



ECOLE DES PONTS PARISTECH, ISAE-SUPAERO,  
ENSTA PARIS, TELECOM PARIS, MINES PARIS,  
MINES SAINT-ETIENNE, MINES NANCY, IMT ATLANTIQUE,  
ENSAE PARIS, CHIMIE PARISTECH – PSL.  
ECOLE POLYTECHNIQUE, ARTS et METIERS,  
ESPCI PARIS, SUOPTIQUE, ENAC.

## Admission par voie universitaire

### EPREUVES de SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 2 heures.

L'emploi de tous documents (dictionnaires, imprimés, ...) et de tous appareils (traductrices, calculatrices électroniques, ...) est interdit dans cette épreuve.

Cette épreuve est un questionnaire à choix multiples.

Vous devez composer les spécialités en fonction  
de vos choix au moment de l'inscription.

Questions 1 à 15 pour l'épreuve d'Electricité, Electronique et Automatique ;

Questions 16 à 30 pour l'épreuve d'Informatique ;

Questions 31 à 45 pour l'épreuve de Sciences du Vivant ;

Questions 46 à 60 pour l'épreuve de Mécanique ;

Questions 61 à 75 pour l'épreuve de Génie Civil ;

Questions 76 à 90 pour l'épreuve de Chimie.

Questions 91 à 105 pour l'épreuve de Probabilités/Statistique.

Chaque question peut admettre, de façon variable,  
entre une et cinq réponses correctes.

Dans toutes les épreuves vous indiquerez les assertions correctes.

Exprimer les réponses exactes en noircissant la ou les cases correspondantes.

Toute réponse incorrecte sera pénalisée.

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement  
renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Respectez scrupuleusement les consignes de remplissage  
des cases du document réponse.

## QCM - Proba-Stats

### Questions 91 à 105

Toutes les variables (ou vecteurs) aléatoires de ce QCM sont définies sur le même espace  $\Omega$ . L'espérance et la variance d'une variable aléatoire  $U$  sont notées  $\mathbb{E}(U)$  et  $\mathbb{V}(U)$  respectivement. On adopte les mêmes notations si  $U$  est un vecteur aléatoire :  $\mathbb{E}(U)$  est le vecteur des espérances de chaque composante de  $U$  et  $\mathbb{V}(U)$  la matrice de variance-covariance de  $U$ . La fonction de répartition et la densité (quand elle existe) de  $U$  sont notées  $F_U$  et  $f_U$ .

91. 20% des bacheliers poursuivant des études choisissent de s'orienter dans des études de droit. Parmi ces nouveaux étudiants en droit, 75% sont des femmes. Parmi les femmes néo-bacheliers poursuivant leurs études, 25% choisissent le droit. Quel est le pourcentage de femmes parmi les nouveaux bacheliers poursuivant leurs études ?

Note : ces chiffres ne correspondent pas à la réalité en France en 2021.

- A. 6,67%.
- B. 55%.
- C. 60%.
- D. 75%.
- E. 93,75%.

92. Une urne  $U_1$  contient  $n$  boules blanches et  $2n$  boules noires, une urne  $U_2$  contient  $n$  boules blanches et  $n$  boules noires. On échange une boule de l'urne  $U_1$  et avec une boule dans l'urne  $U_2$  au hasard et sans observer leur couleur.

Après cet échange de boules dans les urnes quelle est la probabilité de tirer une boule blanche dans l'urne  $U_1$  ?

- A. La probabilité d'avoir 2 boules blanches est  $\frac{2n^2+1}{6n^2}$ .
- B. La probabilité d'avoir 2 boules blanches est  $\frac{6n+1}{18n}$ .
- C. La probabilité d'avoir 2 boules blanches est  $\frac{2n+1}{6n}$ .
- D. La probabilité d'avoir 2 boules blanches est  $\frac{6n^2+1}{18n^2}$ .
- E. Aucune des propositions précédentes n'est vraie.

93. Un statisticien distrait prend les transports en commun avec un parapluie. Quand il pleut, il n'oublie jamais son parapluie dans le bus, mais quand il ne pleut pas il oublie son parapluie avec une probabilité  $1/2$ . Il vit dans une région humide où la probabilité de précipitation est de  $1/4$ . On suppose que les conditions météorologiques sont indépendantes à chaque déplacement du statisticien distrait. On note  $T$  le nombre de trajets effectués avant de devoir racheter un parapluie ( $T = 1$  si le statisticien oublie son parapluie dès le premier trajet).

L'espérance de  $T$  est :

- A. 7.
- B. 4.
- C. supérieure à 8.
- D. supérieure à 2.
- E. Aucune des propositions précédentes n'est vraie.

94. La tribu de Borel sur  $\mathbb{R}$  est :

- A. l'ensemble des parties de  $\mathbb{R}$ .
- B. un ensemble de parties de  $\mathbb{R}$  stable par intersection.
- C. l'ensemble des parties dénombrables de  $\mathbb{R}$ .
- D. un ensemble de parties de  $\mathbb{R}$  stable par intersection dénombrable.
- E. l'ensemble des intervalles de  $\mathbb{R}$ .

95. Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires à valeur réelle et  $X$  une variable aléatoire à valeur réelle.

- A. Si  $X_n$  converge vers  $X$  en probabilité, alors  $X_n$  converge vers  $X$  dans  $L^2$  (i.e.  $\mathbb{E}((X_n - X)^2)$  tend vers 0).
- B. Si  $X_n$  converge vers  $X$  dans  $L^2$  (i.e.  $\mathbb{E}((X_n - X)^2)$  tend vers 0), alors  $X_n$  converge vers  $X$  dans  $L^1$  (i.e.  $\mathbb{E}(|X_n - X|)$  tend vers 0).
- C. Si  $X_n$  converge vers  $X$  dans  $L^1$  (i.e.  $\mathbb{E}(|X_n - X|)$  tend vers 0), alors  $X_n$  converge vers  $X$  en loi.
- D. Si  $X_n$  converge vers  $X$  dans  $L^1$  (i.e.  $\mathbb{E}(|X_n - X|)$  tend vers 0), alors  $X_n$  converge vers  $X$  dans  $L^2$  (i.e.  $\mathbb{E}((X_n - X)^2)$  tend vers 0).
- E. Si  $X_n$  converge presque-sûrement vers  $X$ , alors  $X_n$  converge vers  $X$  en probabilité.

96. Soit  $X$  une variable aléatoire positive admettant un moment d'ordre 2.

- A.  $\mathbb{V}(X) \leq a\mathbb{P}(X > a)$  pour tout  $a > 0$ .
- B.  $\mathbb{V}(X) \geq a\mathbb{P}(X > a)$  pour tout  $a > 0$ .
- C.  $\mathbb{V}(X) \leq a\mathbb{P}(X < a)$  pour tout  $a > 0$ .
- D.  $\mathbb{V}(X) \geq a\mathbb{P}(X < a)$  pour tout  $a > 0$ .
- E. Aucune des propositions précédentes n'est vraie.



97. On note  $\mathcal{A}$ , l'ensemble des variables aléatoires  $X$  à valeur dans  $[0; 1]$  telle que  $\mathbb{E}(X) = 1/2$ .

- A.  $\sup_{X \in \mathcal{A}} \mathbb{V}(X) = 1/4$ .
- B.  $\sup_{X \in \mathcal{A}} \mathbb{V}(X) = 1/2$ .
- C.  $\sup_{X \in \mathcal{A}} \mathbb{V}(X) = 3/4$ .
- D.  $\sup_{X \in \mathcal{A}} \mathbb{V}(X) = \infty$ .
- E. Aucune des propositions précédentes n'est vraie.

98. Soit  $(X_i)_{i \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que  $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = 0,5$ .

- A.  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  converge en probabilité et presque sûrement vers 0,5 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .
- B.  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$  est un estimateur sans biais de  $\mathbb{V}(X_1)$ .
- C.  $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i$  converge en loi vers une distribution  $\mathcal{N}(0, 1)$ .
- D.  $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (X_i - 0,5)$  converge en loi vers une distribution  $\mathcal{N}(0, 1)$ .
- E. Aucune des propositions précédentes n'est vraie.

99. Soit  $X$  une variable aléatoire dont la densité est  $f_X(x) = \frac{2}{\pi(1+x^2)} \mathbb{1}\{x \geq 0\}$  et soit  $Y = \ln(|X|)$ .

- A. La densité de  $Y$  est  $f_Y(y) = \frac{2}{\pi \ln(|y|)(1+\exp(2y))}$ .
- B. La densité de  $Y$  est  $f_Y(y) = \frac{2 \ln(|y|)}{\pi(1+\exp(2y))}$ .
- C. La densité de  $Y$  est  $f_Y(y) = \frac{2}{\pi \exp(y)(1+\exp(2y))}$ .
- D. La densité de  $Y$  est  $f_Y(y) = \frac{2 \exp(y)}{\pi(1+\exp(2y))}$ .
- E. La densité de  $Y$  est  $f_Y(y) = \frac{2}{\pi(1+\exp(2y))}$ .

100. Soit  $X$  une variable normale centrée réduite (donc sa densité est  $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ ) et soit  $Y = X^2$ .

- A. La densité de  $Y$  est  $f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \mathbb{1}_{\{y \geq 0\}}$ .
- B. La densité de  $Y$  est  $f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}} \mathbb{1}_{\{y \geq 0\}}$ .
- C. La densité de  $Y$  est  $f_Y(y) = \frac{1}{y\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \mathbb{1}_{\{y \geq 0\}}$ .
- D. La densité de  $Y$  est  $f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \mathbb{1}_{\{y \geq 0\}}$ .
- E. Aucune des propositions précédentes n'est vraie.

101. Soit  $(U, V)$  deux variables aléatoires uniformes et indépendantes sur  $[0; 1]$ . On note  $M = \max(U, V)$ .

- A. La fonction de répartition de  $M$  est  $F_M(m) = \frac{\ln(m+1)}{\ln(2)} \mathbb{1}\{m \in [0; 1]\}$ .
- B. La fonction de répartition de  $M$  est  $F_M(m) = m^2 \mathbb{1}\{m \in [0; 1]\}$ .
- C. La fonction de répartition de  $M$  est  $F_M(m) = (2^m - 1) \mathbb{1}\{m \in [0; 1]\}$ .
- D. La fonction de répartition de  $M$  est  $F_M(m) = \frac{2m^2}{m^2+1} \mathbb{1}\{m \in [0; 1]\}$ .
- E. Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

102. Soit  $(X_n)_{n \geq 0}$  une suite de variables aléatoires qui tend en loi vers une loi normale centrée réduite.

- A.  $\mathbb{E}(\ln(|X_n| + 1))$  tend vers  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \ln(|u| + 1) e^{-u^2/2} du$ .
- B.  $\mathbb{E}\left(\frac{X_n}{1+|X_n|}\right)$  tend vers 0.
- C.  $\mathbb{E}(X_n)$  tend vers 0.
- D.  $\mathbb{P}(X_n < x)$  tend vers  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .
- E. Aucune des propositions précédentes n'est vraie.

103. Soit  $X$  une variable aléatoire symétrique (i.e.  $\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(-X \leq x)$ ) et pour  $t \in \mathbb{R}$  soit  $\phi(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$ .

- A.  $\phi$  est nécessairement une fonction paire sur  $\mathbb{R}$ .
- B.  $\phi$  est nécessairement une fonction impaire sur  $\mathbb{R}$ .
- C.  $\phi$  est nécessairement une fonction à valeur réelle.
- D.  $\phi$  est nécessairement une fonction périodique de période  $2\pi$ .
- E. Aucune des propositions précédentes n'est vraie.

104. On note  $\Phi$  la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et  $\Phi^{-1}$  sa fonction réciproque. Soit  $\hat{\theta}_n$  un estimateur de  $\theta_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0)$  converge en loi vers une normale centrée de variance  $\sigma^2 > 0$  quand  $n$  tend vers  $\infty$ . Soit  $\hat{\sigma}_n^2$  un estimateur qui converge en probabilité vers  $\sigma^2$  quand  $n$  tend vers l'infini.

On cherche à construire un intervalle de confiance de  $\theta_0$ .

- A.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(|\hat{\theta}_n - \theta_0| \leq \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_n^2}{n}} \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\right) = 1 - \alpha$  pour  $\alpha \in ]0; 1[$ .
- B.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(|\hat{\theta}_n - \theta_0| \leq \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_n^2}{n}} \Phi\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\right) = 1 - \alpha$  pour  $\alpha \in ]0; 1[$ .
- C.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(|\hat{\theta}_n - \theta_0| \leq \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_n^2}{n}} \Phi^{-1}(1 - \alpha)\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$  pour  $\alpha \in ]0; 1[$ .
- D.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(|\hat{\theta}_n - \theta_0| \leq \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_n^2}{n}} \Phi^{-1}(1 - \alpha)\right) = 1 - \alpha$  pour  $\alpha \in ]0; 1[$ .
- E.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(|\hat{\theta}_n - \theta_0| \leq \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_n^2}{n}} \Phi(1 - \alpha)\right) = 1 - \alpha$  pour  $\alpha \in ]0; 1[$ .

105. Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de densité  $f_U(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\}$ . La densité de la variable aléatoire  $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$  est :

A.  $f_R(r) = \frac{1}{2}e^{-\frac{r}{2}} \mathbb{1}_{\{r \geq 0\}}$ .

B.  $f_R(r) = re^{-\frac{r^2}{2}} \mathbb{1}_{\{r \geq 0\}}$ .

C.  $f_R(r) = e^{-r} \mathbb{1}_{\{r \geq 0\}}$ .

D.  $f_R(r) = 2re^{-r^2} \mathbb{1}_{\{r \geq 0\}}$ .

E. Aucune des propositions précédentes n'est vraie.

