Feuille 4 : Intégrales à paramètre et intégrales doubles

Exercice 1. (Continuité de fonctions de deux variables)
Les fonctions suivantes sont elles continues sur $\mathbb{R}^2$?

1. $f_1(x,t) = \dfrac{xt}{x^2+t^2}$ si $(x,t) \neq (0,0)$, et $f_1(0,0) = 0$.
2. $f_2(x,t) = \dfrac{x^3}{x^2+t^2}$ si $(x,t) \neq (0,0)$, et $f_2(0,0) = 0$.
3. $f_3(x,t) = \dfrac{x^2-t^2}{x^2+t^2}$ si $(x,t) \neq (0,0)$, et $f_3(0,0) = 0$.
4. $f_4(x,t) = \sin(x^2+t^2)\dfrac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}$ si $(x,t) \neq (0,0)$, et $f_4(0,0) = 0$.

Exercice 2. (Dérivées partielles)
Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 des fonctions suivantes.

1. $f_1(x,t) = x^2+t^2-2x+4t$.
2. $f_2(x,t) = \dfrac{x-t}{x+t}$.
3. $f_3(x,t) = \sqrt{1+x^2t^2}$.
4. $f_4(x,t) = \ln(x+\sqrt{x^2+t^2})$.
5. $f_5(x,t) = \dfrac{x\sin(t)}{1+x^2}$.

Exercice 3. (Etude d'une intégrale à paramètre : examen 2022)
On pose, sous réserve de l'existence, $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+t}\,dt$.

1. Montrer que F est bien définie et continue pour tout $x \in]0,+\infty[$.
2. Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et exprimer $F'(x)$ sous forme d'une intégrale à paramètre (formuler précisément le théorème du cours qu'on utilisera).
   En déduire que F est décroissante sur $]0,+\infty[$.
3. Déterminer la limite de F en $+\infty$. *Indication: encadrer bien l'intégrande et utiliser le théorème des gendarmes.*
4. (Plus dur) Déterminer la limite de F en $+\infty$.
5. (Plus dur) Calculer $\lim_{x\to+\infty} xF(x)$.
6. (Plus dur) On admet que $\forall t \in [0,1]$, $1-t \leq e^{-t} \leq 1$. En déduire un équivalent de $F(x)$ en 0.

Exercice 4. (Calcul de l'intégrale de Gauss)
On note f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2}\,dt.$$

1. Montrer que les fonctions f et g sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et exprimer $f'(x)$ et $g'(x)$ pour tout x réel. En déduire que la fonction $h = g + f^2$ est constante sur $\mathbb{R}$.
2. Que vaut h ?
3. Justifier l'encadrement : $0 \leq g(x) \leq e^{-x^2}$. En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt.$$

Exercice 5. (Une intégrale à paramètre)
Soit $A > 0$ fixé jusqu'à (y compris) la question 3.a). On considère l'intégrale à paramètre

$$F(x) = \int_0^A \cos(xt)e^{-t^2}\, dt.$$

1. Montrer que F est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa dérivée $F'(x)$ sous forme d'une intégrale à paramètre.
2. En intégrant par parties une fois cette dernière intégrale, montrer que $F'(x) = -\dfrac{x}{2}\, F(x) + \dfrac{1}{2} e^{-A^2} \sin(xA)$.
3. a) En déduire l'égalité

$$F(x) = F(0)e^{-x^2/4} + \frac{1}{2} e^{-x^2/4} e^{-A^2} \int_0^x \sin(uA)e^{u^2/4}\, du.$$

Indication : on pourra d'abord calculer $\frac{d}{dx}\Big(F(x)e^{x^2/4}\Big)$ *et utiliser l'expression de* $F'(x)$ *de la question 2).*

b) Montrer alors que

$$\int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2/4}.$$

On rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (voir l'exercice précédent).

4. **(Commentaire)** Une approche plus naturelle est de considérer l'intégrale à paramètre $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t^2}\, dt$. Montrer alors que G est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et vérifier que $G'(x) = -\dfrac{x}{2}\, G(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire que $G(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2/4}$.

Exercice 6. (Calcul[1] d'une intégrale impropre)
On note f la fonction définie par $f(t) = \dfrac{\sin(t)}{t}$ si $t \neq 0$ et $f(0) = 1$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ (et même de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, voir la feuille 3). On pose alors, pour tout $x > 0$,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\, dt.$$

[1] Dans cet exercice seulement, hormis le commentaire de l'exercice précédent, doivent être vérifiées des hypothèses de domination. Revoir soigneusement les théorèmes de continuité et de dérivabilité des intégrales à paramètre impropres qui les utilisent.

1. Montrer que la fonction $F : x \mapsto F(x)$ est définie sur $]0, +\infty[$. (F est appelée *transformée de Laplace de* f.) Montrer ensuite qu'elle est continue sur $]a, +\infty[$ pour tout $a > 0$. Cela montre qu'elle est continue sur $]0, +\infty[$.

2. Montrer enfin que F est de classe C^1 sur $]a, +\infty[$ pour tout $a > 0$. Cela montre qu'elle est C^1 sur $]0, +\infty[$. Pour tout $x > 0$, exprimer $F'(x)$ sous la forme d'une intégrale à paramètre.

3. Calculer alors $F'(x)$.

4. En déduire la valeur de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-t}\, dt$.

Exercice 7. (Fubini 1)

1. Soit $Q = [0,1] \times [0,1]$. Calculer $\iint_Q y e^{x+y^2}\, dxdy$ et $\iint_Q x \ln\big(x(1+y)\big)\, dxdy$.

2. Soit $Q = [0,\pi] \times [0, \pi/2]$. Calculer $\iint_Q \sin(x+y)\, dxdy$.

Exercice 8. (Fubini 2)
Soient $0 < a < b$ deux réels positifs. On veut calculer

1. Soient $0 < \epsilon < A$ et l'intégrale $\displaystyle\iint_{[\epsilon,A]\times[a,b]} e^{-xy}\, dxdy$. En utilisant le théorème de Fubini, montrer l'égalité
$$\int_\epsilon^A \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx = \int_a^b \frac{e^{-\epsilon y}}{y}\, dy - \int_a^b \frac{e^{-Ay}}{y}\, dy.$$

2. Montrer que $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_a^b \frac{e^{-Ay}}{y}\, dy = 0$ et $\displaystyle\lim_{\epsilon\to 0} \int_a^b \frac{e^{-\epsilon y}}{y}\, dy = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$. *Indication : encadrer les intégrandes et utiliser le théorème des gendarmes.*

3. En déduire que l'intégrale impropre $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx$ converge et calculer I .

Exercice 9. (Fubini 3)
On note $D(\rho)$ le quart de disque fermé du plan $D(\rho) = \{(r\cos\theta, r\sin\theta)/r \in [0,\rho], \theta \in [0, \pi/2]\}$.

1. Montrer que $\displaystyle\iint_{[0,R]\times[0,R]} e^{-x^2-y^2}\, dxdy = \Big(\int_0^R e^{-x^2}\, dx\Big)^2$.

2. En notant l'inclusion $D(R) \subset [0,R] \times [0,R]$, montrer en passant en polaires que
$$\frac{\pi}{4}(1 - e^{-R^2}) \leq \iint_{[0,R]\times[0,R]} e^{-x^2-y^2}\, dxdy.$$

3. En raisonnant de même, montrer l'inégalité $\displaystyle\iint_{[0,R]\times[0,R]} e^{-x^2-y^2}\, dxdy \leq \frac{\pi}{4}(1 - e^{-2R^2})$.

4. En déduire la convergence et la valeur de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$.