Université Paris Saclay **MDD 102**
L1S1 **Algèbre**

Contrôle des connaissances 2

Relations, arithmétique, nombres complexes

À partir du 2 décembre 2024, au début d'un TD, votre enseignant.e vous soumettra quatre exercices, choisis dans la liste ci-dessous. Vous aurez une heure pour y répondre. Le barème est de cinq points par exercice.

Exercice 2.1. Sur l'ensemble $\mathbb{R}^2$, on définit la relation R par :

$$(x, y)R(x', y') \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$$

1. Montrer que R est une relation d'équivalence.
2. Représenter graphiquement dans le plan $\mathbb{R}^2$ la classe d'équivalence de l'élément $(0, 1)$.

Exercice 2.2. **1.** On définit la relation R sur $\mathbb{N}$ par :

$$xRy \quad \Leftrightarrow \quad \exists z \in \mathbb{N}, y = x + z$$

Montrer que R est une relation d'ordre. Donner une autre caractérisation de la relation xRy.
2. On définit la relation R sur $\mathbb{Z}$ par :

$$xRy \quad \Leftrightarrow \quad \exists z \in \mathbb{Z}, y = x + z$$

Montrer que R est une relation d'équivalence. Combien y a-t-il de classes d'équivalence pour la relation R.

Exercice 2.3. Soit S l'ensemble des suites de réels $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour deux éléments u et v de S, on définit

$$uRv \quad \Leftrightarrow \quad u = v \text{ ou } (\exists n_0 \in \mathbb{N}\ (u_{n_0} < v_{n_0} \text{ et } \forall n < n_0, u_n = v_n))$$

Autrement dit, $u = v$ ou $u_{n_0} < v_{n_0}$ pour le plus petit entier n_0 tel que $u_{n_0} \neq v_{n_0}$.
Montrer que R est une relation d'ordre total sur S.

Exercice 2.4. On écrit $\mathbb{Z}^*$ pour $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Sur l'ensemble $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, on définit la relation R par :

$$(a, b)R(a', b') \quad \Leftrightarrow \quad ab' = a'b$$

1. Montrer que R est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$.
2. Soit l'application canonique $p : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \to (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/R$ et

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* & \to & \mathbb{Q} \\ & & (a, b) & \mapsto & \frac{a}{b} \end{array}$$

Montrer que pour tous (a,b) et (a',b') dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$, si $(a,b)R(a',b')$, alors $f(a,b) = f(a',b')$. En déduire qu'il existe une application $g : (\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*)/R \to \mathbb{Q}$ telle que $f = g\circ p$.
3. Montrer que g est une bijection.

Exercice 2.5. **1.** Montrer que 96 et 37 sont premiers entre eux, et trouver u et v dans $\mathbb{Z}$ tels que $96u + 37v = 1$.
2. On se place dans $\mathbb{Z}/96\mathbb{Z}$. Déduire de la question précédente un élément y de $\mathbb{Z}/96\mathbb{Z}$ tel que $\overline{37}\times y = \overline{1}$.
3. En utilisant ce qui précède, résoudre dans $\mathbb{Z}/96\mathbb{Z}$ l'équation $\overline{37}\times x = \overline{8}$.

Exercice 2.6. **1.** Montrer que 23 et 15 sont premiers entre eux, et trouver u et v dans $\mathbb{Z}$ tels que $23u + 15v = 1$.
2. Soient x et y dans $\mathbb{Z}$, on pose $n = 23uy + 15vx$ où u et v sont les entiers trouvés à la question précédente. Montrer que $n \equiv x\ [23]$ et $n \equiv y\ [15]$.
3. Application : trouver un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \equiv 5\ [23]$ et $n \equiv 3\ [15]$.

Exercice 2.7. On se place dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.
1. Calculer les premières puissances de $\overline{2}$ jusqu'à trouver un entier $n_0 \geq 1$ tel que $\overline{2}^{n_0} = \overline{1}$.
2. Avec l'entier n_0 de la question précédente, montrer que pour tous q et r dans $\mathbb{N}$, $\overline{2}^{qn_0+r} = \overline{2}^r$.
3. Quel est le reste de la division euclidienne de 10^{11} par 3.
4. Montrer que 7 divise $9^{(10^{11})} + 5$.

Exercice 2.8. **1.** Calculer la valeur de x^2 pour tous les éléments x de $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.
2. Dresser un tableau avec la valeur de x^2+y^2 pour tous x et y dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ (on donnera les résultats sous la forme $\overline{n}$ avec $0 \leq n \leq 6$). À quelle condition a-t-on $x^2 + y^2 = \overline{0}$?
3. Application : soient a et b dans $\mathbb{Z}$. On suppose que 7 divise $a^2 + b^2$. Montrer que 7 divise a et 7 divise b.

Exercice 2.9. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 4z + 4 + 2i = 0$.

Exercice 2.10. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $w_n = e^{i\frac{\pi}{2^n}}$, $a_n = \cos(\frac{\pi}{2^n})$ et $b_n = \sin(\frac{\pi}{2^n})$.
1. Justifier que $b_n > 0$ pour tout $n \geq 1$.
2. Trouver les racines carrées de w_n sous forme trigonométrique.
3. Calculer les racines carrées de w_n sous forme algébrique. [On écrira le résultat en fonction de a_n et b_n, sans utiliser la question précédente.]
4. Déduire de ce qui précède un expression de a_{n+1} et de b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.