Licence 3
Analyse 1
2024-2025

Évaluation 2 (27 novembre)

1. Étudier la nature des séries suivantes. On justifiera avec soin les majorations, minorations et calculs d'équivalents qui seront effctués.

$$(a)\quad \sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^3+\sin n}; \qquad (b)\quad \sum_{n\geq 1} \frac{\cos n + \sin n}{n2^n}.$$

2. Calculer la valeur des intégrales I et J.

$$(a)\quad I = \int_0^{+\infty} \cos(2t)e^{-t}dt; \qquad (b)\quad J = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(t+1)(2t+1)}dt.$$

3. Après avoir précisé pourquoi elles sont généralisées, étudier la nature (convergence ou divergence) des intégrales suivantes. On ne demande pas de les calculer.

$$(a)\quad I = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(t^2+\sin t)(t+1)}\,dt; \qquad (b)\quad I = \int_0^{\pi} \frac{t}{1-\cos t}\,dt;$$

$$(c)\quad I = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t+1)}{(\sqrt{t})^3}\,dt; \qquad (d)\quad I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^2+t+1}\,dt;$$

$$(e)\quad I = \int_0^{+\infty} \frac{1+\cos t}{t^2+1}\,dt; \qquad (f)\quad I = \int_0^{1} \frac{t^2\ln t}{\sin t}dt;$$

$$(g)\quad I = \int_0^{1} \frac{\ln u}{\sqrt{1-u}}\,du; \qquad (h)\quad I = \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-t^2}}{t\sqrt{t}}\,dt;$$

4. Donner le domaine de définition des deux fonctions f et g définies par :

$$f(p) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(pt)}{t(1+t)}\,dt \qquad g(p) = \int_0^{+\infty} \frac{(\sin t)^2}{e^{pt}-1}\,dt.$$

Correction

1. (a) La série est à termes positifs car, pour tout entier naturel n non nul,

$$n^3 + \sin n \geq n^3 - 1 \geq 0.$$

En outre, on sait que, pour tout $n \geq 1$, $\ln n \leq n$ et donc :

$$0 \leq \frac{\ln n}{n^3 + \sin n} \leq \frac{n}{n^3 - 1}.$$

Or :

$$\frac{n}{n^3 - 1} \sim \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}.$$

La série de Riemann $\sum 1/n^2$ est convergente car $2 > 1$, donc, par comparaison par équivalence puis par majoration, la série de l'énoncé est convergennte.

(b) La série n'est pas à termes de signes constants. Étudions sa convergence absolue. Pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\left| \frac{\cos n + \sin n}{n2^n} \right| \leq \frac{2}{n2^n}.$$

Utilisons le critère de d'Alembert pour étudier la nature de la série de terme général (positif) :

$$u_n = \frac{2}{n2^n}.$$

On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n2^n}{(n+1)2^{n+1}} = \frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2(1 + \frac{1}{n})}.$$

Quand n tend vers $+\infty$, u_{n+1}/u_n tend vers $1/2$. Comme $1/2 < 1$, on en déduit que la série $\sum u_n$ est convergente. Donc, par comparaison par majoration, la série de l'énoncé est absolument convergente et donc convergente.

2. (a) La fonction à intégrer est continue sur $[0, +\infty[$, donc l'intégrale est généralisée uniquement à cause de sa borne infinie. Calculons dans un premier temps, pour $c > 0$:

$$I(c) = \int_0^{+\infty} \cos(2t)e^{-t} dt.$$

Première intégration par parties : on pose $u(t) = \cos(2t)$ et $v'(t) = e^{-t}$. Alors $u'(t) = -2\sin(2t)$ et $v(t) = -e^{-t}$. D'où :

$$I(c) = \left[-\cos(2t)e^{-t} \right]_0^c + \int_0^c 2\sin(2t)e^{-t} dt = -\cos(2c)e^{-c} + 1 - \int_0^c 2\sin(2t)e^{-t} dt.$$

Seconde intégration par parties : on pose $u(t) = \sin(2t)$ et $v'(t) = e^{-t}$. Alors $u'(t) = 2\cos(2t)$ et $v(t) = -e^{-t}$. D'où :

$$I(c) = -\cos(2c)e^{-c} + 1 - 2\left[-\sin(2t)e^{-t}\right]_0^c + 2\int_0^c -2\cos(2t)e^{-t}dt.$$

Ainsi :

$$I(c) = -\cos(2c)e^{-c} + 1 + 2\sin(2c)e^{-c} - 4I(c)$$

et donc :

$$5I(c) = -\cos(2c)e^{-c} + 1 + 2\sin(2c)e^{-c},$$

de sorte que :

$$I(c) = \frac{1}{5}\left(-\cos(2c)e^{-c} + 1 + 2\sin(2c)e^{-c}\right) = \frac{1}{5} + \frac{e^{-c}}{5}(-\cos(2c) + 2\sin(2c)).$$

Pour calculer la limite de $I(c)$ quand c tend vers l'infini, utilisons le théorème des gendarmes. Nous avons, pour tout $c > 0$:

$$-1 - 2 \leq -\cos(2c) + 2\sin(2c) \leq 1 + 2$$

et donc :

$$-\frac{3}{5}e^{-c} \leq \frac{e^{-c}}{5}(-\cos(2c) + 2\sin(2c)) \leq \frac{3}{5}e^{-c}.$$

Comme e^{-c} tend vers 0 quand c tend vers l'infini, les deux quantités à droite et à gauche de la double inégalité tendent aussi vers 0, donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-c}}{5}(-\cos(2c) + 2\sin(2c)) = 0.$$

Par conséquent, $I(c)$ tend vers $1/5$ quand c tende vers l'infini. On en déduit que l'intégrale I est convergente et que :

$$I = \frac{1}{5}.$$

(b) La fonction à intégrer est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$, donc l'intégrale est généralisée uniquement à cause de la borne infinie. Le plus simple est de constater que la fonction à intégrer est à valeurs positives et que :

$$\frac{t}{(t+1)(2t+1)} \sim \frac{t}{2t^2} = \frac{1}{2t}.$$

L'intégrale de référence $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ est divergente, donc, par comparaison par équivalence, l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{t}{(t+1)(2t+1)}\, dt$$

est aussi divergente. Comme, de plus, la fonction étudiée est continue sur l'intervalle fermé $[0,1]$, les intégrales de cette fonction sur les intervalles $[0,+\infty[$ et $[1,+\infty[$ sont de même nature. Donc l'intégrale J est divergente. Comme il s'agit de l'intégrale d'une fonction à valeurs positives, cela signifie que :

$$J = +\infty.$$

3. Dans toutes les questions, on notera f la fonction à intégrer.

(a) La fonction f est continue sur l'intervalle $]0,+\infty[$ mais elle n'est pas définie en 0. Il y a donc un problème en $+\infty$ et en 0. Nous écrivons :

$$I = \int_0^{+\infty} f(t)\ dt = \int_0^1 f(t)\ dt + \int_1^{+\infty} f(t)\ dt,$$

si ces trois intégrales sont bien définies. L'intégrale I est alors convergente si les deux intégrales sur les intervalles $[0,1]$ et $[1,+\infty[$ sont convergentes ; elle est divergente dans tous les autres cas.

Étude de $\int_0^1 f(t)\ dt$. La fonction f est de signe constant sur $[0,1]$ car la fonction sinus est à valeurs positives dans l'intervalle $[0,\pi/2]$ et donc en particulier dans $[0,1]$.

Étudions un équivalent de $f(t)$ en 0/ On a : $\sin t \sim t$, donc t^2 est négligeable devant $\sin t$ et :

$$t^2 + \sin t \sim t.$$

Comme, de plus, $t+1 \sim t$, on en déduit, par quotient et produit d'équivalents, que :

$$f(t) \sim \frac{t}{t^2} = \frac{1}{t}.$$

L'intégrale $\int_0^1 (1/t)\ dt$ est une intégrale de référence divergente, donc l'intégrale $\int_0^1 (-\ln t)\ dt$ est divergente, par comparaison par équivalence. Cela suffit pour montrer que I est divergente.

(b) La fonction f est continue sur $]0,\pi]$ mais n'est pas définie en 0 (puisque $\cos 0 = 1$). L'intégrale est donc généralisée à cause du problème en 0. On remarque que la fonction est à valeurs positives sur $]0,\pi]$. On sait que, quand t tend vers 0 :

$$1 - \cos t \sim \frac{t^2}{2}$$

et donc :

$$f(t) = \frac{t}{1-\cos t} \sim \frac{2t}{t^2} = \frac{2}{t}.$$

L'intégrale de référence $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t}$ est divergente, donc, par comparaison par équivalence, l'intégrale

$$\int_0^1 f(t)\ dt$$

est aussi divergente. Comme, de plus, la fonction f est continue sur l'intervalle fermé $[1, \pi]$, les intégrales de cette fonction sur les intervalles $[0,1]$ et $[0, \pi]$ sont de même nature. Donc l'intégrale I est divergente.

(c) La fonction f est continue sur $[1, +\infty[$, l'intégrale est généralisée à cause de la borne infinie. La fonction n'est pas de signe constant. Nous avons, pour tout $t \geq 1$:

$$|f(t)| \leq \frac{1}{(\sqrt{t})^3} = \frac{1}{t^{3/2}}.$$

L'intégrale de référence $\int_1^{+\infty} dt/t^{3/2}$ est convergente car $3/2 > 1$ donc, par comparaison par majoration, l'intégrale I est absolument convergente donc convergente.

(d) La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$. En particulier, le dénominateur $t^2 + t + 1$ ne s'annule jamais car il s'agit d'une fonction polynomiale de degré 2 dont le discriminant vaut $\Delta = 1^2 - 4 = -3 < 0$. Les problèmes sont donc situés aux bornes infinies : $-\infty$ et $+\infty$. On écrit :

$$I = \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{-t^2}}{t^2 + t + 1}\, dt + \int_{-0}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^2 + t + 1}\, dt.$$

- *Étude de* $\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{-t^2}}{t^2+t+1}\, dt$ *:*

  La fonction f est à valeurs positives. Quand t tend vers $-\infty$, on a :

  $$f(t) \sim \frac{e^{-t^2}}{t^2}.$$

  Or, pour tout $t \leq -1$, on a : $t^2 \geq -t \geq 1$, donc :

  $$\frac{e^{-t^2}}{t^2} \leq e^{-t^2} \leq e^t.$$

  Or l'intégrale $\int_{-\infty}^{0} e^t\, dt$ est convergente, comme on peut le voir par exemple en la calculant : si $c < 0$,

  $$\int_c^0 e^t dt = [e^t]_c^0 = 1 - e^c.$$

  Quand c tend vers $-\infty$, e^c tend vers 0 et donc $\int_c^0 e^t dt$ tend vers 1 et :

  $$\int_{-\infty}^{0} e^t dt = 1.$$

  Donc, par comparaison par majoration puis équivalence, l'intégrale $\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{-t^2}}{t^2+t+1}\, dt$ est convergente.

- *Étude de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^2+t+1}\, dt$:*

  La fonction f est à valeurs positives. Quand t tend vers $+\infty$, on a :

$$f(t) \sim \frac{e^{-t^2}}{t^2}.$$

  Or, pour tout $t \geq 1$, on a : $t^2 \geq t \geq 1$, donc :

$$\frac{e^{-t^2}}{t^2} \leq e^{-t^2} \leq e^{-t}.$$

  Or l'intégrale de référence $\int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt$ est convergente. Donc, par comparaison par majoration puis équivalence, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^2+t+1}\, dt$ est convergente.

(e) La fonction f est continue sur $[0, +\infty[$, l'intégrale est généralisée à cause de la borne infinie. La fonction n'est de signe constant. Étudions sa valeur absolue. On a, pour tout $t \geq 0$:

$$|f(t)| \leq \frac{2}{t^2+1} \leq \frac{2}{t^2}.$$

L'intégrale de référence $\int_1^{+\infty} dt/t^2$ est convergente car $2 > 1$, donc, par comparaison par majoration, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ est convergente. La fonction f étant continue sur l'intervalle fermé $[0, 1]$, on en déduit que l'intégrale I est convergente.

(f) La fonction est continue sur l'intervalle $]0, 1]$ mais pas définie en 0. L'intégrale est donc généralisée et le problème se situe en 0. Quand t tend vers 0, on sait que $\sin t \sim t$ et donc :

$$f(t) = \frac{t^2 \ln t}{\sin t} \sim \frac{t^2 \ln t}{t} = t \ln t.$$

Croissances comparées : on sait que $t \ln t$ tend vers 0 quand t tend vers 0^+. Donc

$$\lim_{t \to 0^+} f(t) = 0.$$

Puisque f admet une limite finie en la borne finie 0, l'intégeale I est faussement généralisée, elle est donc convergente.

(g) Fonction f à valeurs négatives et continue sur $]0, 1[$. Le logarithme n'est pas défini en 0 et dénominateur est nul si $u = 1$. Il y a donc un problème en 0 et en 1.

On écrit :

$$\int_0^1 f(u)\, du = \int_0^{1/2} f(u)\, du + \int_{1/2}^0 f(u)\, du.$$

- *Étude de $\int_0^{1/2} f(u)\ du$:* Quand u tend vers 0, le dénominateur tend vers 1 et donc $f(u) \sim \ln u$.

  L'intégrale de référence $\int_0^1 \ln u\ du$ est convergente, il en est donc de même pour l'intégrale $\int_0^{1/2} \ln u\ du$ puisque l'intervalle $[0, 1/2]$ est inclus dans $[0, 1]$. Donc, par comparaison par équivalence, l'intégrale $\int_0^{1/2} f(u)\ du$ est convergente.

- *Étude de $\int_{1/2}^0 f(u)\ du$:*

  Il est préférable d'effectuer un changement de variables pour ramener le problème en 0. On pose donc : $t = 1 - u$, de sorte que $u = 1 - t$, $dt = -du$ et :

$$\int_{1/2}^1 \frac{\ln u}{\sqrt{1-u}} du = -\int_{1-1/2}^{1-1} \frac{\ln(1-t)}{\sqrt{t}} dt = -\int_{1/2}^0 \frac{\ln(1-t)}{\sqrt{t}} dt = \int_0^{1/2} \frac{\ln(1-t)}{\sqrt{t}} dt.$$

  La fonction obtenue est continue sur $]0, 1/2]$ mais n'est pas définie en 0, donc l'intégrale $\int_0^{1/2} \frac{\ln(1-t)}{\sqrt{t}} dt$ est généralisée à cause du problème en 0. Etudions un équivalent en 0 de la fonction à intégrer. Nous savons que $\ln(1+x) \sim x$ quand x tend vers 0, donc $\ln(1-t) \sim -t$ quand t tend vers 0. Donc, quand t tend vers 0 :

$$\frac{\ln(1-t)}{\sqrt{t}} \sim \frac{-t}{\sqrt{t}} = -\sqrt{t} \to 0.$$

  par conséquent, l'intégrale $\int_0^{1/2} \frac{\ln(1-t)}{\sqrt{t}} dt$ est faussement généralisée et donc convergente.

Conclusion : l'intégrale I est convergente.

(h) La fonction est à valeurs positives, elle est continue sur $]0, +\infty[$ mais n'est pas défine en 0, il y a donc un problème en 0 et en $+\infty$. Posons :

$$I = \int_0^{+\infty} f(t)\ dt = \int_0^1 f(t)\ dt + \int_1^{+\infty} f(t)\ dt,$$

- *Étude de $\int_0^1 f(t)\ dt$.*

  On sait que $e^x - 1 \sim x$ quand x tend vers 0. Quand t tend vers 0, $-t^2$ tend aussi vers 0 et donc $e^{-t^2} - 1 \sim -t^2$. Donc :

$$f(t) \sim \frac{t^2}{t\sqrt{t}} = \sqrt{t} \to 0.$$

  La fonction f admet donc une limite finie en la borne finie 0, donc l'intégrale $\int_0^1 f(t)dt$ est faussement généralisée et donc convergente.

- *Étude de* $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$.

  Quand t tend vers $+\infty$, e^{-t^2} tend vers 0, donc :

  $$f(t) \sim \frac{1}{t\sqrt{t}} = \frac{1}{t^{3/2}}.$$

  L'intégrale de référence $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{3/2}}$ est convergente car $3/2 > 1$. Donc, par comparaison par équivalence, l'intégrame $\int 1^{+\infty} f(t)dt$ est convergente.

Conclusion : l'intégrale I est convergente.

4. a. Il faut déterminer les valeurs du paramètre p pour lesquelles l'intégrale $f(p)$ est convergente. La fonction à intégrer est définie, à valeurs positives et continue sur $]0, +\infty[$, mais pas définie en 0. il y a donc un problème en 0 et en $+\infty$.

- *Étude de* $\int_0^1 \frac{\sin(pt)}{t(t+1)}\,dt$. Quand x tend vers 0, $\sin x \sim x$, donc quand t tend vers 0, $\sin(pt) \sim pt$ (puisque pt tend aussi vers 0). Donc :

  $$\frac{\sin(pt)}{t(t+1)} \sim \frac{pt}{t(t+1)} = \frac{p}{t+1}.$$

  Or $p/(t+1)$ tend vers la limite finie p quand t tend vers 0. L'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin(pt)}{t(t+1)}\,dt$ est donc faussement généralisée et donc convergente.

- *Étude de* $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(pt)}{t(t+1)}\,dt$.

  La fonction n'est pas à valeurs positives, étudions sa valeur absolue. Nous avons, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

  $$\left|\frac{\sin(pt)}{t(t+1)}\right| \leq \frac{1}{t(t+1)} \leq \frac{1}{t^2}.$$

  L'intégrale de référence $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est convergente car $2 > 1$. Donc, par comparaison par majoration, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(pt)}{t(t+1)}\,dt$ est absolument convergente, donc convergente.

Conclusion : l'intégrale $f(p)$ est convergente, et ceci quelle que soit la valeur du paramètre p. La fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}$. Le domaine de définition de la fonction f est donc l'ensemble $\mathbb{R}$.

b. La fonction

$$h : t \mapsto h(t) = \frac{(\sin t)^2}{e^{pt} - 1}$$

est définie en tout réel $t \geq 0$ tel que $e^{pt} - 1 \neq 0$, c'est-à-dire quand $pt \neq 0$.

Nous pouvons ainsi séparer deux cas :

- $p = 0$: dans ce cas, le dénominateur $e^{pt} - 1$ est nul pour toute valeur de la variable t, la fonction à intégrer, h, n'est donc définie nulle part et l'intégrale $g(0)$ n'est pas définie.
- $p \neq 0$: dans ce cas, on a $e^{pt} \neq 1$ pour tout $t > 0$. La fonction h est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et n'est pas définie en 0. L'intégrale est généralisée et admet deux problèmes : en 0 et $+\infty$. Remarquons que si $p > 0$, la fonction h est à valeurs toujours positives et que si $p < 0$ elle est à valeurs toujours négatives. Elle est donc de signe constant dans les deux cas.

  Écrivons :

  $$\int_0^{+\infty} \frac{(\sin t)^2}{e^{pt} - 1}\, dt = \int_0^1 \frac{(\sin t)^2}{e^{pt} - 1}\, dt + \int_1^{+\infty} \frac{(\sin t)^2}{e^{pt} - 1}\, dt.$$

  - *L'intégrale* $\int_0^1 \frac{(\sin t)^2}{e^{pt}-1}\, dt$ est faussement généralisée, donc convergente. En effet, quand t tend vers 0, on a :

    $$\sin t \sim t \qquad \text{et} \qquad e^{pt} - 1 \sim pt,$$

    donc, par produit et quotient d'équivalents :

    $$\frac{(\sin t)^2}{e^{pt} - 1} \sim \frac{t^2}{pt} = \frac{t}{p} \to 0.$$

  - *Étude de l'intégrale* $\int_1^{+\infty} \frac{(\sin t)^2}{e^{pt}-1}\, dt$ *:*

    * *Cas où $p > 0$:* Pour tout $t \geq 1$, on a :

      $$\frac{(\sin t)^2}{e^{pt} - 1} \leq \frac{1}{e^{pt} - 1}$$

      et, quand t tend vers $+\infty$:

      $$\frac{1}{e^{pt} - 1} \sim \frac{1}{e^{pt}} = e^{-pt}.$$

      Puisque $p > 0$, on sait que l'intégrale de référence $\int_1^{+\infty} e^{-pt} dt$ est convergente. Donc, par comparaison par équivalence et par majoration, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{(\sin t)^2}{e^{pt}-1}\, dt$ est convergente.

    * *Cas où $p < 0$ (pas facile) :* dans ce cas, le dénominateur e^{pt} tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$ et donc :

      $$\frac{(\sin t)^2}{e^{pt} - 1} \sim (\sin t)^2.$$

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{(\sin t)^2}{e^{pt}-1}\, dt$ est donc de même nature que l'intégrale $\int_1^{+\infty} (\sin t)^2 dt$. Or cette intégrale est divergente. Pour s'en apercevoir, on peut constater que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_1^{+\infty} (\sin t)^2 \ dt \geq \int_{2\pi}^{2n\pi} (\sin t)^2 dt = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} (\sin t)^2 \ dt.$$

Comme la fonction $t \mapsto (\sin t)^2$ est périodique de période 2π, toutes les intégrales $\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} (\sin t)^2 \ dt$ ont la même valeur, à savoir :

$$\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} (\sin t)^2 \ dt = \int_0^{2\pi} (\sin t)^2 \ dt = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \pi.$$

Par conséquent :

$$\int_1^{+\infty} (\sin t)^2 \ dt \geq \sum_{k=1}^{n-1} \pi = (n-1)\pi.$$

Comme cette inégalité est vraie pour tout entier $n \geq 1$, on en déduit que $\int_1^{+\infty} (\sin t)^2 \ dt = +\infty$ et donc que cette intégrale est divergente.

En conclusion, l'intégrale $g(p)$ est convergente si $p > 0$ et divergente si $p < 0$. En outre, comme elle n'est pas définie si $p = 0$, on en déduit que le domaine de définition de la fonction g est $]0, +\infty[$.