Feuille 3
Exercice 11

Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n)!} x^n$$

Remarques et indications :

On sait que $\exp(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par conséquent,

$$\exp(-x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} x^n = 1 - x + \frac{x^2}{2} + \dots$$

On obtient ainsi les développements des fonctions sinus hyperbolique (sh) et cosinus hyperbolique (ch) sur $\mathbb{R}$:

$$\underbrace{\mathrm{ch}(x) =}_{\text{définition}} \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2} \underbrace{=}_{\text{fonction paire}} \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \underbrace{= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots}_{\text{puissances paires de } x}$$

$$\underbrace{\mathrm{sh}(x) =}_{\text{définition}} \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} \underbrace{=}_{\text{fonction impaire}} \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \underbrace{= x + \frac{x^3}{3!} + \dots}_{\text{puissances impaires de } x}$$

Indication :

La série entière de l'exercice fait penser aux développements en série entière des fonctions cosinus hyperbolique et cosinus

Rappel : $\cos(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$

$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Solution de l'exercice :

1) Calcul du rayon de convergence :

La série entière s'écrit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$

avec $a_n = \frac{1}{(2n)!}$. Appliquons d'Alembert :

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(2n)!}{(2(n+1))!} = \frac{(2n)!}{(2n+2)!}$$

$$= \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Le rayon de convergence est $R = +\infty$.

2) Calcul de la fonction somme.

D'après 1), la fonction $b(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n)!} x^n$

est bien définie sur $\mathbb{R}$.

- Si $x \geqslant 0$, on a $x = (\sqrt{x})^2$ et

$$b(x) = b((\sqrt{x})^2) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2n)!} \left((\sqrt{x})^2\right)^n$$

$$= \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2n)!} (\sqrt{x})^{2n} = \mathrm{ch}(\sqrt{x})$$

- Si $x \leq 0$ on peut écrire $x = -(\sqrt{-x})^2$

$$h(x) = h\left(-(\sqrt{-x})^2\right) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n)!} \left(-(\sqrt{-x})^2\right)^n$$

$$= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n)!} (-1)^n (\sqrt{-x})^{2n} = \cos(\sqrt{-x})$$

- Conclusion :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n)!} x^n = h(x) = \begin{cases} \operatorname{ch}(\sqrt{x}) & \text{si } x \geq 0 \\ \cos(\sqrt{-x}) & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$