Université Paris-Saclay | **Intégration MDD302**
L3 DD | **2024–2025**

Corrigé Contrôle Continu 2 du 19/11/2024

Questions de cours

1. Enoncer le corollaire 3.15 (ou la version du cours) : lien entre les intégrales de Riemann et de Lebesgue. (3 points)
   J'attendais un énoncé précis. la fonction f est définie sur un segment $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est continue (ou bien intégrable au sens de Riemann). Alors f est intégrable au sens de Lebesgue (sur $[a, b]$: si on ne le met pas ici, ce n'est pas grave puisqu'on sait sur quel ensemble on travaille) et les deux intégrales sont égales (expliciter l'égalité avec les notations correctes).
2. Partie de la proposition 4.20 : Soit $f: \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ mesurable (On se placera dans le cas où f est définie en tout point). Démontrer que si $\int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda = 0$ alors f est nulle presque partout. (3 points)
   J'attendais un argument complet : On veut montrer que l'ensemble $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$ est négligeable. Si $A_n = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 1/n\}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ alors A_n est (une partie) mesurable et par croissance de l'intégrale et $1/n 1_{A_n} \leq f$, on a $1_n \int_{\mathbb{R}} 1_{A_n}\, d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda = 0$. Donc $\lambda(A_n) = 0$ et A_n est négligeable. Comme $A = \cup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$ est une réunion dénombrable de parties négligeables, A est négligeable. *(Remarque 1 : juste citer le numéro du lemme sans citer la raison n'est pas valable : il faut être capable de donner la raison mathématique pour appliquer un résultat du cours. Remarque 2 : écrire qu'une réunion d'ensembles négligeables est négligeable est faux : exemple $\mathbb{R}$ est la réunion de tous les singletons $\{x\}$ pour $x \in \mathbb{R}$. Mais $\mathbb{R}$ n'est pas négligeable.)*

Exercice Soit $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ pour $n \in \mathbb{N}$ la fonction continue définie par $f_n(t) = (\sin t)^n e^{-t}$ pour tout $t \in [0, +\infty[$.

1. Démontrer que f_n converge simplement vers 0 sauf sur un ensemble négligeable. (2points)
   On a toujours $|\sin t| \leq 1$. Si on a $|\sin t| < 1$ alors $(\sin t)^n \to 0$ si $n \to +\infty$. Donc f_n converge simplement vers 0 sur l'ensemble $[0, +\infty[\setminus N$ où $N = \{t \geq 0; |\sin t| = 1\}$. Or on sait que pour $t \in \mathbb{R}$, $|\sin t| = 1 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} + k\pi$ si $k \in \mathbb{Z}$. Donc $N = \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{N}\}$. C'est un ensemble dénombrable (il est indexé par $\mathbb{N}$) donc négligeable. *(Remarque 1 : j'ai vu plein de choses fausses sur la fonction sinus. Celles ou ceux qui sont concernés doivent revoir cela : notamment j'ai vu sinus est positive NON!!!!!. Remarque 2 : certains copies décrivent ce qui se passe sur l'ensemble N (et d'ailleurs se trompent aux points où le sinus vaut -1). Si vous lisez la question, ce n'est pas demandé.)*
2. Que peut-on dire de $\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,+\infty[} f_n\, d\lambda$? Expliquer. (2 points)
   On sait que la suite f_n converge presque partout vers $f = 0$ d'après 1). On a que pour tout $n \in N$ et pour tout $t \geq 0$, $|f_n(t)| \leq e^{-t}$ et $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ (fonction de référence). Donc le théorème de convergence dominée s'applique : les fonctions f_n sont intégrables (ce qui montre que leurs intégrales existent, donc on peut étudier leur limite) et $\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,+\infty[} f_n\, d\lambda = \int_{[0,+\infty[} 0\, d\lambda = 0$. *(Remarque 1 : l'inégalité sans les valeurs absolues ne justifie rien du tout. Et si on me dit que la fonction est positive c'est faux. Remarque 2 : Il faut dire où est valable l'inégalité : pour tout $n \in ...$ et pour tout $t \in ...$ Remarque 3 : ne pas oublier la conclusion que les f_n sont intégrables.)*