Questions ouvertes / 21 Novembre 2024

Diagonalisation / Probabilités

Bilan

Question ouverte 1

Est-il vrai que si deux matrices (carrées, $n \times n$) A et B ont même polynôme caractéristique alors A et B sont semblables ?

On peut d'abord remarquer que deux matrices semblables ont même pol. caractéristique :

Si $A = P.B.P^{-1}$ alors

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \det(A - \lambda.I) = \det(P.B.P^{-1} - \lambda.P.I.P^{-1}) = \det(P.(B - \lambda.I).P^{-1}) = \det(B - \lambda.I)$$

Si on travaille sur $\mathbb{C}$, ce qui permet de « scinder » les polynômes [1] :

1. Si les deux matrices A et B sont diagonalisables (par exemple si leur pol.car n'a que des racines simples) alors le fait d'avoir même polynôme caractéristique implique le fait que A et B sont semblables car elles sont semblables à une même matrice diagonale.
2. Est-il possible qu'ne matrice A soit diagonalisable, que B ne le soit pas (et donc que A et B ne sont pas semblables) et que pourtant elles aient même pol.car ? ?....

   ....Oui :
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, P(\lambda) = \lambda^2$$

Question ouverte 2

On suppose que A est une matrice vérifiant $A^2 = I$, est-elle diagonalisable ? Peut-on décrire toutes ces matrices ?

Et si $(A - I)^2 = 0$?

1. Comme $A^2 = I$ alors si λ est v.p.de A associée au $\overrightarrow{\text{v.p.}}X$:
   $$A.X = \lambda.X, A^2.X = \lambda^2.X, 0 = (A^2 - I).X = (\lambda^2 - 1).X$$
   et donc $\lambda^2 = 1$ et Spec$A = \{-1, +1\}$.

   On a $(A - I).(A + I) = 0$ et donc
   (a) Si $-1 \notin \text{Spec}(A)$, $A + I$ est inversible et $A - I = 0$ et donc $A = I$;

1. Cela pose la question, sur $\mathbb{R}$ de savoir si deux matrices sont semblables au sens complexe impliquent qu'elles le sont au sens réel.

(b) si $+1 \notin \mathrm{Spec}(A)$, $A-I$ est inversible et $A+I=0$ et donc $A=-I$;

(c) sinon $\mathrm{Spec}(A)=\{-1,+1\}$. Dans ce cas, on considère $F=\mathrm{Ker}\,(A+I)$, $G=\mathrm{Ker}\,(A-I)$. Pour montrer que A est diagonalisable, il suffit de pouvoir montrer que

$$\dim(F)+\dim(G)=n$$

On sait déja que $\dim(F)+\dim(G)\leq n$.
Comme $(A-I).(A+I)=0$, si $x\in \mathrm{Im}\,(A+I)$ alors $x\in F$. Donc $\mathrm{Im}\,(A+I)\subset F$ et $\dim \mathrm{Im}\,(A+I)\leq \dim F$. Or par le théorème du rang

$$n=\dim G+\dim \mathrm{Im}\,(A+I)$$

et donc

$$\dim(F)+\dim(G)\geq n$$

et finalement

$$\dim(F)+\dim(G)=n,$$

ce qui démontre la diagonalisibilité de A.
On a en fait (égalité de dimension d'espaces emboités) que $F=\mathrm{Im}\,(A+I)$ et $G=\mathrm{Im}\,(A-I)$. Un vecteur x quelconque s'écrit

$$x=\underbrace{\frac{1}{2}(x+A.x)}_{x_F}+\underbrace{\frac{1}{2}(x-A.x)}_{x_G}$$

et on peut vérfiier que $A.x_F=x_F$ et $A.x_G=-x_G$.
On dit que A est la matrice de la symétrie d'axe F parallèlement à G et A est semblable à une matrice diagonale dont la diagonale ne comporte que ± 1.

2. Si $(A-I)^2=0$, on sait alors (même raisonnement de polynôme annulateur) que la seule valeur propre possible de A est $+1$. Comme $A-I$ est clairement non inversible, 1 est valeur propre de A. La matrice $A=I$ vérifie l'identité mais aussi la matrice

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Question ouverte 3

Deux joueurs, Alice et Bob jouent au tennis. Alice est un peu plus forte que Bob au sens où la probabilité (constante dans le temps, on se simplifie la vie, les joueurs ne se fatiguent pas) qu'Alice gagne un échange est p où $p>\frac{1}{2}$ (la probabilité que Bob gagne un point est donc $q=1-p<\frac{1}{2}$).

— Quelle est la probabilité que Alice gagne un jeu ?

— Quelle est la probabilité que Alice gagne un set ?

— Quelle est la probabilité que Alice gagne un match ?

Ca mérite une expérience informatique ?

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy.random as rd

def Point( p = 0.51 ):
    """ Retourne 1 si Alice gagne le point """
    return int(rd.rand() < p)

def Empilement( N = 4, X = Point ):
    """ Joue à X jusqu'à ce que A ou B l'emporte, ie soit le premier à N
    --- Pas de tie dans cette version simplifiée """
    A = 0
    B = 0
    while(True) :
        pt = X()
        A += pt ; B += 1 - pt
        if A == N : return 1
        if B == N : return 0

def Jeu( p ) :
    return Empilement( N= 4, X = lambda: Point(p = p))

def Set( p ) :
    return Empilement( N= 6, X = lambda: Jeu(p))

def Match( p ) :
    return Empilement( N= 3, X = lambda: Set(p))


def Eval_p_match(p, NS = 10_000):
    N = 0
    for _ in range(NS):
        N += Match(p)
    return N/NS

x = np.linspace(0.5,0.7,100)
y = []
for p in x :
    y.append(Eval_p_match(p))
y = np.array(y)

plt.plot(x,y,'rx')

#%%%% Partie explicite
```

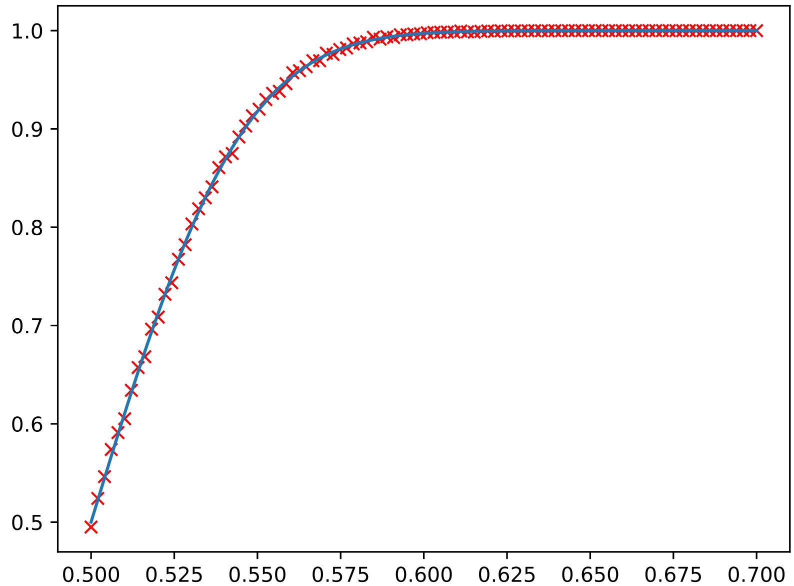

FIGURE 1 – Expérience vs. Calcul exact (10000 tirages au sort), $\times$

Bon, et par le calcul, ça donne quoi ?
On note X_k la v.a. indicatrice du fait que A gagne le point numéro k, *i.e.*

$$X_k = \begin{cases} 1 & \text{si } A \text{ gagne au point } k \\ 0 & \text{si } B \text{ gagne au point } k \end{cases}$$

Le nombre de points gagnés par A, resp. par B jusqu'au point numéro n (compris) est

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \text{ resp. } n - S_n$$

Notons A la v.a. donnant l'instant où A gagne le jeu en J points (et B l'instant où B gagne) alors

$$\{A = n\} = \{X_n = 1 \text{ et } S_n = J \text{ et } n - 1 - S_{n-1} \leq J - 1\}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \{A = n\} &= \{X_n = 1 \text{ et } S_{n-1} = J - 1 \text{ et } n - 1 - S_{n-1} \leq J - 1\} \\ &= \{X_n = 1 \text{ et } S_{n-1} = J - 1 \text{ et } n - 1 \leq 2J - 2\} \end{aligned}$$

et donc par indépendance de X_n et S_{n-1}, si $J \leq n \leq 2J - 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A = n) &= \mathbb{P}(X_n = 1).\mathbb{P}(S_{n-1} = J - 1) \\ &= p.\binom{n-1}{J-1}.p^{J-1}q^{n-J} = \binom{n-1}{J-1}.p^J q^{n-J} \end{aligned}$$

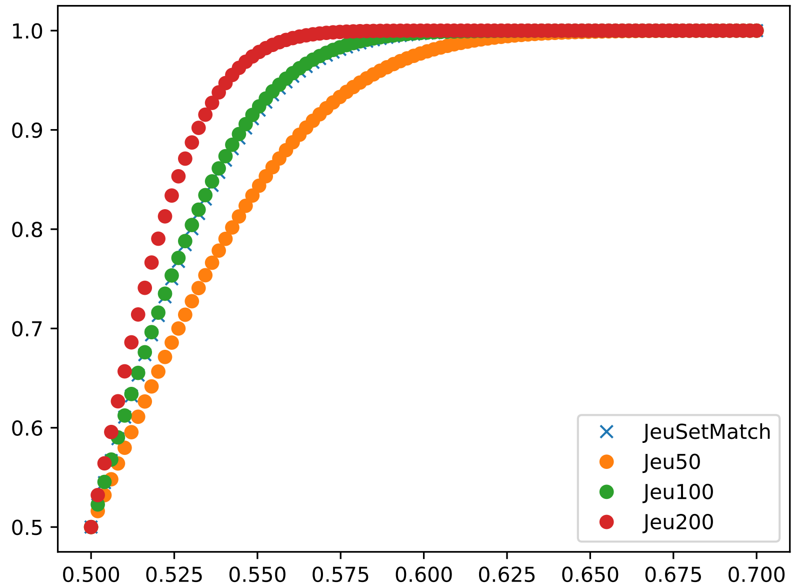

FIGURE 2 – Calcul exact pour jeu(4)/set(6)/match(3) ($\times$) et des matchs en 50,100,200 points $\circ$

La probabilité que A gagne le jeu est donc :

$$p_J = \sum_{n=J}^{2J-1} \binom{n-1}{J-1} .p^J q^{n-J} = p^J \sum_{n=0}^{J-1} \binom{J+n-1}{J-1} .q^n$$

alors que (par symétrie), la probabilité que B gagne le jeu est

$$q_J = \sum_{n=J}^{2J-1} \binom{n-1}{J-1} .p^{n-J} q^J = q^J \sum_{n=0}^{J-1} \binom{J+n-1}{J-1} .p^n$$

— On peut voir que si T_J désigne l'instant du J-ième succès de A alors A gagne le jeu ssi $T_J \leq 2J-1$. En effet, si ceci est vrai, A à eu au moins J succès dans les $2J-1$ premiers points et donc B de toute façon n'a pas gagné J points et que si $T_J \geq 2J$, cela veut dire que dans les $2J-1$ premiers points A n'en a gagné qu'au maximum $J-1$ et donc B en a eu J et a gagné. Connaissant la loi du J-ième succès (la loi binomiale négative), on retrouve la formule proposée.

— La différence $p_J - q_J$ s'exprime en fonction de $p-q$ à l'aide d'un facteur d'amplification :

$$\frac{p_J - q_J}{p-q} = \sum_{n=0}^{J-1} \binom{J+n-1}{J-1} . \frac{p^J q^n - p^n q^J}{p-q}$$

— Il faudrait comparer la probabilité qu'Alice a de gagner un match direct en disons $M = (1.5)^3 * (4 * 6 * 3) = 3^5 \simeq 243$ points, ce qui serait grossièrement le nombre de points jouer s'il n'y avait pas le découpage hiérarchique en jeu, set, match.

Sur le deuxième graphique, on découvre avec stupéfaction que la structure en Jeu/Set/Match a plutôt tendance à diminuer l'écart entre joueur comparé à un match direct en le même nombre moyen de points. La structure en jeu/set/match a plutôt le même facteur d'amplification qu'un match direct en 100 points.