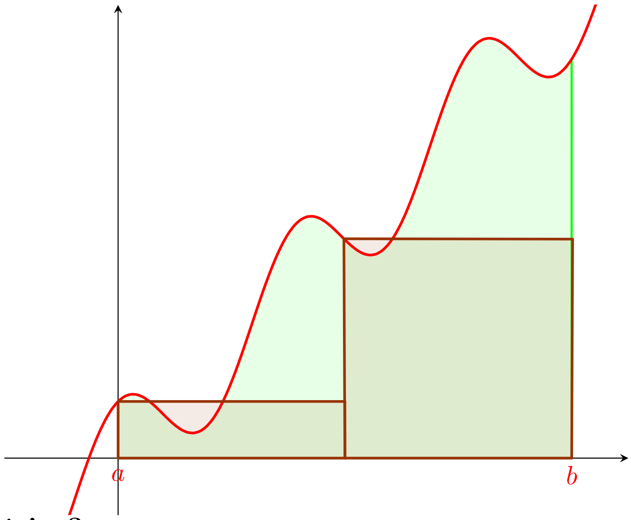
Comment faire maintenant pour une fonction qui n'est pas une fonction en escaliers ?

Ceci est l'objet de la section suivante.

d'une fonction continue sur un segment

Nous avons vu comment calculer l'intégrale d'une fonction en escaliers. Donnons-nous une fonction continue : l'idée consiste alors à essayer d'approcher "du mieux possible" la fonction par une fonction en escalier. Voici comment on peut procéder :

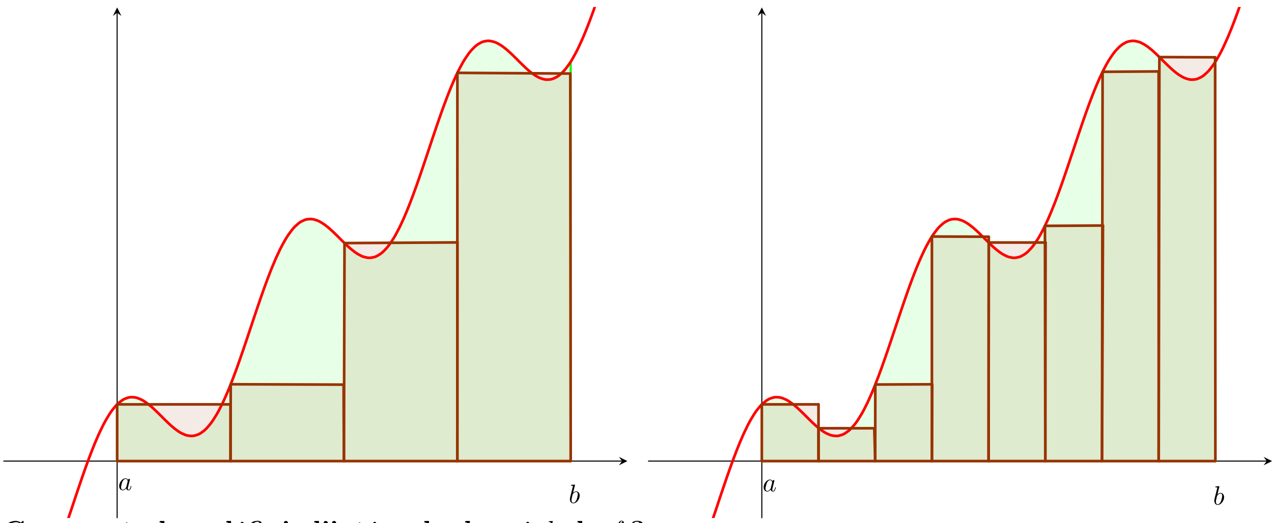
On commence par diviser l'intervalle $[a, b]$ en deux. On est capable de calculer l'aire marron ci-dessous car il s'agit d'une fonction en escaliers. On peut approximer l'aire verte sous la fonction f par cette aire marron. Il apparaît cependant assez clair que cette approximation est très grossière.



Comment rendre l'approximation plus précise ?

Divisons l'intervalle $[a, b]$ en quatre plutôt qu'en deux. On constate alors que l'approximation par l'aire marron est plus précise maintenant qu'il y a plus de points.

Continuons, plus on met de points plus l'aire marron se rapproche de l'aire verte de la fonction f.



Comment alors définir l'intégrale de a à b de f ?

L'idée est alors de faire tendre le nombre de points vers $+\infty$ pour que l'aire marron tende vers l'aire sous f ! Ceci donne lieu à la définition suivante de l'intégrale : cette définition n'est pas une définition officielle mais donne une idée assez précise de ce qu'est l'intégrale.

Définition 1: officieuse

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et soit $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$ $n+1$ points découpant ce segment. On appelle intégrale de a à b de f et note $\int_a^b f(t)dt$ la limite quand n tend vers $+\infty$ de

$\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)(a_{k+1}-a_k)$:

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)(a_{k+1}-a_k)$$

Remarque 1: D'où vient la notation dans tout ça

Pourquoi cet objet est-il noté $\int_a^b f(x)dx$?

Le symbole $\int$ est un S comme somme et les termes $f(x)dx$ correspondent aux petits rectangles de longueur $f(x)$ et de largeur dx dont on somme les aires pour obtenir l'aire totale.

Remarque 2: Vidéo pertinente

Voici une vidéo pertinente qui illustre avec un point de vue physique ce qu'est une intégrale : *Integration and the fundamental theorem of calculus | Essence of calculus, chapter 8* de 3blue1brown.

Questions :

- Quel objet est $\int_a^b f(t)dt$? Choisissez parmi : une fonction, un complexe, un réel, un graphe, un vecteur, un ovni.
- Expliquez graphiquement ce qu'est le terme $\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)(a_{k+1}-a_k)$ dans la définition 1 et pourquoi une limite intervient.

- L'intégrale d'une fonction entre deux bornes fixées est un réel qui dépend uniquement des deux bornes a et b.
- Cette somme est la somme des aires des rectangles. Pour que cette somme s'approche de l'aire sous la courbe, il faut augmenter le nombre de rectangles. C'est pourquoi on fait tendre le nombre de points vers $+\infty$.

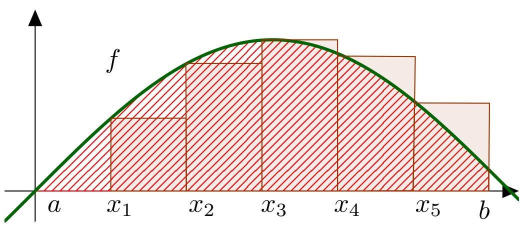
▸ **Pour aller plus loin.**

- Expliquer en quoi le théorème suivant est une conséquence de la définition officieuse.
- Utiliser le théorème suivant pour calculer la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+n}$.
- Programmer la formule des sommes de Riemann en python afin de calculer des intégrales de votre choix.

Théorème 1: Sommes de Riemann

Soit $f \in C^0([a,b])$, alors

$$R_n(f) = \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)dt.$$



Sur le dessin , l'aire hâchurée est $\int_a^b f(x)dx$ et la somme des aires des rectangles est $R_n(f)$.

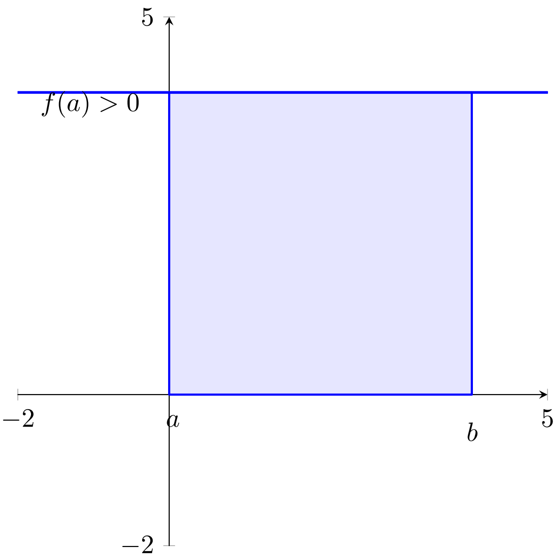
- On peut démontrer que $a_k = a + k\frac{(b-a)}{n}$. Donc si on calcule la somme de la définition officieuse, on obtient exactement la somme de Riemann. Notez qu'on peut sortir $\frac{(b-a)}{n}$ de la somme car ce terme ne dépend pas de k l'indice de la somme donc il agit comme une constante.
- $$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n(1+\frac{k}{n})}$$
  $$= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \quad \text{par linéarité de la somme.}$$
  Ceci est une somme de Riemann pour $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $a = 0$, $b = 1$. Donc d'après le théorème ci-dessus, la limite est $\int_0^1 f(x)dx = [\ln(|1+x|)]_0^1 = \ln(2)$.

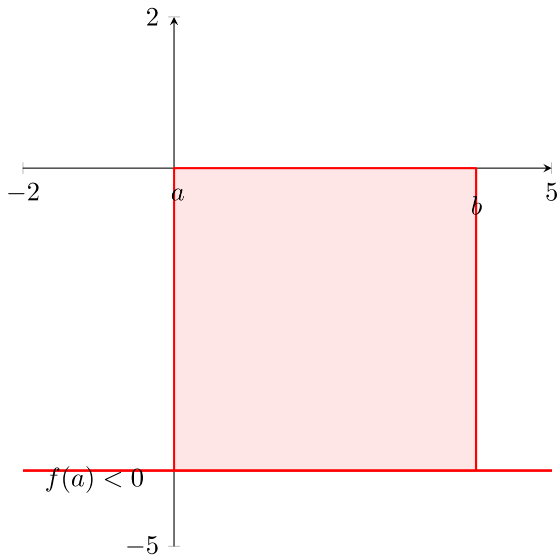
10.1.2 Interprétation géométrique

L'objectif de cette section est de comprendre à quoi correspond une intégrale en termes de calcul d'aires. Il faut avoir à l'esprit que l'intégrale ne calcule pas exactement l'aire sous une courbe mais l'aire **algébrique** sous une courbe. En d'autres termes, l'aire est comptée positivement si la fonction est au-dessus de l'axe des abscisses et négativement dans le cas contraire.

Pourquoi est-elle comptée négativement sous l'axe des abscisses ?

Pour comprendre cela, étudions simplement l'aire d'une fonction constante. Nous avons vu que l'intégrale d'une telle fonction sur un segment $[a, b]$ était définie par $f(a)(b-a)$ (voir sur le dessin ci-dessous. Remarquons que $b - a$ est positif et donc le signe de cette quantité est donné par $f(a)$. Ainsi si f est négative, cette quantité est négative !





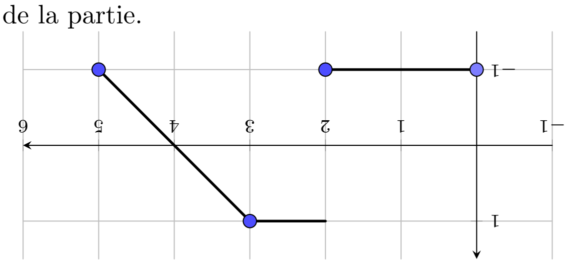
Plus généralement pour une fonction en escaliers, nous avons vu que l'intégrale est donnée par $\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)(a_{k+1} - a_k)$ pour $a_0 < a_1 < \ldots < a_n$ un découpage de $[a, b]$. Dans cette somme, les termes sont du signe de $f(a_k)$ puisque $a_{k+1} - a_k$ est positif. Ainsi lorsque f est sous l'axe des abscisses, on ajoute une quantité négative ! Voilà pourquoi on parle d'aire algébrique.

Remarque 3: La vidéo associée

Il est temps de consulter la vidéo : *SF1188 Savoir représenter une intégrale sur un graphe de fonction.*

Questions :

- Dessinez une fonction en escalier d'aire -1 sur $[0,5]$ et qui n'est pas de signe constant.
- Faites deux points de l'exercice 357.
- Faites une feuille blanche pour vous remémorer les définitions/propositions/théorèmes du chapitre jusqu'ici. Ou alors défiez un de vos camarades pour restituer plusieurs définitions/propositions/-théorèmes de la partie.



10.2 Propriétés fondamentales

L'objectif de cette section est de recenser un certain nombre de propriétés naturelles sur les intégrales. La première d'entre elles revient à dire que si on veut calculer l'are algébrique d'une somme de deux fonctions, il suffit de calculer l'aire algébrique des deux fonctions et de les additionner.

Proposition 1: Linéarité de l'intégrale

Soient f, g continues sur un segment $[a,b]$ et λ un réel. Alors

$$\int_a^b (\lambda f + g)(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt.$$

Preuve pour ceux qui veulent aller plus loin:

- Dans la preuve ci-dessous, justifiez tous les points numérotés.

Soit $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$ un découpage de $[a,b]$. On a $\int_a^b (\lambda f + g)(t)dt \underset{(1)}{=} \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} (\lambda f + g)(a_k)(a_{k+1} - a_k)$
Or

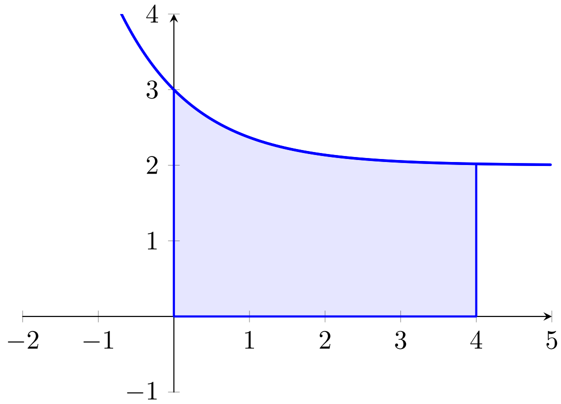
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} (\lambda f + g)(a_k)(a_{k+1} - a_k) &\underset{(2)}{=} \sum_{k=0}^{n-1} (\lambda f(a_k) + g(a_k))(a_{k+1} - a_k) \\ &\underset{(3)}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda f(a_k)(a_{k+1} - a_k) + g(a_k)(a_{k+1} - a_k) \\ &\underset{(4)}{=} \lambda \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)(a_{k+1} - a_k) + \sum_{k=0}^{n-1} g(a_k)(a_{k+1} - a_k)\end{aligned}$$

$\underset{(5)}{Donc}$ cette quantité tend vers $\lambda \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt.$

$$\underset{(6)}{Donc} \int_a^b (\lambda f + g)(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt.$$

(1) : par définition de l'intégrale.
(2) : par définition de $\lambda f + g$.
(3) : par développement du terme général de la somme
(4) : par linéarité de la somme.
(5) : par définition de l'intégrale.
(6) : par unicité de la limite.

La seconde proposition consiste à dire que si on intègre une fonction positive, l'aire sous la courbe sera positive. Sur le dessin cela revient à dire que l'aire bleue est positive.



Proposition 2: Positivité de l'intégrale

Soit f continue sur un segment $[a, b]$. Si f est positive sur $[a, b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \geq 0$

Preuve pour ceux qui veulent aller plus loin:

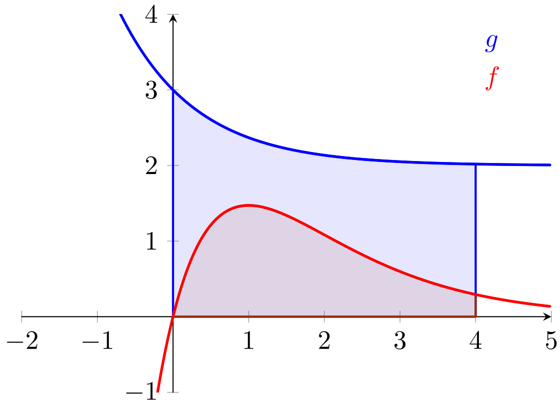
- Dans la preuve ci-dessous, justifiez tous les arguments numérotés.

On sait que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)(a_{k+1} - a_k)$.

Comme f est positive, $\underset{(1)}{alors}$ pour tout k, $f(a_k)(a_{k+1} - a_k) \geq 0$ $\underset{(2)}{donc}$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)(a_{k+1} - a_k) \geq 0$ $\underset{(3)}{donc}$ $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)(a_{k+1} - a_k) \geq 0$.

(1) : car $f(a_k)$ et $a_{k+1} - a_k \geq 0$.
(2) : car une somme de termes positifs est positive.
(3) : car une limite de termes positifs reste positive.

La troisième proposition consiste à dire que si une fonction f est sous une autre fonction g, l'aire algébrique de f sera inférieure à celle de g. Sur le dessin, cela revient à dire que l'aire bleue est plus grande que l'aire rouge.



Proposition 3: Relation de Chasles

Soit f continue sur sur un segment $[a,b]$. Soient $c \in [a,b]$ alors

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

Preuve :

Admise : vous pouvez en pour aller plus loin essayer de la faire en subdivisant $[a,b]$ en deux sous subdivisions de $[a,c]$ et $[b,c]$.

Questions :

- Un étudiant calcule $\int_0^1 t\sqrt{t}e^t dt$ et obtient -2. Je lui réponds que c'est absurde, pourquoi ?
- Etant données deux fonctions f et g, est-ce que les quantités $\int_a^b f(t)g(t)dt$ et $\int_a^b f(t)dt \times \int_a^b g(t)dt$ sont égales ?
- Expliquez graphiquement la positivité et la croissance de l'intégrale.
- Faites une feuille blanche pour vous remémorer les définitions/propositions/théorèmes du chapitre jusqu'ici. Ou alors défiez un de vos camarades pour restituer plusieurs définitions/propositions/théorèmes de la partie.

- C'est absurde car la fonction intégrée est positive. Par positivité de l'intégrale, son intégrale l'est aussi donc ne peut valoir -2.
- C'est faux : vérifiez-le avec $f(x) = g(x) = x$ par exemple.

10.3 Théorème fondamental et conséquences

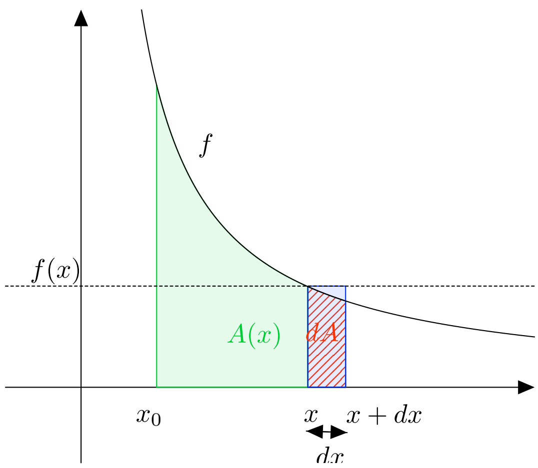
Vous-êtes vous demandé en terminale en quoi le calcul d'aires sous une courbe et le calcul de primitives était lié ? Dans cette section, nous présentons un résultat crucial sur les intégrales faisant le lien entre ces deux notions. Ce résultat est à la base de tous les calculs d'intégrales que vous avez pu faire par le passé.

10.3.1 Théorème fondamental

Dans cette introduction, nous essayons de faire comprendre graphiquement le théorème qui va suivre. Prenons une fonction f définie sur $[x_0, x]$ et notons $A(x)$ l'aire sous sa courbe c'est-à-dire son intégrale. Décalons x d'un petit dx et notons dA (l'aire hâchurée en rouge) la légère variation d'aire engendrée par ce déplacement. Cette variation d'aire peut être approximée par le rectangle (en bleu) de côtés dx et $f(x)$. Cette approximation est d'autant plus précise que dx est petit. Cette approximation se traduit en termes de géométrie par $dA = f(x)dx$ soit

$$\frac{dA}{dx} = f(x).$$

On est en train de dire avec les mains que la dérivée de A (fonction donnant l'aire sous la courbe) n'est autre que f. Autrement dit, f a pour primitive A cad la fonction donnant l'aire sous la courbe ! Cette fonction n'est autre que $\int_{x_0}^{x} f(t)dt$. Toute cette discussion débouche sur le théorème fondamental de l'intégration.



Remarque 4: Une deuxième couche sur cette description

Ce qui est décrit ci dessus est très bien illustré par la vidéo suivante (commencer à 11min30 : *The Essence of Calculus, Chapter 1* de 3blue1brown.

Théorème 2: fondamental de l'intégration (admis)

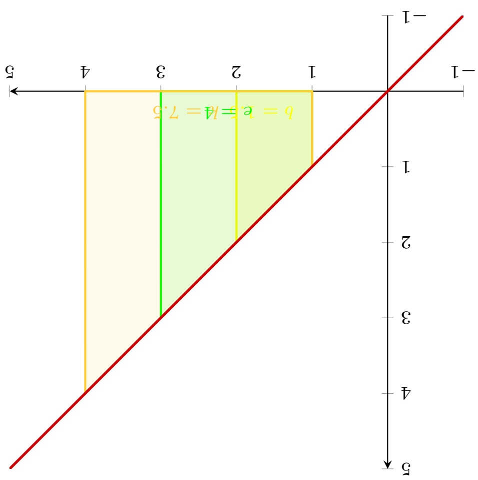
Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$ et $x_0 \in [a, b]$, alors la fonction $F : x \in [a, b] \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ est dérivable sur $[a, b]$ et

$$\forall x \in [a, b], \quad F'(x) = f(x).$$

Questions :

- L'objet $\int_{x_0}^{x} f(t)dt$ dépend-il de x ? de t ? de x_0.
- Tracez $\int_{1}^{x} tdt$ pour $x = 2, 3, 4$. Qu'est-ce que ça change de changer x ?
- Quel objet est F dans ce théorème ?

- Elle ne dépend pas de t qui est la variable d'intégration : on parle de variable muette. En revanche, les bornes x et x_0 ont clairement une influence sur la valeur de l'aire et donc de l'intégrale.
- La partie jaune est l'intégrale entre 1 et 2, verte entre 1 et 3, orange entre 1 et 4. Changer x décale la borne droite et augmente l'aire puisque l'aire sous la courbe est positive.



- F est une fonction de x.

10.3.2 Application au calcul intégral

Le théorème fondamental, qui lie aires et primitives, est par ailleurs un outil exceptionnel car il va permettre grâce au calcul de primitives, de calculer bon nombre d'aires sous des courbes parfois très complexes. Le calcul se fait bien le théorème suivant qui n'est autre qu'une conséquence du théorème fondamental.

Théorème 3:

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et soit F une primitive de f alors

$$\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Remarque 5: Que nous dit ce théorème

Voilà ce que dit ce théorème. Pour calculer l'aire algébrique d'une fonction entre a et b, il suffit :

- d'en connaître une primitive.
- de connaître la valeur de cette primitive en seulement deux points (les bords de l'aire).

Preuve :

- Dans la preuve ci-dessous, justifiez tous les arguments numérotés.

Considérons la fonction $G : x \in [a, b] \mapsto \int_a^x f(t)dt$. Comme f est continue $\underset{(1)}{alors}$ G est dérivable sur

$[a,b]$ et $\forall x \in [a,b], \quad G'(x) = f(x)$.
$\underset{(2)}{Donc}$ il existe un réel C tel que pour tout x de $[a,b]$, $G(x) = F(x) + C$ où F est une primitive de f.

$\underset{(3)}{Donc}$ pour tout x de $[a,b]$, $\displaystyle\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$.

$\underset{(4)}{Donc}$ $\displaystyle\int_a^a f(t)dt = F(a) + C$ et $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = F(b) + C$.

$\underset{(5)}{Donc}$ $C = -F(a)$ et $\underset{(6)}{donc}$ $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.

(1) : par théorème fondamental de l'intégration.
(2) : on détermine les primitives de f : une infinité.
(3) : on remplace $G(x)$ par sa valeur.
(4) : on applique en $x = a$ et $x = b$ l'égalité valable pour tout x dans $[a,b]$.
(5) : $\int_a^a f(t)dt = 0$
(6) : on remplace C par sa valeur.

Remarque 6: La vidéo associée

Il est temps de consulter la vidéo : *SF60 Savoir calculer une intégrale connaissant la primitive.*

Questions :

- Faites trois questions de l'exercice 399.
- Faites une feuille blanche pour vous remémorer les définitions/propositions/théorèmes du chapitre jusqu'ici. Ou alors défiez un de vos camarades pour restituer plusieurs définitions/propositions/-théorèmes de la partie.

10.4 Techniques calculatoires

Nous avons vu comment déterminer la valeur d'une intégrale par l'intermédiaire d'une primitive. Cependant, il n'est pas toujours possible de déterminer l'expression d'une primitive d'une fonction. Par exemple, la fonction $x \mapsto e^{x^2}$ admet une primitive mais il n'est pas possible d'obtenir son expression sous la forme d'une expression concise. Pour pallier à cela, il existe des techniques qui permettent de calculer malgré tout certains types d'intégrales. Nous présentons ici trois techniques fondamentales.

10.4.1 Intégration par parties

La technique d'intégration par parties permet d'exprimer une intégrale en fonction d'une autre intégrale (éventuellement plus facile à calculer). La formule qui paraît ici complexe n'est simplement qu'une conséquence de la formule de dérivée d'un produit.

Proposition 4: IPP

Soient $a < b$ deux réels, f et g deux fonctions $C^1([a,b])$ (dérivables sur $[a,b]$ et de dérivée continue sur $[a,b]$) alors

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt.$$

Preuve à faire par tous :

- Ecrire la formule de la dérivée du produit fg de deux fonctions.
- Intégrer cette formule entre a et b et en déduire la formule d'intégration par parties.

- $\forall x \in [a,b], (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
- Donc $\int_a^b (fg)'(x)dx = \int_a^b (f'(x)g(x) + f(x)g'((x))dx$.

  Par linéarité de l'intégrale, $\int_a^b (fg)'(x)dx = \int_a^b f'(x)g(x) + \int_a^b f(x)g'(x)dx$.

  D'après le théorème 3, $[fg(x)]_a^b = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx$, ce qui donne la formule d'IPP en retranchant $\int_a^b f(x)g'(x)dx$ des deux côtés de l'égalité.

Remarque 7: La vidéo associée

Il est temps de consulter la vidéo : *SF64 trouver fonctions ipp.*

Questions :

- Expliquez quel est l'intérêt de faire une IPP.

  L'intérêt est qu'on est amené à calculer une autre intégrale dont on peut espérer que la fonction soit plus facile à primitiver.

- Faites l'exercice 17.
- Intégrer par parties $\int_1^x \ln(t)dt$ en dérivant $\ln(t)$ et en primitivant 1 afin de retrouver une primitive de ln.

  On choisit $f'(t) = 1, g(t) = \ln(t)$ donc $f(t) = t$ est une primitive et $g'(t) = \frac{1}{t}$.

  Par IPP, $\int_1^x \ln(t)dt = [t\ln(t)]_1^x - \int_1^x dt = x\ln(x) - [t]_1^x = x\ln(x) - x + 1$.

Remarque 8: Quand faire une IPP ?

Il existe des formes classiques pour lesquelles les IPP sont un réflexe : en voici.

$$\int_a^b x\cos(x)dx, \int_a^b x\sin(x)dx, \int_a^b xe^x dx, \int_a^b x\ln(x)dx$$

En effet, on choisit de dériver x et de primitiver le reste, l'intérêt étant que le x devient une constante et donc que l'intégrale finale est facile à calculer. On fait également des IPP pour

$$\int_a^b x^n\cos(x)dx, \int_a^b x^n\sin(x)dx, \int_a^b x^n e^x dx, \int_a^b x^n\ln(x)dx$$

pour $n \in \mathbb{N}^\star$, l'idée étant de faire n IPP afin que x^n devienne constant.

10.4.2 Changement de variable

La technique de changement de variable est une des trois techniques fondamentales de calcul d'intégrales. Elle consiste à choisir une variable d'intégration "plus adaptée" qui rend le calcul plus aisé.

Proposition 5: Changement de variable

Soient $a < b$ deux réels, f une fonction continue sur $[a, b]$ et φ une fonction $C^1([a, b])$ alors

$$\int_a^b \varphi'(t) f(\varphi(t))dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx.$$

Preuve pour ceux qui veulent aller plus loin:

- Dans la preuve ci-dessous, trouver l'argument justifiant chacun des points numérotés.

Soit F une primitive de la fonction f $\underset{(1)}{alors}$ $F' = f$.

Alors

$$\begin{aligned}
\int_a^b \varphi'(t) f(\varphi(t))dt &= \int_a^b \varphi'(t) F'(\varphi(t))dt \\
&\underset{(2)}{=} \int_a^b (F(\varphi(t)))'dt \\
&\underset{(3)}{=} [F(\varphi(t))]_a^b \\
&\underset{(4)}{=} [F(t)]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \\
&\underset{(5)}{=} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt.
\end{aligned}$$

(1) : par définition d'une primitive.
(2) : par dérivation d'une fonction composée.
(3) : d'après le théorème 3.
(4) : $[F(\varphi(t))]_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = [F(t)]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}$.
(5) : d'après le théorème 3.

Remarque 9: La vidéo associée

En pratique, on n'utilise la formule du théorème de manière indirecte. Voici la technique de changement de variable qui revient à utiliser cette formule. Il est temps de consulter la vidéo : *SF 65 Savoir faire un changement de variable donné.*

Questions :

- Expliquez quel est l'intérêt de faire un changement de variable.

L'intérêt est qu'on est amené à calculer une autre intégrale dont on peut espérer que la fonction soit plus facile à primitiver.

- Faites les deux premières questions de l'exercice 389.

10.4.3 Décomposition en éléments simples

Remarque 10: La vidéo associée

Il est temps de consulter la vidéo : *SF1195 Savoir décomposer une fraction rationnelle en éléments simples*

Questions :

- Faites les deux premières questions de l'exercice 344. Calculez ensuite les intégrales de ces fonctions entre $\frac{1}{2}$ et 1.
- Faites une feuille blanche pour vous remémorer les définitions/propositions/théorèmes du chapitre jusqu'ici. Ou alors défiez un de vos camarades pour restituer plusieurs définitions/propositions/-théorèmes de la partie.
- Attaquez-vous maintenant aux problèmes liant les savoir faire. Si vous bloquez trop, retournez vers les exos de savoir faire.

Exercices de l'AAV 10

10.5 Travailler les Savoir-Faire

Exercice 1

Savoir faire

- SF30 : Savoir tracer/reconnaître le graphe des fonctions usuelles sans hésitation
- SF1188 : Savoir représenter une intégrale sur un graphe de fonction

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu les parties 33 et 34 du cours *Calculer une intégrale dans un contexte quelconque* ?

Tracez

1. $x \mapsto x^2$ et son intégrale sur $[-1, 1]$.
2. $x \mapsto \ln(x)$ et son intégrale sur $[1/2, 3]$.
3. $x \mapsto \sin(x)$ et son intégrale sur $[0, 2\pi]$

Exercice 2

Savoir faire

- SF1188 : Savoir représenter une intégrale sur un graphe de fonction

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu les parties 33 et 34 du cours *Calculer une intégrale dans un contexte quelconque* ?

Que représente l'intégrale d'une fonction par rapport à x entre A et B ?

- ☐ L'aire algébrique (possiblement négative) entre la courbe de la fonction et l'axe des x, entre les points A et B
- ☐ La variation de la fonction entre les points A et B
- ☐ La longueur de la courbe de la fonction entre les points A et B
- ☐ rien de tout cela

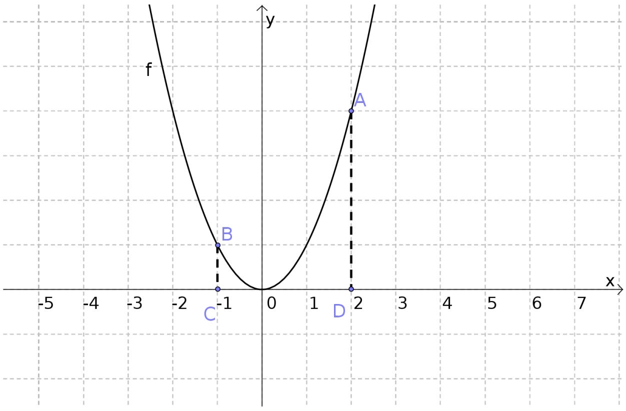
Exercice 3

Savoir faire

- SF1188 : Savoir représenter une intégrale sur un graphe de fonction

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu les parties 33 et 34 du cours *Calculer une intégrale dans un contexte quelconque* ?

La courbe ci-dessous a pour équation $f(x) = x^2$. Combien vaut la surface délimitée par les points A, B, C et D ?



- ☐ $\sqrt{3}$
- ☐ 4
- ☐ 3
- ☐ $\sqrt{4}$

Exercice 4

Savoir faire

- SF1188 : Savoir représenter une intégrale sur un graphe de fonction

Une fonction f est strictement croissante sur un intervalle. Quelle affirmation est forcément vraie sur le même intervalle ?

- ☐ Sa primitive est négative
- ☐ Sa primitive est positive
- ☐ Sa primitive est nulle
- ☐ Aucune de ces affirmations

Exercice 5

Savoir faire

- SF60 : Savoir calculer une intégrale connaissant la primitive
- SF62 : Connaître les primitives des fonctions usuelles

Déterminer l'aire algébrique sous la courbe de la fonction $f : x \mapsto x^2 \sin(x^3)$ entre 0 et $\pi^{\frac{1}{3}}$.

Exercice 6 *exemples de calcul intégral*

Savoir faire

- SF60 : Savoir calculer une intégrale connaissant la primitive
- SF61 : Savoir calculer une primitive de fonctions simple

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 35 du cours *Calculer une intégrale dans un contexte quelconque* ?

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 x dx$
2. $\displaystyle\int_0^\pi \sin(x) dx$
3. $\displaystyle\int_3^4 \frac{1}{2x} dx$

4. $\displaystyle\int_1^e \ln(x)dx$
5. $\displaystyle\int_0^2 (x+2)^3 dx$
6. $\displaystyle\int_0^1 xe^{x^2} dx$

Exercice 7 *Calcul d'intégrales de fonctions polynomiales*

Savoir faire

- SF60 : Savoir calculer une intégrale connaissant la primitive
- SF61 : Savoir calculer une primitive de fonctions simple

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 35 du cours *Calculer une intégrale dans un contexte quelconque* ?

Calculez les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^3 xdx$
2. $\displaystyle\int_0^\pi \cos(3x)dx$
3. $\displaystyle\int_0^3 (\frac{x^3}{5} + 4x^2 + 6)dx$
4. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}dx$

Exercice 8 *Intégration*

Savoir faire

- SF60 : Savoir calculer une intégrale connaissant la primitive
- SF61 : Savoir calculer une primitive de fonctions simple

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 35 du cours *Calculer une intégrale dans un contexte quelconque* ?

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 x^2 - xdx$
2. $\displaystyle\int_0^\pi \cos(2x)dx$
3. $\displaystyle\int_3^4 \frac{1}{2x}dx$
4. $\displaystyle\int_1^e \ln(x)dx$
5. $\displaystyle\int_0^2 e^{-3x}dx$
6. $\displaystyle\int_0^2 (x-4)^4dx$
7. $\displaystyle\int_0^1 xe^{x^2} dx$
8. $\displaystyle\int_0^\pi x\sin(x^2)dx$
9. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x-2}dx$

10. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx$
11. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x-2}{(x^2-4x)^4}dx$

Exercice 9 *Calcul d'intégrales : fractions rationnelles simples*

Savoir faire

- SF60 : Savoir calculer une intégrale connaissant la primitive
- SF61 : Savoir calculer une primitive de fonctions simple

Calculez les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x^2}{4x^3+1}dx,$
2. $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{(3x+5)^3}dx$
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x^2-4)^2}dx$
4. $\displaystyle\int_1^2 (x^2-4x+5)^4(x-2)dx$

Exercice 10 *integrales (Application de l'IPP)*

Savoir faire

- SF61 : Savoir calculer une primitive de fonctions simple
- SF64 : Savoir trouver les fonctions pour faire une IPP

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 36.1 du cours *Calculer une intégrale dans un contexte quelconque* ?

Calculez les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties :

a) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} x\sin(x)dx$

b) $\displaystyle\int_0^1 xe^x dx$

c) $\displaystyle\int_1^e \ln(x)dx$

Exercice 11 *Intégrale directe et avec IPP*

Savoir faire

- SF61 : Savoir calculer une primitive de fonctions simple
- SF64 : Savoir trouver les fonctions pour faire une IPP

1. Calculez les intégrales suivantes :

   a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx$

   b) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} 3\sin(2x)dx$

2. Grâce à une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_1^e x^3\ln(x)dx$

Exercice 12 *2 primitives (avec IPP)*

Savoir faire

- SF61 : Savoir calculer une primitive de fonctions simple
- SF64 : Savoir trouver les fonctions pour faire une IPP

Calculez une primitive des fonctions qui à x associe

a) $(2x+1)e^{-x}$

b) $\dfrac{\ln(x)}{x^2}$

Exercice 13 *Calcul intégral : IPP*

Savoir faire

- SF61 : Savoir calculer une primitive de fonctions simple
- SF64 : Savoir trouver les fonctions pour faire une IPP

Calculez les intégrales suivantes (on pourra faire une intégration par parties bien choisie) :

1. $\displaystyle\int_0^1 x^2 \exp(x)dx$
2. $\displaystyle\int_1^e (\ln(x))^2 dx$
3. $\displaystyle\int_0^2 \sin(t)\exp(t)dt.$

Exercice 14 *Deux primitives (avec IPP simple)*

Savoir faire

- SF61 : Savoir calculer une primitive de fonctions simple
- SF64 : Savoir trouver les fonctions pour faire une IPP

Calculez les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^1 xe^{2x}dx$

b) $\displaystyle\int_1^e x\ln(x)dx$

Exercice 15 *QCM-902*

Savoir faire

- SF65 : Savoir faire un changement de variable donné

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 36.2 du cours *Calculer une intégrale dans un contexte quelconque* ?

Que donne un changement de variable par $u = e^t$ avec $a > 0$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 e^{-t}t^2\,\mathrm{d}t$?

- ☐ $\displaystyle\int_1^e (\ln(u))^2\,\mathrm{d}u$
- ☐ $\displaystyle\int_1^e \frac{(\ln(u))^2}{u^2}\,\mathrm{d}u$
- ☐ $\displaystyle\int_1^e \frac{(\ln(u))^2}{u}\,\mathrm{d}u$
- ☐ $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u$

Exercice 16

Savoir faire

- SF1196 : Savoir calculer une intégrale via un changement de variable non donné

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 36.2 du cours *Calculer une intégrale dans un contexte quelconque* ?

Calculer à l'aide d'un changement de variable les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$
2. $\displaystyle\int_e^2 \frac{1}{t(\ln(t))^2}dt$
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^{2x}+2}dx$

Exercice 17

Savoir faire

- SF65 : Savoir faire un changement de variable donné

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 36.2 du cours *Calculer une intégrale dans un contexte quelconque* ?

Grâce au changement de variable indiqué, calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx$ (poser $u = e^{-x}$)
2. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan(x)dx$ (poser $u = \cos(x)$)
3. $\displaystyle\int_0^2 x^2\sqrt{2+x}dx$ (poser $u = \sqrt{2+x}$)
4. $\displaystyle\int_0^1 \ln(3x+1)dx$ (poser $u = 3x+1$)
5. $\displaystyle\int_0^2 \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}dt$ (poser $u = \sqrt{t}$)
6. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-u^2}du$ (poser $u = \cos(t)$)

Exercice 18

Savoir faire

- SF1195 : Savoir décomposer une fraction rationnelle en éléments simples

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 36.3 du cours *Calculer une intégrale dans un contexte quelconque* ?

Décomposer en éléments simples les expressions suivantes :

1. $\dfrac{1}{x(x-3)}$
2. $\dfrac{1}{x^2-4}$
3. $\dfrac{1}{x^3-x}$
4. $\dfrac{1}{(x-1)(x^2+1)}$

10.6 Exercices de niveau Avancé et Expert

Exercice 19 *Niveau Avancé*
Soit f la fonction définie sur $[0, 6]$ représentée par le dessin suivant et définie par

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0.5(x-1)+1 & \text{si } 1 < x < 3 \\ 2 & \text{si } x = 3 \\ 1 & \text{si } 3 < x \leq 5 \\ 3(x-5)-2 & \text{si } 5 < x \leq 6. \end{cases}$$

1. Dessiner la fonction précisément.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^6 f(t)\,dt$ par deux méthodes : une graphique basée sur votre dessin et une calculatoire.
3. Soit $x \in [0, 6]$, calculer $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ par ces mêmes deux méthodes.

Exercice 20 *Niveau Expert*

1. Dessiner une fonction non nulle d'intégrale nulle. Donner l'expression d'une fonction non nulle d'intégrale nulle et prouvez que l'intégrale est bien nulle.
2. Dessiner une fonction positive non nulle d'intégrale nulle. Donner l'expression d'une fonction positive non nulle d'intégrale nulle et prouvez que l'intégrale est bien nulle.
3. Que faut-il ajouter comme hypothèse pour qu'une fonction positive d'intégrale nulle soit nulle ?

Exercice 21 *Niveau expert*
Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu le cours *Calculer une intégrale dans un contexte quelconque* ?

On s'intéresse à l'intégrale dite de Wallis

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)dx.$$

1. Calculer I_0, I_1. Représenter les aires correspondantes sur un graphique.
2. En exprimant $\sin^2(x)$ en fonction de $\cos(2x)$ (linéariser $\sin^2$: voir le SF sur les complexes), calculer I_2.
3. Grâce à une intégration par parties appliquée à sin et $\sin^{n+1}$, démontrer que
$$I_{n+2} = (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\cos^2(x)dx$$
4. En déduire à l'aide d'une relation entre $\cos^2$ et $\sin^2$ que, pour tout $n \geq 0$, on a
$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$
5. Démontrer que I_n est positive pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pourra pour cela commencer par étudier le terme intégré.
6. Sans calculer les intégrales et en effectuant le changement de variable $t = \dfrac{\pi}{2} - x$, montrer que
$$\int_0^{\pi/2} \sin(x)^n dx = \int_0^{\pi/2} \cos(x)^n dx.$$

Exercice 22 *Niveau Avancé* Quelles méthodes utilisez-vous pour calculer des intégrales ? Lorsqu'on vous demande de calculer une intégrale, quelle méthode utilisez-vous pour quel type d'intégrale ? Donnez des exemples pour chacune des méthodes. Trouvez également des intégrales qui peuvent se résoudre en utilisant deux des méthodes précédemment citées.

Exercice 23 *Niveau Expert* Trouver une fonction f telle que l'aire de l'ensemble des points (x, y) du plan tels que $1 < x < 2$ et $f(x) < y < x^3$ soit égale à 2.

Exercice 24 *Niveau Expert* Soit $a > 0$, calculer la limite quand a tend vers $+\infty$ de l'intégrale $\displaystyle\int_1^a \frac{\ln(x)}{(1+x)^2}dx$.

Exercice 25 *Niveau Avancé*
On rappelle que si une fonction f est positive sur $[a, b]$ alors son intégrale sur $[a, b]$ est positive.

1. Expliquez ce que cela signifie géométriquement.
2. On suppose que $f(t)$ est inférieure à 2 pour tout t dans $[a, b]$. Démontrez que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \leq 2b - 2a$. (Il est interdit d'utiliser telle quelle la croissance de l'intégrale).
3. Comment peut-on choisir le paramètre x afin de s'assurer que $\displaystyle\int_0^1 \ln(x+t)dt$ soit positif ? Sans calcul, donner l'intervalle maximal en x assurant que cette intégrale soit positive grâce au principe de positivité de l'intégrale.
4. Valider votre résultat de la question précédente par le calcul.

Exercice 26 *Niveau Avancé*
On considère la fonction $f_n : x \mapsto x^n \ln(x)$ pour tout $n \geq 1$.

1. Etudier pour tout n les variations de f_n sur $[0, 1]$ et tracer l'allure de la fonction pour deux n différents que vous choisirez.
2. Déterminez le maximum de $|f_n|$ ainsi que sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 27 *Niveau Avancé*
Voici différentes intégrales. Regroupez ensemble celles qui sont égales et précisez les méthodes et calculs qui permettent de passer de l'une à l'autre.

1. $\displaystyle\int_0^2 e^{-x^2}dx$.
2. $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}dx$
3. $\displaystyle\int_0^4 \frac{e^{-x}}{2\sqrt{x}}dx$.
4. $\displaystyle\int_{-4}^{-2} e^{-(x+4)^2}dx$.
5. $\displaystyle\int_0^2 x^2e^{-x^2}dx$.

Exercice 28 *Niveau expert*
Soit $f :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \tan(x)$.

1. Expliquer (rapidement) pourquoi il existe $g : \mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$ telle que $f \circ g(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction g s'appelle *arctangente* et se note arctan.
2. On admet que g est dérivable. En calculant la dérivée de $f \circ g$ de deux manières différentes, démontrer que $g'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$.

4. En écrivant $1+x+x^2 = (x-\frac{1}{2})^2 - \frac{3}{4}$, calculer grâce à un changement de variable adapté

$$\int \frac{dx}{1+x+x^2}$$

Exercice 29 *Niveau expert*
Calculer une primitive de la fonction $t \mapsto \sqrt{1+t}\ln(t)$.

Chapitre 11

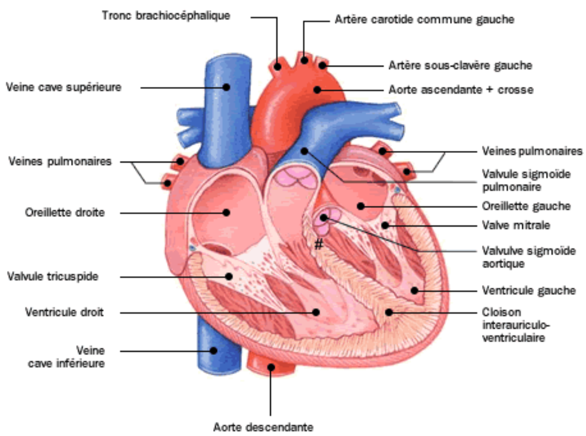
AAV 11 : Résoudre une équation différentielle d'ordre 1

Liste des Savoir-Faire du chapitre :

- ☐ SF 1218 : Savoir vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle
- ☐ SF 96 : Savoir reconnaitre les caractéristiques d'une ED (linéarité, ordre…)
- ☐ SF 67 : Savoir résoudre une équa diff linéaire homogène d'ordre 1 à coeffs constants
- ☐ SF 214 : Savoir résoudre une équa diff linéaire homogène d'ordre 1 à coeffs variables
- ☐ SF 69 : Savoir trouver des solutions particulières simples pour une edo d'ordre 1 avec second membre
- ☐ SF 74 : Savoir trouver une solution vérifiant une condition initiale donnée à l'ordre 1
- ☐ SF 215 : Trouver la solution générale d'une edo linéaire d'ordre 1 ou 2 avec second membre

Introduction au coeur de la médecine

Nous nous intéressons ici à un modèle mathématique du coeur humain. Le muscle cardiaque est composé de deux ventricules permettant de pomper le sang désoxygéné, de l'envoyer au poumon afin qu'il se réoxygène, puis de pomper le sang réoxygéné et de le redistribuer dans le corps. En vieillissant, ces ventricules peuvent perdre leur capacité à pomper efficacement donnant lieu à des défaillances cardiaques. Une des branches de recherche actuelle concerne l'assistance des ventricules par des dispositifs électroniques de pompage. Ceci est moins contraignant que d'imposer au patient une greffe cardiaque.

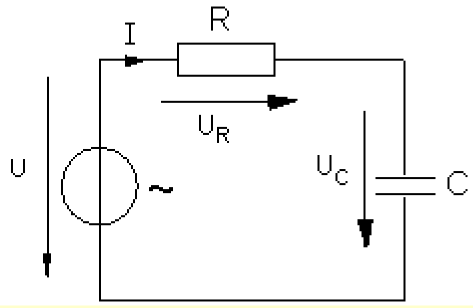


Un modèle mathématique pour pomper efficacement :

Ces dispositifs sont censés reproduire fidèlement le pompage des ventricules. Leurs actions sont pilotées par un programme informatique prenant sa source dans une modélisation mathématique du système cardiovasculaire. Cette modélisation est cependant très complexe avec de nombreux phénomènes à prendre en compte. Nous nous concentrons ici sur la modélisation d'une artère. Une donnée nous intéresse particulièrement, c'est la pression artérielle (la tension). C'est cette donnée que le médecin mesure à l'aide d'un sphygmomanomètre pour contrôler le rythme cardiaque.

L'artère vue comme un circuit électrique RC :

Les parois des artères disposent d'une certaine flexibilité afin de pouvoir supporter des variations continuelles de pression dues au battements cardiaques. Lors de l'éjection de sang sous pression, une partie du sang est emmagasinée par les parois puis rejetée lorsque le débit est moindre : la compliance C mesure cette capacité de stockage. Par ailleurs, les parois opposent une résistance à l'écoulement sanguin notée R. Ceci est analogue à ce qu'on peut voir dans un circuit électrique RC : ici c'est la compliance qui joue le rôle d'un condensateur électrique.



La modélisation : apparition d'une équation différentielle :

On s'intéresse donc au circuit RC afin d'en déduire des propriétés pour l'artère. Notons C la capacité du condensateur, U_C la tension à ses bornes et $q = CU_C$ sa charge. Notons I l'intensité traversant le circuit. On sait que I est la dérivée de la charge par rapport au temps. En utilisant la loi des mailles, on a

$$U_e = U_R + U_C = RI + U_C = R\frac{dq}{dt} + U_C = RC\frac{dU_C}{dt} + U_C.$$

Donc

$$\frac{dU_C}{dt} + \frac{U_C}{RC} = \frac{U_e}{RC}.$$

Déduisons de cette analogie, l'équation régissant la pression artérielle. Par analogie $P = P(t)$ la pression artérielle correspond à la tension, $U_e = U_e(t)$ correspond à RQ où $Q(t)$ est le débit en entrée de l'artère (à titre d'exemple, un massage cardiaque modifie la pression à l'entrée de l'artère et donc le débit Q !) Ainsi l'équation sur la pression régissant la variation temporelle de cette pression est

$$P'(t) + \frac{P(t)}{RC} = \frac{Q(t)}{C}.$$

Par ailleurs, au temps $t = 0$, la pression artérielle a une certaine valeur P_0. Ainsi

$$\left\{ \begin{array}{rcl} P'(t) + \dfrac{P(t)}{RC} & = & \dfrac{Q(t)}{C} \\ P(0) & = & P_0 \end{array} \right.$$

On est amené à la résolution d'une équation de la forme

$$y'(t) + ay(t) = f(t),$$

où ici $P(t) = y(t), a = 1/RC, f(t) = Q(t)/C$. Ce type d'équation portant dont l'inconnue est une fonction du temps est une équation différentielle en temps. Nous allons voir de quoi il s'agit et comment résoudre ce type d'équation.

11.1 Objet, vocabulaire

11.1.1 Qu'est-ce qu'une équation différentielle ?

Une équation est une égalité entre deux objets de même nature. Durant votre cursus, vous en avez rencontré de nombreuses essentiellement situées sur les réels. Par exemple, $x + 1 = 2x - 1$ est une équation algébrique pour laquelle on veut trouver les x réalisant l'égalité entre deux nombres réels, $x + 1$ et $2x + 1$. Vous avez aussi résolu des équations de la forme $x^2 + 2x + 1 = 0$, équations qui mettent en jeu également des réels. Plus récemment, vous avez résolu des équations sur les complexes comme par exemple $z - i = 3z + 1 + 2i$: il s'agissait de trouver les complexes z qui convenaient, les quantités mises en égalité sont cette fois des complexes.

Pourquoi alors ne pas imaginer des équations sur des fonctions ?

On pourrait imaginer effectivement avoir des équations dont les deux côtés seraient des fonctions. C'est exactement ce qu'on va faire lorsqu'on va parler d'équations différentielles. Voici un exemple d'équation différentielle

$$y' = 2y + \cos(x)$$

Analysons là : l'inconnue y est une fonction, y' sa dérivée et $\cos(x)$ est la fonction cosinus appliquée en x. Résoudre cette équation revient à chercher les y qui en tout point x vérifient

$$y'(x) = 2y(x) + \cos(x).$$

Pourquoi "différentielles" ?

Le mot "différentielle" vient du fait que cette équation met en oeuvre les dérivées successives de l'inconnue notée y.

11.1.2 Vocabulaire

Qu'est-ce qu'une solution d'équation différentielle ?

Une solution y d'une équation différentielle est simplement une fonction qui vérifie cette équation.

Comment vérifier qu'une fonction est solution d'une équation ?

Pour cela, faites exactement ce que vous faites pour une équation réelle, vous remplacez la fonction dans l'équation et vous regardez si l'équation est vérifiée.

Exemple 1:

- La fonction exp est solution de l'équation $y' = y$. Pour le vérifier, il suffit d'injecter : pour tout x réel, $(e^x)' = e^x$ donc exp est bien solution.
- La fonction $f : x \mapsto e^{x^2}$ est solution de $y' - 2xy = 0$ car $f'(x) - 2xf(x) = 2xe^{x^2} - 2xe^{x^2} = 0$.

Questions :

- Vérifier si les 4 propositions de l'exercice 606 sont solutions de l'équation proposée ou non.

Qu'est-ce que résoudre une équation différentielle ?

Résoudre une équation, c'est trouver **toutes** les solutions de cette équation. Nous verrons cela dans la suite du cours.

Qu'est-ce que l'ordre d'une équation ?

L'ordre est l'indice maximal de dérivation. Par exemple, $y' - 2xy = 0$ est d'ordre 1 alors $y'' + 2y' - y = 1$ est d'ordre 2.

Qu'est-ce qu'une équation linéaire d'ordre 1 ?

C'est une équation de la forme

$$y' - a(t)y = b(t)$$

où a et b sont deux fonctions.

Qu'est-ce que le second membre d'une équation linéaire d'ordre 1 ?

Dans l'équation $y' - a(t)y = b(t)$, le second membre est b.

Qu'est-ce qu'une équation linéaire d'ordre 1 homogène ?

C'est une équation dont le second membre est nul. Autrement dit, il s'agit d'une équation de la forme $y' - a(t)y = 0$.

Remarque 11: La vidéo associée

Il est temps de consulter la vidéo : *SF 96 Savoir reconnaitre les caractéristiques d'une ED (linéarité, ordre...).*

Questions :

- Faire 4 points de l'exercice 18.
- Ecrire une équation différentielle d'ordre 3 linéaire à coefficients constants non homogène.

$y''' + y = \sin(t).$

- Faites une feuille blanche pour vous remémorer les définitions/propositions/théorèmes du chapitre jusqu'ici. Ou alors défiez un de vos camarades pour restituer plusieurs définitions/propositions/-théorèmes de la partie.

11.2 Résolution des équations homogènes

Cette section se focalise sur les équations sans second membre dites homogènes. Ces équations sont de la forme $y' - a(t)y = 0$ où a est une fonction continue.

11.2.1 Résolution

La proposition suivante est très importante : elle donne la forme des solutions pour ce type d'équation. La fonction exponentielle joue un rôle très important dans la forme des solutions.

Proposition 6: Solutions d'une équation homogène

Soit $y' - a(t)y = 0$ une équation différentielle linéaire homogène où a est une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit A une primitive de a. Les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme

$$\begin{array}{cccc} y & : & I & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & Ce^{A(t)} \end{array}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Preuve à faire par tous :

- Vérifiez que $\begin{array}{cccc} y & : & I & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & Ce^{A(t)} \end{array}, \quad C \in \mathbb{R}$ est bien solution de $y' - a(t)y = 0$.

Réciproquement il faut montrer que toute solution est de cette forme : on admet pour cela que la seule solution qui s'annule est la solution nulle, toutes les autres sont non nulles en tout point.

- En partant de $y' - a(t)y = 0$, donner une expression de $\dfrac{y'}{y}$.
- Intégrer l'équation que vous avez obtenue. En déduire l'expression de y.

- Soit C un réel, pour tout t de I,

$$\begin{aligned} y' - a(t)y &= (Ce^{A(t)})' - a(t)Ce^{A(t)} \\ &= Ca(t)e^{A(t)} - a(t)Ce^{A(t)} \qquad \text{par dérivation composée et } A' = a \\ &= 0 \end{aligned}$$

  Donc y est bien solution de l'équation.

- $$\begin{aligned} y' - a(t)y = 0 &\iff \forall t \in I, y'(t) - a(t)y(t) = 0 \\ &\iff \forall t \in I, y'(t) = a(t)y(t) \\ &\iff \forall t \in I, \frac{y'(t)}{y(t)} = a(t) \end{aligned}$$

- Donc $\forall t \in I, \ln(|y(t)|)' = A'(t)$.
  Donc il existe C un réel tel que : $\forall t \in I, \ln(|y(t)|) = A(t) + C$.
  Donc $\forall t \in I, |y(t)| = e^{A(t)+C} = e^{A(t)}e^{C} = Ke^{A(t)}$.
  y étant continue elle vaut $\pm Ke^{A(t)}$ où K est une constante réelle.

Remarque 12: La vidéo associée

Il est temps de consulter la vidéo : *SF 216 : Savoir résoudre une équa diff linéaire homogène d'ordre 1 à coeffs variables.*

Questions :

- Expliquez la phrase suivante : "Trouver une solution d'équa diff linéaire d'ordre 1 homogène, c'est simplement trouver une primitive d'une fonction."

  Il suffit en effet de trouver une primitive de a et on a les solutions sous la forme $y : t \mapsto Ce^{A(t)}$ où C est un réel.

- Faire les 1 et 3 de l'exercice 1424.

11.2.2 Nombre de solutions

Nous avons vu dans la section précédente quelle était la forme des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1. L'objectif de cette section est plutôt de se faire une image visuelle de ces solutions et de discuter sur leur nombre. Cette question est légitime puisque une équation donnée peut avoir 0, 1 ou plusieurs solutions. Par exemple l'équation $x = x + 1$ n'a pas de solution puisque $1 \neq 0$, l'équation $x + 1 = 2x - 2$ en a 1 alors que $x^2 + 4x + 2 = 0$ en a deux.

Sans condition initiale

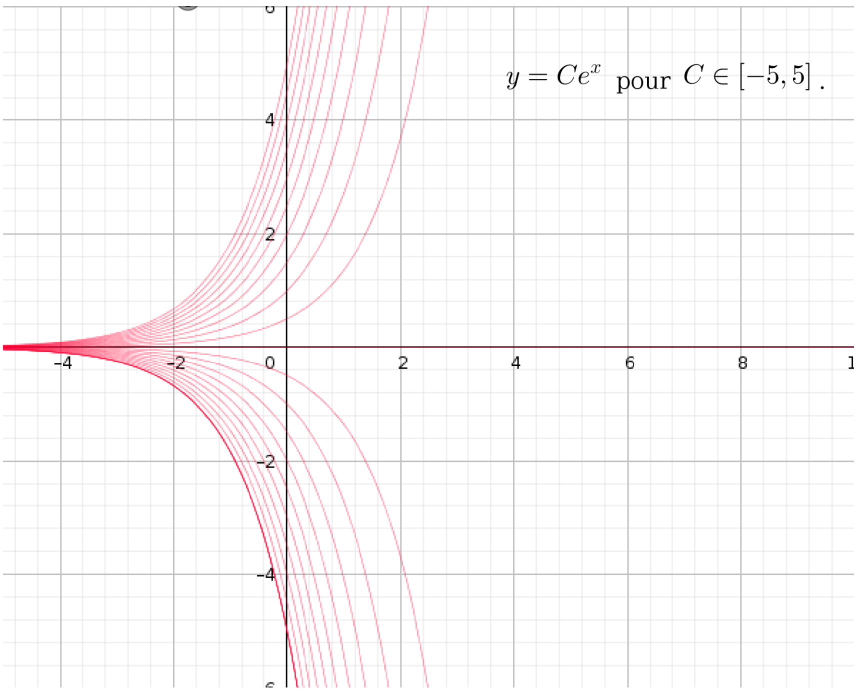
Pour se faire une idée concrète, prenons l'exemple de $y' = y$. La section précédente nous assure que les solutions sont de la forme $y : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & Ce^t \end{array}, \quad C \in \mathbb{R}$

Il y a donc autant de solutions que de constantes C soit une infinité ! Par exemple, vous pouvez verifier que

$$y : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & e^t \end{array}, \quad y : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & -2e^t \end{array}, \quad y : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & 4e^t \end{array}$$

sont autant de solutions de cette équation.

Sur le graphique ci-dessous nous représentons certaines de ces solutions pour des constantes C allant de -5 à 5 par pas de 0.5. Chacune des courbes rouges est une solution de l'équation. On voit notamment que la fonction nulle est la solution correspondant à $C = 0$.



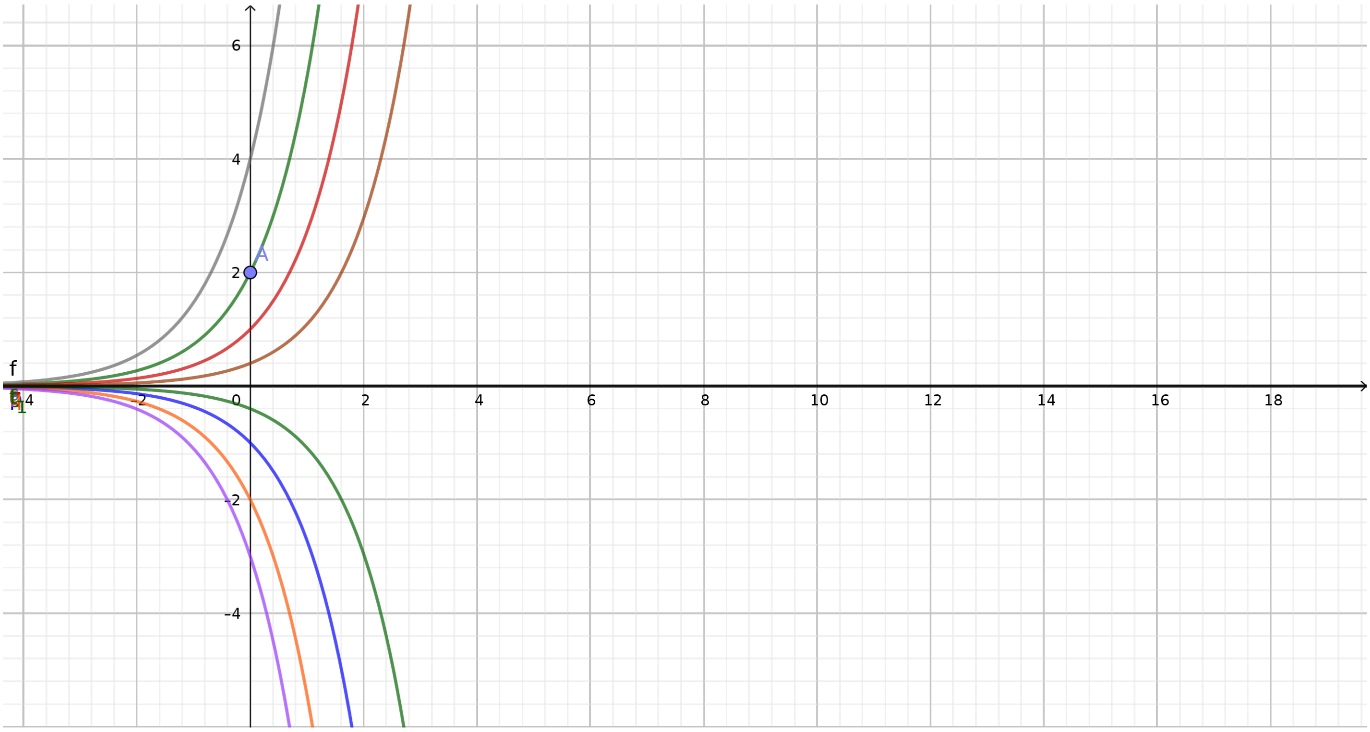
Avec condition initiale

Nous avons vu à la section précédente qu'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 possède une infinité de solution. Cependant, lorsqu'un phénomène physique, biologique est modélisé par une équation différentielle, il s'accompagne nécessairement de conditions initiales. Par exemple, dans le cas de la pression artérielle, au temps $t = 0$ de début de l'expérience, la pression artérielle a une certaine valeur $P(0) = P_0$. Pour comprendre l'évolution de cette pression dans le temps, il faut donc prendre en compte cette pression de départ cad résoudre le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{rcl} P'(t) + \dfrac{P(t)}{RC} & = & \dfrac{Q(t)}{C} \\ P(0) & = & P_0 \end{array} \right.$$

Comprendre graphiquement qu'il n'y a qu'une solution si on ajoute une condition initiale :

Reprenons l'exemple du paragraphe précédent, nous avons vu qu'il existe une infinité de solutions à $y' = y$. Ajoutons une condition initiale, par exemple $y(0) = 2$. Comme vous le voyez sur le dessin, cela revient à fixer un point de passage sur l'axe des ordonnées : une seule des courbes solutions satisfait cette condition, c'est celle qui passe par le point A qui est $y : x \mapsto 2\exp(x)$.



Proposition 7:

Soit $y' - a(t)y = 0$ une équation différentielle linéaire homogène où a est une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit A une primitive de a. Alors le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' - a(t)y & = & 0 \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array} \right.$$

admet une unique solution.

Preuve :

- Rappeler quelles sont les solutions de $y' - a(t)y = 0$.
- Déterminez la solution du système en ajoutant la condition $y(t_0) = y_0$.

- Les solutions sont de la forme $y : t \mapsto Ce^{A(t)}$ où C est une constante réelle.
- Ajoutons la condition $y(t_0) = y_0$. On sait que $y_0 = y(t_0) = Ce^{A(t_0)}$ donc $C = y_0 e^{-A(t_0)}$.

Donc $y : t \mapsto y_0 e^{-A(t_0)} e^{A(t)} = y_0 e^{A(t) - A(t_0)}$.

Remarque 13: La vidéo associée

Il est temps de consulter la vidéo : *SF74, 75 Savoir trouver une solution vérifiant une condition initiale donnée à l'ordre 1,2.*

Questions :

- Dessinez les solutions de $y' = 2y$ pour les conditions initiales $y(0) = -1$, $y(0) = 3$ et $y(0) = 0$.
- Faire le 5 de l'exercice 1424 avec la condition initiale.
- Faites une feuille blanche pour vous remémorer les définitions/propositions/théorèmes du chapitre jusqu'ici. Ou alors défiez un de vos camarades pour restituer plusieurs définitions/propositions/-théorèmes de la partie.

11.3 Résolution des équations avec second membre

11.3.1 Retour à la motivation

La modélisation de la pression artérielle dans une artère nous a mené à la résolution du système suivant

$$\begin{cases} P'(t) + \dfrac{P(t)}{RC} & = & \dfrac{Q(t)}{C} \\ P(0) & = & P_0 \end{cases}$$

Ce système possède un second membre $\dfrac{Q(t)}{C}$ à prendre en compte dans la résolution de l'équation. Le paragraphe nous donne les clés de résolution quand le second membre est nul. L'objectif de ce qui suit est d'effectuer la résolution lorsque le second membre n'est pas nul.

11.3.2 Se ramener au cas homogène

Nous cherchons donc maintenant à résoudre les équations de la forme $y' - a(t)y = b(t)$. Nous avons déjà étudié le cas $b = 0$. L'idée pour résoudre ces équations plus générales est de trouver un moyen de se ramener au cas $b = 0$, cas qu'on sait résoudre. C'est tout l'objet de la proposition suivante.

Proposition 8: Se ramener au cas homogène

Soit $(E) : y' - a(t)y = b(t)$ une équation différentielle linéaire non homogène où a et b sont deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit y_P une solution de (E) alors y est solution de (E) si et seulement si $y - y_P$ est une solution de l'équation homogène $y' - a(t)y = 0$.

Preuve pour ceux qui veulent aller plus loin:

Commençons par prouver le sens $\Longrightarrow$:

- Ecrire les hypothèses et leur traduction.
- Ecrire le but et leur traduction.
- Justifiez tous les points numérotés ci-dessous.
- Enfin faites la preuve de $\boxed{\Longleftarrow}$ en vous inspirant de ce qu'on fait ci-dessous.

- La preuve marche-t-elle si on remplace (E) par $y' - a(t)y^2 = b(t)$ (si l'équation n'est plus linéaire) ?

$\boxed{\Longrightarrow}$ Si y est solution de (E) $\underset{(1)}{alors}$ $y' - a(t)y = b(t)$.

$\underset{(2)}{Or}$ $y_P' - a(t)y_P = b(t)$.

Donc $(y - y_P)' \underset{(3)}{=} y' - y_P' \underset{(4)}{=} a(t)y + b(t) - a(t)y_P - b(t) \underset{(5)}{=} a(t)(y - y_P)$.

$\underset{(6)}{Donc}$ $y - y_P$ est une solution de l'équation homogène $y' - a(t)y = 0$.

- Hypothèses : y_P et y sont solutions de (E).
- Traduction : $y' - a(t)y = b(t)$ et $y_P' - a(t)y_P = b(t)$
- But : $y - y_P$ est une solution de l'équation homogène $y' - a(t)y = 0$.
- Traduction : $(y - y_P)' - a(t)(y - y_P) = 0$

(1) : c'est la traduction de y est solution de (E).
(2) : c'est la traduction de y_P est solution de (E).
(3) : par linéarité de la dérivation.
(4) : on remplace les dérivées puisque y et y_P vérifient les équations.
(5) : on factorise.
(6) : c'est la traduction de $y - y_P$ est une solution de l'équation homogène.

$\boxed{\Longleftarrow}$
Si $y - y_P$ est une solution de l'équation homogène $y' - a(t)y = 0$ alors $(y - y_P)' = a(t)(y - y_P)$.
Autrement dit $y' - y_P' = a(t)y - a(t)y_P$.
Or y_P est solution de (E) donc $y_P' - a(t)y_P = b(t)$. En remplaçant dans ce qui précède et en simplifiant, $y' - a(t)y = b(t)$.
Donc y est une solution de l'équation homogène (E).

La preuve échoue avec $y' - a(t)y^2 = b(t)$ à cause du carré : en effet, le problème va venir du fait que $(y - y_P)^2$ contient le terme $-2yy_P$.

Remarque 14: Que signifie concrètement cette proposition ?

Cette proposition est remarquable car voici ce qu'elle nous dit : imaginez qu'on trouve l'expression d'UNE seule solution y_P de $y' - a(t)y = b(t)$, alors toute autre solution y vérifiera que $y - y_P$ est solution homogène. Comme on connaît toutes les solutions homogènes, on aura alors l'expression de $y - y_P$. Et comme on connaît y_P, on aura automatiquement y et ainsi toutes les solutions !

Corollaire 1:

Soit $(E) : y' - a(t)y = b(t)$ une équation différentielle linéaire homogène où a et b sont deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Toute solution y de (E) peut se décomposer en la somme d'une solution homogène y_H et d'une solution particulière y_P :

$$y = y_H + y_P.$$

Preuve :

Soit y_P une solution, alors d'après la proposition précédente toute autre solution y vérifie que $y - y_P$ est solution de l'équation homogène. Donc en posant $y_H = y - y_P$, on a bien $y = y_H + y_P$.

Remarque 15: Méthodologie pour résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1

Le corollaire nous donne ainsi une méthode pour résoudre n'importe quelle équation différentielle linéaire d'ordre 1.

- Trouver les solutions homogènes y_H (fait précédemment).
- Trouver UNE solution particulière y_P.
- Les additionner pour former les solutions générales : $y = y_H + y_P$.

Les deux derniers points sont l'objet des deux paragraphes qui suivent.

Questions :

- Trouver une solution particulière y_P quand le second membre est nul. Pourquoi pouvait-on s'attendre à cette solution particulière ?

La solution nulle est une solution évidente si le second membre est nul. Cela signifie que $y = y_H$ ce qui est normal puisque le second membre est nul et qu'on résout donc une équation homogène.

11.3.3 Recherche de solutions particulières

L'objectif de ce paragraphe est de donner des méthodes pour trouver UNE solution particulière y_P à une équation avec second membre. Pour cela, nous vous donnons deux méthodes : la première est une méthode générale qui marche quel que soit le second membre (méthode de variation de la constante), la seconde est spécifique à certains cas (mimer le second membre).

Pourquoi proposer une seconde méthode si la variation de la constante marche toujours ?

Il se trouve que pour certains second membres, la seconde méthode est plus aisée en termes de calculs, c'est pourquoi on vous la présente.

Méthode de variation de la constante

Remarque 16: La vidéo associée

Il est temps de consulter la vidéo : *SF69 SF1198 Savoir trouver des solutions particulières simples (3/3).*

Questions :

- Déterminer UNE solution particulière de l'équation 2 de l'exercice 84.

Mimer le second membre

Remarque 17: La vidéo associée

Il est temps de consulter les vidéos : *SF69 SF1198 Savoir trouver des solutions particulières simples (1/3) et (2/3).*

Questions :

- Déterminer UNE solution particulière des équations 4 et 5 de l'exercice 84.

11.3.4 Déduire les solutions générales

Ce paragraphe met un point final à l'étude complète d'une équa diff linéaire d'ordre 1. Il vous explique comment déterminer les solutions de l'équation, une fois les solutions homogènes et la solution particulière trouvée.

Remarque 18: La vidéo associée

Il est temps de consulter la vidéo : *SF215 Trouver la solution générale d'une edo linéaire d'ordre 1 ou 2 avec second membre.*

Questions :

- Finir les 2, 4 et 5 de l'exercice 84.

11.3.5 Conditions initiales

La démarche suivant dans la section 11.2.2 est tout aussi valable pour les équations avec second membre.

Questions :

- Faites une feuille blanche pour vous remémorer les définitions/propositions/théorèmes du chapitre jusqu'ici. Ou alors défiez un de vos camarades pour restituer plusieurs définitions/propositions/-théorèmes de la partie.
- Attaquez-vous maintenant aux problèmes liant les savoir faire. Si vous bloquez trop, retournez vers les exos de savoir faire.

Exercices de l'AAV 11

11.4 Travailler les savoir-faire

Exercice 30 *QCM-605*

Savoir faire

- SF69 : Savoir trouver des solutions particulières simples pour une équation avec second membre pour une ED d'ordre 1

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 37 du cours *Résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1 dans un contexte quelconque.* ?

Qui est solution particulière de $y' - y = e^{2x}$?

- ☐ $y(x) = -e^{2x}$
- ☐ $y(x) = e^{2x}$
- ☐ $y(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$
- ☐ $y(x) = 2e^{2x}$

Exercice 31

Savoir faire

- SF96 : Savoir reconnaitre les propriétés d'une ED (linéarité, ordre...)

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 37 du cours *Résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1 dans un contexte quelconque.* ?

Dites si les équations différentielles suivantes sont linéaires, homogènes :

1. $y' - 2y = 0$
2. $y' - 3y^2 = 0$
3. $y' - \sin(y) = -12$
4. $y' - \sin(x^2)y = \cos(x)$
5. $(y')^2 + 12 = 15y$
6. $y' - 12 = \dfrac{y}{1 + x^2}$

Exercice 32 *reconnaitre les proprietes d'une ED*

Savoir faire

- SF96 : Savoir reconnaitre les propriétés d'une ED (linéarité, ordre...)

Voici une liste d'équations différentielles. Pour chacune d'entre elles, donner son ordre puis dire si elle est linéaire. Si c'est le cas, dire si elle est homogène et/ou à coefficients constants.

a) $y' + 2y = 2$
b) $y''' + 2xy'' + 3y = 0$
c) $y' = \cos(y)$
d) $y' + \sqrt{1 + x^2}y = 3x + 2$
e) $2xy^{(4)} + 3x^2y'' + 4y' = 5xy$
f) $(1 + y')^2y = 0$
g) $2x^2y'' + 4y' + 2x = 0$

Exercice 33 *QCM-608*

Savoir faire

- SF74 : Savoir trouver une solution vérifiant une condition initiale donnée à l'ordre 1

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 38 du cours *Résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1 dans un contexte quelconque.* ?

Combien de solutions possède l'équation différentielle $y' - 5y = 2$ avec condition initiale $y(0) = 1$?

☐ Une.
☐ Deux.
☐ Aucune.
☐ Une infinité.

Exercice 34

Savoir faire

- SF67 : Savoir résoudre une équa diff linéaire d'ordre 1 à coeffs constants
- SF74 : Savoir trouver une solution vérifiant une condition initiale donnée à l'ordre 1
- SF214 : Savoir résoudre une équa diff linéaire homogène d'ordre 1 à coeffs variables

Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y' - 5y = 0$.
2. $y' = xy$
3. $y' = e^x y$
4. $y' + \tan(x)y = 0$
5. $y' + \dfrac{x}{1 + x^2}y = 0$
6. $y' + \dfrac{x}{e^x}y = 0$

Trouver maintenant les solutions des équations de l'exercice 1 pour la condition initiale $y(0) = 1$.

Exercice 35

Savoir faire

- SF67 : Savoir résoudre une équa diff linéaire d'ordre 1 à coeffs constants
- SF74 : Savoir trouver une solution vérifiant une condition initiale donnée à l'ordre 1

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 38.1 du cours *Résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1 dans un contexte quelconque.* ?

Déterminer toutes les fonctions qui sont égales à leur propre dérivée. Déterminer parmi ces fonctions, celles qui valent 1 en $x = 0$.

Exercice 36

Savoir faire

- SF214 : Savoir résoudre une équa diff linéaire homogène d'ordre 1 à coeffs variables

Résoudre l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 suivante (supposant $x \neq -1$),

$$y'(x) - \frac{x}{x + 1}y(x) = 0 \; . \tag{11.0}$$

[Indication : prendre la solution de cette équation différentielle homogène de la forme $y_h(x) = C\, e^{ax}\, (1+x)^b$.]

Exercice 37 *Equa diffs d'ordre 1 a coeff constants*
Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 39 du cours *Résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1 dans un contexte quelconque.* ?

Savoir faire

- SF67 : Savoir résoudre une équa diff linéaire d'ordre 1 à coeffs constants
- SF69 : Savoir trouver des solutions particulières simples pour une équation avec second membre pour une ED d'ordre 1

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + 2y = 0$
2. $2y' - 4y = 1$
3. $3y' + 2y = 4$
4. $5y' + 2y = -4$
5. $y' - 4y = \dfrac{1}{2}$

Exercice 38

Savoir faire

- SF214 : Savoir résoudre une équa diff linéaire homogène d'ordre 1 à coeffs variables

Résoudre l'équation différentielle linéaire non homogène d'ordre 1 suivante (supposant $x \neq 0$),

$$y'(x) - \frac{y(x)}{x} = x\ . \tag{11.0}$$

[Indication : prendre la solution à l'équation différentielle homogène de la forme $y_h(x) = C\, x^n$ et de même la solution particulière à l'équation différentielle non homogène de la forme $y_p(x) = D\, x^N$.]

Exercice 39 *Equa diffs d'ordre 1 avec second membre*

Savoir faire

- SF67 : Savoir résoudre une équa diff linéaire d'ordre 1 à coeffs constants
- SF69 : Savoir trouver des solutions particulières simples pour une équation avec second membre pour une ED d'ordre 1

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 39 du cours *Résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1 dans un contexte quelconque.* ?

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' - 2y = e^x$
2. $y' + 2y = e^{-2x}$
3. $y' - 5y = 2x + 1$
4. $y' - y = 2\cos(x) + \sin(2x)$
5. $2y' - y = x^2$
6. $y'' - 2y' = 1$

Exercice 40

Savoir faire

- SF67 : Savoir résoudre une équa diff linéaire d'ordre 1 à coeffs constants
- SF69 : Savoir trouver des solutions particulières simples pour une équation avec second membre pour une ED d'ordre 1
- SF215 : Trouver la solution générale d'une edo linéaire d'ordre 1 ou 2 avec second membre

Soit l'équation différentielle linéaire et homogène,

$$a\,k(x) + b\,\frac{dk(x)}{dx} = 0\ ,$$

où a et b sont des constantes données non nulles.

1. Résoudre cette équation différentielle par la méthode générique.
2. Vérifier que la solution obtenue $k_0(x)$ est bien solution de l'équation considérée.
3. Résoudre l'équation différentielle initiale d'une manière plus directe.
4. En déduire une solution de l'équation différentielle non homogène, $a\,k(x) + b\,\dfrac{dk(x)}{dx} = d$, où d est une constante.

Exercice 41

Savoir faire

- SF67 : Savoir résoudre une équa diff linéaire d'ordre 1 à coeffs constants
- SF69 : Savoir trouver des solutions particulières simples pour une équation avec second membre pour une ED d'ordre 1
- SF214 : Savoir résoudre une équa diff linéaire homogène d'ordre 1 à coeffs variables
- SF215 : Trouver la solution générale d'une edo linéaire d'ordre 1 ou 2 avec second membre

11.5 Exercices de niveau Avancé et Expert

Exercice 42 *Niveau 4*

1. Lorsqu'on cherche une solution particulière de $y' - ay = e^{bx}$, on cherche en général la solution sous la forme $y_P : x \mapsto Ce^{bx}$. Cela ne fonctionne cependant pas si $b = a$. Sauriez-vous expliquer pourquoi ?
2. Proposez une autre solution particulière pour cette équation lorsque $a = b$.

Exercice 43 *Niveau 4*
Résoudre les trois équations

$$y' - 4y = xe^{4x}, \quad y' - 4y = \sin(2x), \quad y' - 4y = x^2$$

de deux manières différentes :

1. en utilisant la méthode de variation de la constante.
2. en mimant le second membre.

Discutez ensuite de la méthode qui vous parait la plus appropriée dans chacun des cas et expliquez pourquoi.

Exercice 44 *Niveau 5*
On considère l'équation différentielle $y' = y^2$.

1. Pouvez-vous trouver une ou des solutions évidentes ?
2. Que pouvez-vous dire de la monotonie des solutions ?
3. En divisant par y^2, déterminer toutes les solutions à cette équation et dessinez en plusieurs.

Exercice 45 *Niveau 4*Chercher des fonctions dont le graphe de la dérivée et le graphe de la fonction se confondent.

Chapitre 12

AAV 12 : Résoudre une équation différentielle d'ordre 2

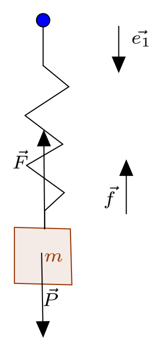
Liste des Savoir-Faire du chapitre :

- ☐ SF 68 : Savoir résoudre une équa diff linéaire homogène d'ordre 2 à coeffs constants
- ☐ SF 75 : Savoir trouver une solution vérifiant une condition initiale donnée à l'ordre 2 (système à résoudre)
- ☐ SF 1198 : Savoir trouver des solutions particulières simples pour une edo linéaire d'ordre 2 à coefficients constants avec second membre simple (polynôme, cos, sin, exp)
- ☐ SF 215 : Trouver la solution générale d'une edo linéaire d'ordre 1 ou 2 avec second membre

12.1 Motivation, objet

12.1.1 Introduction

Imaginons une masse accrochée à un ressort lui-même accroché à un plafond. Imaginons que les seules forces s'exerçant sur le ressort et le poids et la force de rappel du ressort. Notons $z(t)$ la position de la masse en fonction du temps t. La masse m est donc soumise au poids $\vec{P} = mg\vec{e_1}$, à la force de rappel du ressort $\vec{F}(t) = -kz(t)\vec{e_1}$ $(k > 0)$.



Le principe fondamental de la dynamique donne que la somme des forces est égal à la masse fois l'accélération

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F}.$$

Comme l'accélération est la dérivée en temps de la vitesse et que la vitesse est la dérivée en temps de la position alors $\vec{a} = z''(t)\vec{e_1}$. On étudie la composante selon $\vec{e_1}$:

$$mz''(t) = mg - kz(t)$$

En divisant par m, on obtient

$$z''(t) + \frac{k}{m}z(t) = g.$$

La position $z(t)$, qui dépend du temps t, est donc soumise à une équation différentielle du second ordre. C'est ce type d'équation que nous étudions dans le chapitre.

12.1.2 Description de l'objet

Dans ce chapitre, nous intéressons à des équations de la forme

$$y'' + ay' + by = f(t)$$

où a, b, c sont des réels, f est une fonction. Ces équations sont dites :

- linéaires : de par leur forme $y'' + a(t)y' + b(t)y$.
- à coefficients constants car les coefficients devant y, y', y'' sont des réels.
- d'ordre 2 : car la dérivée maximale est la dérivée seconde y''.
- homogène si f est nulle, non homogène sinon.

12.1.3 Solution

De manière similaire à l'ordre 1, une fonction est dite solution de l'équation si elle la vérifie. Autrement dit, en pratique, une fonction est solution lorsque quand on l'injecte dans l'équation, l'égalité est vérifiée.

Questions :

- Démontrer que $f : t \mapsto e^{3t}$ et $g : t \mapsto e^t$ sont solutions de $y'' - 4y' + 3y = 0$.
- Faites une feuille blanche pour vous remémorer les définitions/propositions/théorèmes du chapitre jusqu'ici. Ou alors défiez un de vos camarades pour restituer plusieurs définitions/propositions/-théorèmes de la partie.

Ces deux fonctions sont bien dérivables et pour t dans $\mathbb{R}$, $f''(t) - 4f'(t) + 3f(t) = 9e^{3t} - 4\times 3e^{3t} + 3e^{3t} = 0$ et $g''(t) - 4g'(t) + 3g(t) = e^t - 4e^t + 3e^t = 0$.
Donc $f : t \mapsto e^{3t}$ et $g : t \mapsto e^t$ sont solutions de $y'' - 4y' + 3y = 0$.

12.2 Résolution des équations homogènes

Nous souhaitons dans cette partie déterminer toutes les solutions d'équations de la forme

$$y'' + ay' + by = 0$$

où a, b sont deux réels.

12.2.1 S'inspirer de l'ordre 1

En mathématiques, lorsqu'on fait face à un problème nouveau, il est commun de se baser sur ce qu'on connaît pour essayer de le résoudre.

Nous savons résoudre $y' - ay = 0$ pour a réel (et même pour a variable). Nous avons d'ailleurs vu que les solutions sont les fonctions de la forme $y : x \mapsto Ce^{ax}$ pour $C \in \mathbb{R}$ et que ce sont les seules.

Il est à noter que la forme $y'' + ay' + by = 0$ est assez similaire. Pourquoi alors ne pas imaginer que cette équation puisse aussi avoir des solutions sous la forme $y : x \mapsto e^{rx}$ avec r un réel à trouver ?

Questions :

- Supposons que $y : x \mapsto e^{rx}$ soit solution de $y'' + ay' + by = 0$, injectez-là et déterminez alors une équation du second degré que doit vérifier r.
- Exemple : Déterminer alors deux solutions pour le cas $a = -5$, $b = 6$.

- Pour t dans $\mathbb{R}$, $y''(t) + ay'(t) + by(t) = r^2e^{rt} + ar \times e^{rt} + be^{rt} = (r^2 + ar + b)e^{rt} = 0$. Comme e^{rt} ne peut être nul, ceci est équivalent à $r^2 + ar + b = 0$.
- Dans ce cas, on a $r^2 - 5r + 6 = 0$ dont les solutions sont $r = 2$ et $r = 3$. Donc on a deux solutions de l'équation $y_1 : t \mapsto e^{2t}$ et $y_2 : t \mapsto e^{3t}$.

12.2.2 Résolution

La proposition qui suit donne les solutions des équations du type $y'' + ay' + by = 0$ ainsi que la méthodologie pour les trouver. Cette proposition est très importante pour la physique où ce type d'équation intervient. Les questions auxquelles vous avez répondues au paragraphe précédent permettent de commencer à comprendre la forme des solutions dans un cas particulier ($\Delta > 0$ dans la proposition ci-dessous). En revanche, elles ne permettent pas de tout comprendre, une bonne partie demandant un bagage de L3. Il vous faudra donc pour cette fois accepter de ne pas tout comprendre et apprendre les solutions.

Théorème 4: Coefficients constants dans $\mathbb{R}$ (admis)

Soit $(E_H) : y'' + ay' + by = 0$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ d'équation caractéristique $(E_c) : r^2 + ar + b = 0$. Notons Δ le discriminant de (E_c).

1. Soit $\Delta > 0$, notons r_1, r_2 les deux racines réelles distinctes de (E_c) alors les solutions de E_H sont les fonctions de la forme
$$y \; : \; \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \end{array} \;, \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$
2. Soit $\Delta = 0$, notons r_0 la racine double de (E_c), alors les solutions de E_H sont les fonctions de la forme
$$y \; : \; \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (At + B)e^{r_0 t} \end{array} \;, \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$
3. Soit $\Delta < 0$, notons $r_1 = \lambda + i\omega, r_2 = \lambda - i\omega$ les deux racines complexes conjuguées de (E_c) alors les solutions de E_H sont les fonctions de la forme
$$y \; : \; \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & A\cos(\omega t)e^{\lambda t} + B\sin(\omega t)e^{\lambda t} \end{array} \;, \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

Cette proposition contient la méthodologie pour résoudre en pratique une équation de ce type.

Remarque 19: La vidéo associée

Il est temps de consulter la vidéo : *SF 68 Savoir résoudre une équa diff linéaire homogène d'ordre 2 à coeffs constants.*

Questions :

- Faire l'exercice 69 page 64 sans condition initiale.
- Reprenons l'exemple du ressort. Quelles sont les solutions homogènes de l'équation ?

C'est équation d'ordre 2 à coefficients constants. L'équation caractéristique est

$$r^2 + \frac{k}{m} = 0$$

et son discriminant est $\frac{-4k}{m}$. Donc les racines sont

$$\pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Donc les solutions homogènes sont de la forme

$$z : t \mapsto A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

où A et B sont deux constantes réelles et $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

12.2.3 Nombre de solutions

Sans condition initiale

Comme pour l'ordre 1, il y a une infinité de solutions.

- A l'ordre 1, les solutions de $y' - ay = 0$ pour a réel étaient de la forme $y : t \mapsto Ce^{at}$ avec C réel. Il y avait donc UNE constante pour l'ordre 1.
- A l'ordre 2, il y en a 2 qui sont les A et B de la proposition.

Avec condition initiale

A l'ordre 1, pour fixer la constante, nous avions eu besoin d'une condition initiale. Comme il y a deux constantes à l'ordre 2, nous aurons donc besoin de deux conditions initiales.

Ceci se comprend assez bien à l'aide de l'exemple introductif du ressort. Lorsqu'on tire sur la masse au départ, le ressort va se mettre à osciller. Tirer sur la masse revient à choisir une position initiale $z(0)$ et une vitesse initiale $z'(0)$ pour le ressort. Cela revient à fixer les deux conditions initiales.

Remarque 20: La vidéo associée

Il est temps de consulter la vidéo : *SF74, 75 Savoir trouver une solution vérifiant une condition initiale donnée à l'ordre 1,2.*

Questions :

- Reprendre l'exercice 69 page 64 en ajoutant les conditions initiales.
- Faites une feuille blanche pour vous remémorer les définitions/propositions/théorèmes du chapitre jusqu'ici. Ou alors défiez un de vos camarades pour restituer plusieurs définitions/propositions/-théorèmes de la partie.

12.3 Résolution des équations avec second membre

12.3.1 Se ramener au cas homogène

Cette section est exactement analogue à celle du chapitre sur l'ordre 1. La structure linéaire de l'équation induit que les résultats sont les mêmes. Essentiellement, pour résoudre l'équation avec second membre, on va, comme pour l'ordre 1, additionner les solutions homogènes avec une solution particulière.

Proposition 9: Se ramener au cas homogène

Soit $(E) : y'' + ay' + by = f(t)$ une équation différentielle linéaire non homogène où a et b sont deux réels et f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit y_P une solution de (E) alors y est solution de (E) si et seulement si $y - y_P$ est une solution de l'équation homogène $y'' + ay' + by = 0$.

Preuve pour ceux qui veulent aller plus loin:

- Ecrire les hypothèses et leur traduction.
- Ecrire le but et leur traduction.
- Justifiez tous les points numérotés ci-dessous.
- Enfin faites la preuve de $\boxed{\Longleftarrow}$ en vous inspirant de ce qu'on fait ci-dessous.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Si y est solution de (E) $\underset{(1)}{alors}$ $y'' + ay' + by = f(t)$.

$\underset{(2)}{Or}$ $y_P'' + ay_P' + by_P = f(t)$.

Donc $(y - y_P)'' \underset{(3)}{=} y'' - y_P'' \underset{(4)}{=} -ay' - by + f(t) + ay_P' + by_P - f(t) \underset{(5)}{=} -a(y - y_P)' - b(y - y_P)$.

$\underset{(6)}{Donc}$ $y - y_P$ est une solution de l'équation homogène $y'' + ay' + by = 0$.

- Hypothèses : y_P, y sont solutions de (E).
- Traduction : $y_P'' + ay_P' + by_P = f(t)$ et $y'' + ay' + by = f(t)$.
- But : $y - y_P$ est une solution de l'équation homogène.
- Traduction : $(y - y_P)'' + a(y - y_P)' + b(y - y_P) = 0$.

(1) : c'est la traduction de y est solution de (E).
(2) : c'est la traduction de y_P est solution de (E).
(3) : par linéarité de la dérivation.
(4) : on remplace les dérivées puisque y et y_P vérifient les équations.
(5) : on factorise.
(6) : c'est la traduction de $y - y_P$ est une solution de l'équation homogène.

Corollaire 2:

Soit $(E) : y'' + ay' + by = f(t)$ une équation différentielle linéaire homogène où a et b sont deux réels et f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Toute solution y de (E) peut se décomposer en la somme d'une solution homogène y_H et d'une solution particulière y_P :

$$y = y_H + y_P.$$

Preuve :

Soit y_P une solution, alors d'après la proposition précédente toute autre solution y vérifie que $y - y_P$ est solution de l'équation homogène. Donc en posant $y_H = y - y_P$, on a bien $y = y_H + y_P$.

Remarque 21: Méthodologie pour résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 2

Le corollaire nous donne ainsi une méthode pour résoudre n'importe quelle équation différentielle linéaire d'ordre 1.

- Trouver les solutions homogènes y_H (fait précédemment).
- Trouver UNE solution particulière y_P.
- Les additionner pour former les solutions générales : $y = y_H + y_P$.

Les deux derniers points sont l'objet des deux paragraphes qui suivent.

12.3.2 Recherche de solutions particulières

Remarque 22: La vidéo associée

Afin de déterminer une solution particulière, la méthode présentée dans les vidéos suivantes pour l'ordre 1 reste valable à l'ordre 2 : *SF69 SF1198 Savoir trouver des solutions particulières simples (1/3) et (2/3)*

Questions :

- Faire deux équations de l'exercice 68 page 64.
- Trouver une solution particulière à l'équation du ressort et en déduire les solutions générales.

Le second membre est une constante donc un polynôme d'ordre 0 : on cherche donc une solution particulière sous la forme d'une constante $z(t) = C$. En remplaçant dans l'équation on obtient que

$$\frac{k}{m}C = g.$$

Ainsi $z(t) = \frac{mg}{k}$ est solution.

Les solutions générales sont données par les solutions homogènes plus une solution particulière. Donc les solutions générales sont de la forme

$$z : t \mapsto A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) + \frac{mg}{k}$$

où A et B sont deux constantes réelles et $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

12.3.3 Conditions initiales

Pour les conditions initiales, c'est à nouveau similaire à ce qui est fait dans le cas homogène sauf qu'il faut l'appliquer aux solutions générales de l'équation avec second membre. **Attention :** une erreur classique est d'appliquer les conditions initiales aux solutions homogènes. Il faut bien comprendre que dans ce cas, vous ne résolvez pas l'équation avec second membre mais seulement l'équation homogène.

Autrement dit, si on vous demande de résoudre

$$\left\{\begin{array}{rcl} y'' - 4y' + 3y & = & f(t) \\ y(0) & = & 1 \\ y'(0) & = & 0 \end{array}\right.$$

les solutions de $y'' - 4y' + 3y = f(t)$ sont de la forme $y(t) = Ae^t + Be^{3t} + y_P(t)$ où A, B sont des réels et y_P une solution particulière. C'est donc à toute cette expression qu'il faut appliquer les conditions initiales. Si vous les appliquez à $Ae^t + Be^{3t}$ c'est comme si vous résolviez

$$\left\{\begin{array}{rcl} y'' - 4y' + 3y & = & 0 \\ y(0) & = & 1 \\ y'(0) & = & 0 \end{array}\right.$$

ce qui n'est pas la même chose.

Remarque 23: La vidéo associée

Si vous n'êtes pas au clair avec les conditions initiales, consultez à nouveau la vidéo : *SF74, 75 Savoir trouver une solution vérifiant une condition initiale donnée à l'ordre 1,2.*

Questions :

- Faire la question 2 de l'exercice 54 page 55.
- Revenons au ressort : on se donne maintenant une position et une vitesse initiale $z(0) = 0$, $z'(0) = 1$. Déterminer les solutions associées à ces conditions initiales. Combien y en a-t-il ?

z est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad z'(t) = -\omega A \sin(\omega t) + \omega B \cos(\omega t)$$

Donc

$$z(0) = A + \frac{mg}{k}, \quad z'(0) = B\omega.$$

Donc si $z(0) = 0$, $z'(0) = 1$ alors

$$A = -\frac{mg}{k}$$

et

$$B = \frac{1}{\omega}.$$

Donc il y a une unique solution vérifiant ces conditions initiales et elle est obtenue en remplaçant A et B par les valeurs ci dessus dans l'expression des solutions générales.

- Faites une feuille blanche pour vous remémorer les définitions/propositions/théorèmes du chapitre jusqu'ici. Ou alors défiez un de vos camarades pour restituer plusieurs définitions/propositions/-théorèmes de la partie.
- Attaquez-vous maintenant aux attendus pour l'évaluation de l'AAV. Si vous bloquez trop, retournez vers les exos de savoir faire.

Exercices de l'AAV 12

12.4 Travailler les savoir-faire

Exercice 46 *reconnaitre les proprietes d'une ED*

Savoir faire

- SF96 : Savoir reconnaitre les propriétés d'une ED (linéarité, ordre...)

Voici une liste d'équations différentielles. Pour chacune d'entre elles, donner son ordre puis dire si elle est linéaire. Si c'est le cas, dire si elle est homogène et/ou à coefficients constants.

a) $y' + 2y = 2$
b) $y''' + 2xy'' + 3y = 0$
c) $y' = \cos(y)$
d) $y' + \sqrt{1+x^2}y = 3x + 2$
e) $2xy^{(4)} + 3x^2y'' + 4y' = 5xy$
f) $(1+y')^2y = 0$
g) $2x^2y'' + 4y' + 2x = 0$

Exercice 47 *QCM-609*

Savoir faire

- SF68 : Savoir résoudre une équa diff linéaire d'ordre 2 à coeffs constants

Quelles sont les solutions de l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 0$?

☐ $y(x) = A\cos(2x)e^{-x} + B\sin 2xe^{-x}$, $A, B \in \mathbb{R}$
☐ $y(x) = Ae^x + Bxe^x$, $A, B \in \mathbb{R}$
☐ $y(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$, $A, B \in \mathbb{R}$
☐ $y(x) = Ae^x + Be^{-x}$, $A, B \in \mathbb{R}$

Exercice 48 *QCM-611*

Savoir faire

- SF68 : Savoir résoudre une équa diff linéaire d'ordre 2 à coeffs constants

Combien de solutions possède l'équation différentielle $y'' + 6y' - 5y = 0$?

☐ Une infinité.
☐ Deux.
☐ Aucune.
☐ Une.

Exercice 49

Savoir faire

- SF68 : Savoir résoudre une équa diff linéaire d'ordre 2 à coeffs constants

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 41 du cours *Résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 2 dans un contexte quelconque.* ?

Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y'' - 10y' + 25y = 0$.
2. $y'' - y' - 6y = 0$.
3. $y'' + y' + y = 0$.

Exercice 50 *QCM-612*

Savoir faire

- SF68 : Savoir résoudre une équa diff linéaire d'ordre 2 à coeffs constants

Combien de solutions possède l'équation différentielle $y'' + 6y' - 5y = 0, y(0) = 1$?

☐ Une infinité.
☐ Deux.
☐ Aucune.
☐ Une.

Exercice 51 *QCM-613*

Savoir faire

- SF68 : Savoir résoudre une équa diff linéaire d'ordre 2 à coeffs constants

Combien de solutions possède l'équation différentielle $y'' + 6y' - 5y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 2$?

☐ Une infinité.
☐ Deux.
☐ Aucune.
☐ Une.

Exercice 52

Savoir faire

- SF68 : Savoir résoudre une équa diff linéaire d'ordre 2 à coeffs constants

1. Donner toutes les solutions réelles de l'équation différentielle
$$y''(t) - 5y'(t) + 4y(t) = 0\ . \tag{12.1}$$
2. Chercher une solution particulière y_0 de l'équation différentielle
$$y''(t) - 5y'(t) + 4y(t) = e^{2t} \tag{12.2}$$
de la forme $y_0(t) = C\,e^{2t}$.
3. Donner toutes les solutions réelles de l'équation différentielle (**??**).
4. Trouver les solutions de l'équation (**??**) qui vérifient les conditions $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

Exercice 53

Savoir faire

- SF68 : Savoir résoudre une équa diff linéaire d'ordre 2 à coeffs constants
- SF1198 : Savoir trouver des solutions particulières simples pour une équation avec second membre pour une ED d'ordre 2
- SF215 : Trouver la solution générale d'une edo linéaire d'ordre 1 ou 2 avec second membre

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 42 du cours *Résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 2 dans un contexte quelconque.* ?

Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y'' + y' + y = \cos(2t)$
2. $y'' - 4y' + 3y = e^{-2t}$
3. $y'' - 4y' + 3y = e^t$.
4. $y'' - y' + 6y = x^2$.

Exercice 54

Savoir faire

- SF68 : Savoir résoudre une équa diff linéaire d'ordre 2 à coeffs constants
- SF1198 : Savoir trouver des solutions particulières simples pour une équation avec second membre pour une ED d'ordre 2
- SF75 : Savoir trouver une solution vérifiant une condition initiale donnée à l'ordre 2 (système à résoudre)

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 42 du cours *Résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 2 dans un contexte quelconque.* ?

Résoudre les équations différentielles suivantes avec les conditions initiales associées.

1. $y'' - 12y' + 36y = 0$, $y(0) = 1, y'(0) = -1$.
2. $y'' - y' - 6y = \cos(x)$, $y(0) = 2, y'(0) = 0$.
3. $y'' + y' + y = 0$, $y(0) = 1, y'(0) = 1$.

Exercice 55

Savoir faire

- SF68 : Savoir résoudre une équa diff linéaire d'ordre 2 à coeffs constants
- SF215 : Trouver la solution générale d'une edo linéaire d'ordre 1 ou 2 avec second membre
- SF1198 : Savoir trouver des solutions particulières simples pour une équation avec second membre pour une ED d'ordre 2

Résoudre à présent l'équation différentielle non homogène linéaire d'ordre 2,

$$\omega^2\, x(t) + \frac{d^2x(t)}{dt^2} = K\, e^{i\Omega t + \phi} \ ,$$

ω, Ω, K, ϕ étant des constantes telles que $\omega \neq \Omega$. Physiquement, il s'agit de l'équation différentielle généralisée pour un **oscillateur harmonique forcé**. Vérifier que la solution obtenue est correcte.

12.5 Exercices de niveau Avancé et Expert

Exercice 56 *Niveau Expert*
On se donne l'équation $(E) : y'' - 5y' + 6y = 0$. On cherche à trouver ses solutions en s'interdisant toute utilisation de l'équation caractéristique. Soit y une solution de (E).

1. Déterminez r, s tel que $z = y' + ry$ soit solution de l'équation $z' + sz = 0$.
2. En déduire les solutions z de cette équation puis les solutions y de l'équation (E).
3. Reprendre les deux questions précédentes en remplaçant l'équation (E) par $y'' + 4y' + 4y = 0$ puis par $y'' + y' + y = 0$.

Exercice 57 *Niveau Avancé*
Résoudre l'équation différentielle suivante,

$$x^2\, y''(x) - 2x\, y'(x) + (2 - x^2)\, y(x) = 0 \ . \tag{12.2}$$

[Indication : définir la fonction, $z(x) = y(x)/x$.]

Chapitre 13

AAV 13 : Effectuer une étude de fonctions

Liste des SF du chapitre :

- ☐ SF 42 : Savoir identifier les tangentes remarquables (horizontale ou verticale)
- ☐ SF 41 :Savoir faire un tableau de variation à partir de la dérivée (incluant les limites aux bornes)
- ☐ SF 43 : Savoir tracer la courbe à partir du tableau de variation
- ☐ SF 209 : Savoir prouver l'existence d'un antécédent à l'aide d'un tableau de variation

L'essentiel de ce chapitre un peu particulier a déjà été vu dans le reste du cours. Il s'agit d'arriver à mettre ensemble tout ce que nous avons vu sur les fonctions pour que vous arriviez de manière autonome à effectuer une étude de fonctions.
Voici le plan général d'une étude de fonction f, qu'il faut que vous sachiez mettre en oeuvre. Suivant la fonction qu'on étudie, certaines étapes peuvent être sautées (soit parce qu'elles sont évidentes, soit parce qu'elles n'ont pas d'intérêt dans le cas précis).

1. *Domaine de définition* On cherche le domaine de définition de la fonction f. Il peut arriver que celui-ci soit donné dans l'énoncé, mais si on vous donne juste une formule c'est à vous de trouver le domaine de définition.
2. *Parité, périodicité.* On détermine si la fonction est paire ou impaire, puis si elle est périodique (et si c'est le cas on détermine sa période). La plupart du temps c'est assez évident. S'il n'y a rien de tout ça on passe à la suite.
3. *Domaine d'étude* Si la fonction est paire ou impaire, il suffit de l'étudier sur $\mathbb{R}^+$. Si elle est périodique de période T, il suffit de l'étudier sur une période, de la forme $[x, x+T]$, pour x qui nous arrange. Si elle est périodique et paire ou impaire, il suffit de l'étudier sur $[0, T/2]$. Ici il faut comprendre comment on retrouve le graphe de la fonction en général à partir de ces données. Si la fonction n'est ni paire ni impaire ni périodique, on saute cette étape.
4. *Calcul de la dérivée* On calcule la dérivée, et on en étudie le signe.
5. *Tangentes verticales* S'il y a des points où la fonction est définie mais pas sa dérivée, on analyse le comportement local. En général on a une tangente verticale, lorsque la dérivée tend vers l'infini (typiquement pour la fonction $\sqrt{x}$), parfois des demi-tangentes (tangentes à droite et à gauche différentes, comme pour $|x|$).
6. *Sens de variation, tangentes horizontales* Du signe de la dérivée on déduit le sens de variation de la fonction sur des intervalles bien choisis. On note les endroits où la dérivée s'annule, ce sont les points où il y a des tangentes horizontales, et on regarde si ce sont des maximums ou minimums locaux.
7. *Limites au bord du domaine de définition* Si la fonction est définie sur un intervalle $]a, b[$ (où a et b peuvent être réels ou infinis), on étudie la limite de f quand x tend vers a et quand x tend vers b. On fait de même sur chacun des intervalles où f est définie.
8. *Tableau de variation* On récapitule toutes les données ci-dessus dans un tableau.

9. *Graphe* On trace le graphe, de manière cohérente avec tout ce qu'on a vu jusqu'à présent. Il n'est pas nécessaire en général de calculer des valeurs particulières, par contre il est important de bien placer les maximums et minimums locaux, les points où il y a tangente horizontale ou verticale (et dans ce cas on trace la tangente), les asymptotes verticales ou horizontales (suivant les limites que l'on a obtenues).

Remarque 24: La vidéo associée

Voici les deux vidéos du chapitre : *SF44 Etre capable d'enchaîner les étapes d'une étude de fonction sans indication (1) et (2).*

Questions :

- Faites deux questions de l'exercice 60 page 59.
- Attaquez-vous maintenant aux problèmes liant les savoir faire. Si vous bloquez trop, retournez vers les exos de savoir faire.

Exercices de l'AAV 13

13.1 Travailler les savoir-faire

Exercice 58

Savoir faire

- SF23 : Savoir calculer une dérivée d'un produit
- SF24 : Savoir calculer une dérivée d'un quotient
- SF22 : Savoir calculer une dérivée de fonction usuelle
- SF42 : Savoir identifier les tangentes remarquables

Déterminer les tangentes remarquables des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto x(1-x)$.
2. $x \mapsto \sqrt{x}$
3. $x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$

Exercice 59 *étude de fonction et antécédent*

Savoir faire

- SF209 : Savoir prouver l'existence d'un antécédent à l'aide d'un tableau de variation

Faire l'étude de la fonction $x \mapsto \dfrac{x-1}{x+2}$. En déduire l'existence d'un réel x tel que $f(x) = -12$.

Exercice 60 *Etudes de fonctions*

Savoir faire

- SF41 : Savoir faire un tableau de variation à partir de la dérivée
- SF43 : Savoir tracer la courbe à partir du tableau de variation

1. $x \mapsto \dfrac{2}{x-1}$ sur $\mathbb{R} - \{1\}$.
2. $x \mapsto \sqrt{x^2+x+1}$ sur $\mathbb{R}$.
3. $x \mapsto \dfrac{2x+5}{x-1}$ sur $\mathbb{R} - \{1\}$.
4. $x \mapsto \dfrac{x+3}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$
5. $x \mapsto \ln(x^2-1)$ sur $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

1. Tracez le tableau de variations des fonctions précédentes à l'aide du tableau de signe de la dérivée.
2. Tracez enfin la courbe des différentes fonctions à l'aide du tableau de variations.

Chapitre 14

Exercices du bloc 4 : Exercices liant les savoir-faire

Exercice 61

Savoir faire

- SF39 : Savoir trouver le domaine de définition et de dérivabilité d'une fonction à partir d'une formule
- SF40 : Savoir étudier le signe d'une dérivée
- SF41 : Savoir faire un tableau de variation à partir de la dérivée
- SF43 : Savoir tracer la courbe à partir du tableau de variation
- SF60 : Savoir calculer une intégrale connaissant la primitive
- SF62 : Connaître les primitives des fonctions usuelles
- SF64 : Savoir trouver les fonctions pour faire une IPP

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on considère la fonction $f_n : x \mapsto x^n \ln(x)$.

1. Faire l'étude de cette fonction à n fixé : vous préciserez les limites aux bords du domaine de définition dans le tableau de variation.
2. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^e f_n(x)dx$ pour $n = 0$.
3. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^e f_n(x)dx$ à l'aide d'une IPP.

Exercice 62

Savoir faire

- SF10 : Résoudre une équation du second degré
- SF60 : Savoir calculer une intégrale connaissant la primitive
- SF61 : Savoir calculer une primitive de fonctions simple
- SF62 : Connaître les primitives des fonctions usuelles
- SF65 : Savoir faire un changement de variable donné
- SF1195 : Savoir décomposer une fraction rationnelle en éléments simples

On considère l'intégrale suivante $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{du}{e^u + 3 + 2e^{-u}}$.

1. En effectuant le changement de variable $t = e^u$, démontrer que $I = \displaystyle\int_1^e \frac{dt}{t^2 + 3t + 2}$.
2. Factoriser le trinôme $t^2 + 3t + 2$.
3. En déduire la valeur de I à l'aide d'une décomposition en éléments simples.

Exercice 63

Savoir faire

- SF60 : Savoir calculer une intégrale connaissant la primitive
- SF61 : Savoir calculer une primitive de fonctions simple
- SF62 : Connaître les primitives des fonctions usuelles
- SF64 : Savoir trouver les fonctions pour faire une IPP
- SF77 : Savoir manipuler la forme algébrique
- SF78 : Savoir mettre sous forme algébrique une fraction en utilisant le conjugué
- SF80 : Savoir utiliser la multiplicativité de la forme exponentielle
- SF82 : Connaître les formules d'Euler
- SF1253 : Savoir utiliser la positivité et croissance de l'intégrale

L'objectif est ici de calculer des intégrales de la forme $I_f = \displaystyle\int_0^{\pi/2} f(x)e^x dx$.

1. Calculer I_f pour $f : x \mapsto 1$ et $f : x \mapsto x$.
2. On considère maintenant $f = \cos$ et on se propose de calculer I_f de deux façons différentes.
   (a) Quel est le signe de $f(x)e^x$ sur l'intervalle d'intégration ? En déduire le signe de I_f.
   (b) A l'aide d'une IPP, exprimer $I_{\cos}$ en fonction de $I_{\sin}$.
   (c) Appliquez une seconde IPP à $I_{\sin}$ afin de démontrer que
   $$I_{\cos} = e^{\pi/2} - 1 - I_{\cos}.$$
   En déduire la valeur de $I_{\cos}$.
3. On se propose de calculer I_f en utilisant les nombres complexes. On note $g : t \mapsto e^{it}$ et $h : t \mapsto e^{-it}$.
   (a) En utilisant la formule d'Euler, exprimer I_f en fonction de I_g et I_h.
   (b) Ecrire $e^{ix}e^x$ sous la forme e^{zx} où z est un nombre complexe que l'on précisera.
   (c) En déduire la valeur de I_f. Le résultat sera un réel (après simplification i doit disparaître).

Exercice 64

Savoir faire

- SF10 : Résoudre une équation du second degré
- SF67 : Savoir résoudre une équa diff linéaire d'ordre 1 à coeffs constants
- SF69 : Savoir trouver des solutions particulières simples pour une équation avec second membre pour une ED d'ordre 1
- SF96 : Savoir reconnaitre les propriétés d'une ED (linéarité, ordre...)
- SF215 : Trouver la solution générale d'une edo linéaire d'ordre 1 ou 2 avec second membre
- SF1218 : Savoir vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle
- SF1255 : Savoir étudier le signe d'un quotient de polynômes de degré au plus 2

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu le cours *Résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1 dans un contexte quelconque.* ?

On considère l'équation différentielle $y' = y^2 - 5y + 6$ (E)

1. Quel est l'ordre de cette équation ? Est-elle linéaire ?
2. On commence par négliger le terme en y^2. Résoudre $y' = -5y + 6$.
3. Démontrer que les fonctions $f : x \mapsto 2$ et $g : x \mapsto 3$ sont solutions de l'équation (E).
4. Factoriser le trinôme $X^2 - 5X + 6$.
5. Soit un instant t tel que $y(t) \geq 3$, quel est le signe de $y'(t)$?
6. De même déterminer le signe de $y'(t)$ suivant la valeur de $y(t)$.
7. Placer alors dans le plan $(t, y(t))$ les endroits où y est croissante/décroissante.

Exercice 65

Savoir faire

- SF67 : Savoir résoudre une équa diff linéaire d'ordre 1 à coeffs constants
- SF69 : Savoir trouver des solutions particulières simples pour une équation avec second membre pour une ED d'ordre 1
- SF74 : Savoir trouver une solution vérifiant une condition initiale donnée à l'ordre 1
- SF214 : Savoir résoudre une équa diff linéaire homogène d'ordre 1 à coeffs variables
- SF215 : Trouver la solution générale d'une edo linéaire d'ordre 1 ou 2 avec second membre

Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y' + y = e^x$
2. $y' + y = xe^x - 2$
3. $y' - y = \sin(x)$
4. $y' + \dfrac{2}{x}y = x^2$
5. $y' + y = e^{-x}$
6. $y' - xy = x^3$

Résoudre maintenant ces équations avec la condition initiale $y(0) = 1$.

Exercice 66

Savoir faire

- SF68 : Savoir résoudre une équa diff linéaire d'ordre 2 à coeffs constants
- SF73 : Savoir résoudre une équa diff provenant de la physique, et comprendre le résultat
- SF75 : Savoir trouver une solution vérifiant une condition initiale donnée à l'ordre 2 (système à résoudre)
- SF215 : Trouver la solution générale d'une edo linéaire d'ordre 1 ou 2 avec second membre
- SF1198 : Savoir trouver des solutions particulières simples pour une équation avec second membre pour une ED d'ordre 2
- SF1218 : Savoir vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu le cours *Résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 2 dans un contexte quelconque.* ?

On considère l'équation différentielle $y'' + 2y' + 4y = xe^x$ (E).

1. Résoudre l'équation homogène associée à (E).
2. Déterminer une solution particulière de (E) la forme $y_P : x \mapsto (ax+b)e^x$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. En déduire les solutions générales de (E).
3. Déterminer l'unique solution h vérifiant $h(0) = h(1) = 0$.
4. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ qui vérifie
$$\forall t \in]0, +\infty[, \quad t^2 f'' + 3tf' + 4f = t\ln(t)$$
   (a) On pose $g(x) = f(e^x)$ vérifiez que g est solution de (E).
   (b) En déduire une expression de f.
5. On reprend $y'' + 2y' + 4y = xe^x(E)$.
   (a) Démontrer que si y_1 et y_2 sont deux solutions de (E) alors $y_1 - y_2$ est solution de l'équation homogène associée.
   (b) Expliquez alors la démarche usuelle de recherche de solutions d'équations différentielles linéaires.

Exercice 67

Savoir faire

- SF8 : Savoir résoudre des équations algébriques d'ordre un
- SF10 : Résoudre une équation du second degré
- SF1218 : Savoir vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu le cours *Résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 2 dans un contexte quelconque.* ?

Polynômes et équations différentielles linéaires à coefficients constants

1. **Un exemple d'ordre** 1 **:** Considérons l'équation différentielle $2y' - 3y = 0$. Vérifier que $y : x \mapsto e^{\frac{3}{2}x}$ est solution de cette équation. Déterminer ensuite une autre solution de cette équation.
2. **L'ordre** 1 **général :** Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. On considère de manière plus générale l'équation $ay' + by = 0$. On suppose que $y : x \mapsto e^{\lambda x}$ est solution de cette équation pour λ un réel. En utilisant le fait que $y : x \mapsto e^{\lambda x}$ est solution, déterminer λ en fonction de a et b.
3. **Un exemple d'ordre** 2 **:** On considère maintenant l'équation du second ordre $y'' + 2y' + y = 0$ et on suppose que $y : x \mapsto e^{\lambda x}$ est solution de cette équation pour λ un réel.
   (a) Démontrer que λ est racine d'un trinôme du second degré que vous déterminerez.
   (b) En déduire les valeurs possibles de λ puis une solution y possible.
4. **Le cas général :** Soient $a_0, a_1, a_2, \dots, a_p$ des réels. On se donne l'équation différentielle suivante
   $$a_p y^{(p)} + a_{p-1} y^{(p-1)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$
   et on suppose que $y : x \mapsto e^{\lambda x}$ en est solution.
   (a) Démontrer que $a_p \lambda^p + a_{p-1}\lambda^{p-1} + \ldots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$.
   (b) En déduire une condition pour laquelle $y : x \mapsto e^x$ est solution de cette équation.

Exercice 68

Savoir faire

- SF68 : Savoir résoudre une équa diff linéaire d'ordre 2 à coeffs constants
- SF1198 : Savoir trouver des solutions particulières simples pour une équation avec second membre pour une ED d'ordre 2

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu le cours *Résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 2 dans un contexte quelconque.* ?

Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y'' + 2y' + 2y = \sin(3x)$
2. $y'' - 6y' + 5y = e^{-3t}$
3. $y'' - 6y' + 5y = e^t$.
4. $y'' - y' + 6y = x^2 + 2x$.

Exercice 69

Savoir faire

- SF68 : Savoir résoudre une équa diff linéaire d'ordre 2 à coeffs constants
- SF75 : Savoir trouver une solution vérifiant une condition initiale donnée à l'ordre 2 (système à résoudre)

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu le cours *Résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 2 dans un contexte quelconque.* ?

Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y'' - 4y' + 2y = 0$.
2. $y'' - y' - 6y = 0$.
3. $y'' + y' + y = 0$.

Trouver maintenant les solutions des équations de l'exercice 1 pour la condition initiale $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$.

Exercice 70

Savoir faire

- SF37 : Savoir identier une fonction périodique (et sa période)
- SF38 : Savoir étudier la parité d'une fonction
- SF39 : Savoir trouver le domaine de définition et de dérivabilité d'une fonction à partir d'une formule
- SF40 : Savoir étudier le signe d'une dérivée
- SF41 : Savoir faire un tableau de variation à partir de la dérivée
- SF42 : Savoir identifier les tangentes remarquables
- SF43 : Savoir tracer la courbe à partir du tableau de variation

Soit $n \geq 2$ un entier fixé et $f : \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par la formule suivante :

$$f(x) = \frac{1 + x^n}{(1+x)^n}, \quad x \geq 0.$$

1. (a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et calculer $f'(x)$ pour $x \geq 0$.
   (b) En étudiant le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}^+$, montrer que f atteint un minimum sur $\mathbb{R}^+$ que l'on déterminera. Pour cela vous tracerez le tableau de variations de f.
   (c) En quel(s) point(s) f admet-elle une tangente horizontale ?
2. (a) Déduire de la question 1.b) l'inégalité suivante :
   $$(1+x)^n \leq 2^{n-1}(1+x^n), \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$
   (b) Montrer que si $x \in \mathbb{R}^+$ et $y \in \mathbb{R}^+$ alors on a
   $$(x+y)^n \leq 2^{n-1}(x^n + y^n).$$

Exercice 71

Savoir faire

- SF37 : Savoir identier une fonction périodique (et sa période)
- SF38 : Savoir étudier la parité d'une fonction
- SF39 : Savoir trouver le domaine de définition et de dérivabilité d'une fonction à partir d'une formule
- SF40 : Savoir étudier le signe d'une dérivée
- SF41 : Savoir faire un tableau de variation à partir de la dérivée
- SF43 : Savoir tracer la courbe à partir du tableau de variation

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu le cours *Effectuer un exercice de base sur les complexes* ?

1. On considère $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$. Quel est l'ensemble de définition de tan ?
2. Démontrer que tan est $\pi-$périodique et étudier sa parité. Sur quel intervalle est-il nécessaire de connaître tan pour la connaître partout ?
3. Etudier la fonction tan (tableau de variation et tracé).

Exercice 72

Savoir faire

- SF28 : Savoir calculer l'équation d'une tangente à une courbe en un point donné
- SF37 : Savoir identier une fonction périodique (et sa période)
- SF38 : Savoir étudier la parité d'une fonction
- SF39 : Savoir trouver le domaine de définition et de dérivabilité d'une fonction à partir d'une formule
- SF40 : Savoir étudier le signe d'une dérivée
- SF41 : Savoir faire un tableau de variation à partir de la dérivée
- SF42 : Savoir identifier les tangentes remarquables
- SF43 : Savoir tracer la courbe à partir du tableau de variation
- SF82 : Connaître les formules d'Euler

On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} f & : & D_f & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & t & \mapsto & (3\cos(t) - \cos(3t), 3\sin(t) - \sin(3t)) \end{array}$$

où D_f est l'ensemble de définition de f. Dans la suite on définit

$$x : t \mapsto 3\cos(t) - \cos(3t), \quad y : t \mapsto 3\sin(t) - \sin(3t)$$

de sorte que

$$\forall t \in D_f, \quad f(t) = (x(t), y(t)).$$

On souhaite faire l'étude de cette fonction. On attend pour toutes les questions des justifications précises.

1. Déterminer D_f et déterminer l'ensemble de dérivabilité de f.
2. Les fonctions x et y sont-elles paires ? impaires ? En déduire sur quel intervalle, il suffit de les étudier pour connaître leur comportement sur D_f.
3. Démontrer que les fonctions x et y sont périodiques et déterminer leur plus petite période. Peut-on encore réduire l'intervalle d'étude de ces fonctions ? Si oui quel est l'intervalle minimal en taille ?
4. Démontrer que pour a, b deux réels,

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b), \quad \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b).$$

   Vous pourrez exprimer $e^{i(a+b)}$ *de deux façons différentes. Si vous n'avez pas revu les complexes, admettez le résultat de cette question*
5. En déduire les expressions de $\sin(a+b) - \sin(a-b)$ et $\cos(a+b) - \cos(a-b)$ pour a, b deux réels.
6. Démontrer que

$$\forall t \in D_f, \quad x'(t) = 6\sin(t)\cos(2t), \quad y'(t) = 6\sin(t)\sin(2t).$$

7. Déterminer les variations des fonctions x et y.
8. En quels points x a-t-elle une tangente horizontale ? Même question pour y.
9. Déterminer l'équation de la tangente à y en $\frac{\pi}{4}$. Faites de même pour x en $\frac{\pi}{2}$.
10. Tracez l'allure de x et de y.
11. Tracez la fonction dans le plan $(x(t), y(t))$ ($x(t)$ en abscisse, $y(t)$ en ordonnée).