

---

## Questions ouvertes / 4 Décembre 2024

Probabilités : Chaînes de MARKOV

---

Voici trois questions ouvertes à travailler en groupe durant cette séance. Pensez à les aborder avec en tête les étapes suivantes :

- Est-ce que je comprends la question, les objets qu'on manipule, ce qu'on me demande ?
- Est-ce que je suis capable de trouver des exemples, des contre-exemples en lien avec la question ?
- Est-ce que je suis capable de faire des expériences (numériques, graphiques) avec un ordinateur pour débroussailler la question ?
- Est-ce qu'à partir des points précédents je suis capable de formuler une ou plusieurs conjectures ?
- Dans quels cas particuliers suis-je capable de démontrer ma ou mes conjectures ?

### Question ouverte 1

A quoi reconnaît-on qu'une matrice carrée est une matrice de transition de chaîne de MARKOV ?  
Que peut-on dire d'assez évident quant au spectre d'une telle matrice ?

### Question ouverte 2

On considère une fontaine verticale (du genre de celle sur la photo) où le trajet d'une goutte suit le schéma (on a découpé la gamme de hauteur possibles en petits compartiments, la case  $n + 1$  représente la base de la fontaine, dès que la goutte  $y$  arrive, elle est renvoyée en hauteur).

Modéliser l'évolution de la position d'une goutte d'eau à l'aide d'une chaîne de MARKOV.

Est-ce que si la distribution de « renvoi de la goutte »  $(p_1, \dots, p_n)$  est la distribution uniforme alors les gouttes d'eau sont uniformément réparties sur toute la hauteur ?

Peut-on choisir une distribution « renvoi de la goutte »  $(p_1, \dots, p_n)$  pour que les gouttes d'eau soient uniformément réparties sur toute la hauteur ?

### Question ouverte 3

A la roulette du casino, j'arrive avec 1000€ en poche, à chaque tour de jeu, je mise 10€ sur la « chance simple » : Rouge. Mes chances de gagner sont de  $18/37$ . Si je perds, je perds ma mise, si je gagne, je récupère ma mise et gagne un montant égal à la mise.

Je sortirai du casino ruiné ou alors dès que j'aurai doublé mon capital initial.

Modéliser l'évolution du capital à l'aide d'une chaîne de MARKOV.

Combien de tours de jeu en moyenne ? Est-ce que ce nombre de tours de jeu est proportionnel à la mise initiale ?

