

Examen 2023 - 24

A.1) $j_1 \rightarrow \hat{J}_1^2$ / $\hat{J}_1^2 |j_1, m_1\rangle = \hbar^2 j_1(j_1+1) |j_1, m_1\rangle$
 $m_1 \rightarrow \hat{J}_{1z}$ / $\hat{J}_{1z} |j_1, m_1\rangle = \hbar m_1 |j_1, m_1\rangle$
 $j_2 \rightarrow \hat{J}_2^2$
 $m_2 \rightarrow \hat{J}_{2z}$

A.2) $\hat{J} = \hat{J}_1 + \hat{J}_2$ est un opérateur de moment cinétique avec $j \in [|j_1 - j_2|, \dots, j_1 + j_2]$ et $-j \leq m < j$

A.3) $|n, l, s, j, m_j, i, m_i\rangle$

n	$\hat{H}_0$	Hamiltonien
l	$\hat{L}^2$	Moment cinétique orbital
m	$\hat{L}_z$	Projection z du moment cinétique orbital
s	$\hat{S}^2$	Moment cinétique de spin de l'électron
j	$\hat{J}^2$	Moment cinétique total de l'e-
m_j	$\hat{J}_z$	Projection z du moment cinétique total de l'e-
i	$\hat{I}^2$	Moment cinétique total du noyau
m_i	$\hat{I}_z$	Projection z du moment cinétique total du noyau

$$A.4) \Delta E_n^{(1)} = \langle n | \hat{W} | n \rangle$$

↑
Hamiltonien de perturbation

$$\Delta E_n^{(2)} = \Delta E_n^{(1)} + \sum_k \frac{|\langle n | \hat{W} | k \rangle|^2}{E_n - E_k}$$

A.5) (a) $m \in [-l, \dots, l]$ or $m = \frac{1}{2} \notin [-1, 0, 1]$
 $\Rightarrow$ n'existe pas

(b) Existe : $l > n$
 $j \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}]$
 $m_j \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

(c) N'existe pas $\hat{F} = \hat{I} + \hat{J} = \frac{5}{2} \notin [1, 2, 3, 4]$
 $[I-J, \dots, I+J]$

(d) N'existe pas $m_F \notin [-F, \dots, F]$

A.6) Transition dipolaire électrique

$$\Delta l = \pm 1, \text{ } \cancel{\times}$$

$$\Delta m = \pm 1, 0$$

$$\Delta J = \pm 1, 0$$

$$\Delta \overline{m}_j = \pm 1, 0$$

$$\Delta F = \pm 1, 0$$

$$\Delta m_j = \pm 1, 0$$

$$\Delta m_i = \pm 1, 0$$

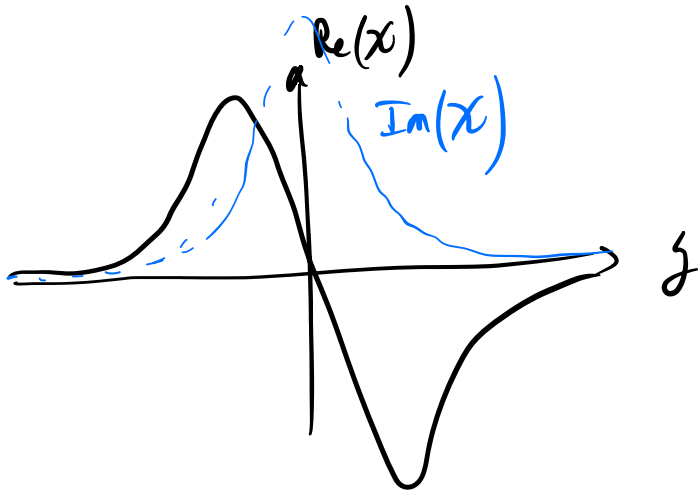
$$\Delta m_F = \pm 1, 0$$

$$(a) \left. \begin{array}{l} \Delta l = +1 \\ \Delta j = +1 \\ \Delta m_j = 0 \end{array} \right\} \text{OK}$$

$$(b) \Delta l = 0 \Rightarrow \text{pas de transition}$$

$$(c) \Delta l = 1 \\ \Delta m_f = 2 \Rightarrow \text{pas possible avec un seul photon.}$$

$$\text{A.7]} \quad n^2 = 1 + \chi \quad \Rightarrow \quad n = 1 + \underbrace{\frac{\text{Re}(\chi)}{L}}_{\text{dispersion}} + i \underbrace{\frac{\text{Im}(\chi)}{L}}_{\text{attenuation}}$$



B.I: Exercice : Precession de Larmor.

$$\text{B.I.1]} \quad H_I = - \vec{\hat{p}} \cdot \vec{B} \quad \text{et} \quad B = B_z \vec{U}_z \\ = - \hat{p}_z B_z = - \gamma_0 \hat{S}_z B_z$$

$$\text{B.I.2]} \quad \text{ECOC : } (\hat{S}^+, \hat{S}_z, (H_I))$$

$$| \frac{1}{2}, m_z = \frac{1}{2} \rangle$$

$$| \frac{1}{2}, m_z = -\frac{1}{2} \rangle$$

$$H_I = -\mu_0 B_x \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

B.I.3] Equation de Schrodinger

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H \Psi$$

$$= -\frac{\mu_0 B_x}{2} \left[a(t) |a\rangle - b(t) |b\rangle \right]$$

$$= i\hbar \left(\frac{\partial a(t)}{\partial t} |a\rangle + \frac{\partial b(t)}{\partial t} |b\rangle \right)$$

En projetant sur $|a\rangle$ et $|b\rangle$, on obtient

$$\begin{cases} \frac{\partial a(t)}{\partial t} = i \frac{\mu_0 B_x}{2\hbar} a(t) \\ \frac{\partial b(t)}{\partial t} = -i \frac{\mu_0 B_x}{2\hbar} b(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(t) = a(0) e^{i \frac{\mu_0 B_x}{2\hbar} t} \\ b(t) = b(0) e^{-i \frac{\mu_0 B_x}{2\hbar} t} \end{cases}$$

B.I.4] $\hat{S}_x \hat{S}_z = i \hat{S}_y$

$$S_z = -i (S_x S_y - S_y S_x) = \frac{-i}{4} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Etats propres de $S_z \times \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ b(0) = \frac{i}{\sqrt{2}} \end{cases}$

$$S_z \times \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

B.I.S États propres de $\hat{S}_y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$P_{S_y = \frac{1}{2}}(t) = |\langle S_y = \frac{1}{2} | \Psi(t) \rangle|^2$$

$$= \frac{1}{2} \times |a(t) + b(t)|^2$$

$$= \frac{1}{4} \times \begin{pmatrix} e^{i\varphi(t)} & +i e^{-i\varphi(t)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\varphi(t)} & -i e^{i\varphi(t)} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \left(1 + 1 + -i e^{2i\varphi(t)} + i e^{-2i\varphi(t)} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \sin \left(2 \times \frac{\mu_B B_z}{\hbar} t \right) \right)$$

$$P_{S_y = -\frac{1}{2}}(t) = 1 - P_{S_y = +\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \sin \left(\frac{\mu_B B_z}{\hbar} t \right) \right)$$

B 2.6 B' définirai alors l'axe de quantification selon z qui est la direction dans laquelle l'état vient

d'être projeté

→ l'état de départ serait un état propre de l'évolution et n'évoluerait plus

$$\forall t \quad P_{Sg} = \pm \frac{1}{2} \approx \frac{1}{2}$$

B.II Problème

B.II.1) On note E_I^{He} l'énergie d'ionisation de 1 électron protégé par les 2 protons du noyau

L'énergie de l'état $|2, 0, 0\rangle \times |1, 0, 0\rangle$ est

$$\frac{E_I^{He}}{2^2} + \frac{E_I^{He}}{2^2} = \frac{E_I^{He}}{2} > E_I^{He}$$

L'état $|1, 0, 0\rangle \otimes |E, l, m\rangle$ a pour énergie

$$E_I^{He} + E$$

Les deux états ont la même énergie si $E = -\frac{E_I^{He}}{2}$

B.II.2) L'auto ionisation correspond au passage

spontané de l'état $|2, 0, 0\rangle \times |2, 0, 0\rangle$ à l'état

$|1, 0, 0\rangle \otimes |E, l, m\rangle$ où l'un des électrons redescend en énergie alors que l'autre passe au dessus du seuil d'ionisation

B.II.3) L'interaction $\hat{W}$ couple la dynamique des fonctions d'onde des deux électrons

C'est exactement le principe d'échange d'énergie expliqué en question B.II.2)

B.II.4) $w = \frac{2\pi}{\hbar} \rho(E_i) |W_{fi}|^2 \delta(E_f - E_i)$ ← conservation de l'énergie. (2)

↑
taux de transition
de l'état initial
vers un état
du continuum.

↑
densité
d'état ou
densité de modes
 $\frac{dN}{dE}$

↑
élément de matrice
de couplage entre l'état initial
et l'état final f du continuum.

B.II.5) Emission en onde sphérique. $\frac{e^{ikr}}{r}$: Somme d'une onde sortante et d'une onde entrante / l'onde soit bien définie en 0

B.II.6) $\int \Psi_{k,0,0}^*(\vec{r}) \Psi_{k,0,0}(\vec{r}) d^3r = \int_0^L 4\pi r^2 \times \frac{1}{2L\pi} \frac{\sin^2(kr)}{r^2} dr$

$$= \frac{2}{L} \int_0^L \sin^2(kr) dr$$

$$\stackrel{x=kr}{=} \frac{2}{Lk} \int_0^{kL} \sin^2(x) dx$$

On pose $kL = n\pi + \varepsilon$
 $n \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon \in [0, \pi[$

$$= \frac{2}{Lk} \times \left(n \frac{\pi}{2} + \varepsilon \right) \rightarrow \frac{2}{n\pi} \times \frac{n\pi}{2} = 1$$

et $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$

$$Lk \gg 1 \Leftrightarrow n \gg 1$$

B.II.7) $\hat{p}^2 \Psi_{k,0,0} = -\hbar^2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r \frac{\sin kr}{k} \right) = \underbrace{+\hbar^2 k^2}_{\text{Valeur Propre}} \underbrace{\frac{\sin kr}{k}}_{\Psi_{k,0,0}}$

et $\Psi_{k,0,0}$ indépendant de θ et φ .

$$\hookrightarrow \hat{L}^2 \Psi_{k,0,0} = 0 \quad \text{et} \quad \hat{L}_z \Psi_{k,0,0} = 0.$$

B.II.8) $E = \langle \Psi_{k,0,0} | \frac{\hat{p}^2}{2m} | \Psi_{k,0,0} \rangle = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$

BII9 $\Psi_{k,0,0}(L)=0 \Rightarrow \sin(kL)=0 \Leftrightarrow kL = n\pi \quad n \in \mathbb{N}$
 $\Leftrightarrow k = n \frac{\pi}{L}$

Volume d'un mode (linéaire) $dk = \frac{\pi}{L}$

$$\frac{dN}{dk} = \frac{1}{\pi/L} = \frac{L}{\pi}$$

Nombre de mode dans une tranche d'énergie dE

$$dN = \frac{dN}{dE} dE = \underbrace{\frac{dN}{dk}}_{\frac{L}{\pi}} \times \underbrace{\frac{dk}{dE}}_{\frac{1}{\hbar} \sqrt{\frac{m}{2E}}} dE$$

$$k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE}$$

$$dk = \frac{1}{\hbar} \sqrt{\frac{m}{2E}} dE$$

BII10

W_{fi} : élément de matrice de couplage entre i et f .
 Sans interaction coulombienne entre les 2 e^- , les états $|2,0,0\rangle$ sont des états propres et donc stables.
 Le couplage vient de l'interaction coulombienne.

$$W_{fi} = \langle \text{final} | \hat{W} | \text{initial} \rangle$$

$$= \iint d^3\vec{r}_1 d^3\vec{r}_2 \Psi_{1,0,0}^*(\vec{r}_1) \Psi_{k,l,m}^*(\vec{r}_2) \underbrace{W}_{\frac{e^2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}} \Psi_{2,0,0}(\vec{r}_1) \Psi_{2,0,0}(\vec{r}_2)$$

BII11 Pour $\vec{r}_i$, les orbitales sont de moment angulaire nul

dans W_{fi} , on aura un terme de la sorte

$$\int d\theta_1 d\varphi_1 \sin\theta_1 Y_{0,0}^*(\theta_1, \varphi_1) Y_{lm}(\theta_1, \varphi_1) Y_{0,0}(\theta_1, \varphi_1)$$

L'électron ejecté aura donc $l=0$

← Ce terme est nul pour $l \neq 0$
 ↳ somme des moments cinétique.

B II 11)

$$W_{fi} = \frac{1}{2a_1^3} \times \frac{1}{46\pi^2} \times \frac{2}{\sqrt{a_1^3}} \times \frac{16\pi^2}{\sqrt{2L\pi}} \int_{r_1} \int_{r_2} \left(1 - \frac{r_1}{2a_1}\right) \left(1 - \frac{r_2}{2a_1}\right) e^{-\frac{r_1+r_2}{2a_1}} \frac{e^{-\frac{r_1}{a_1}}}{\max(r_1, r_2)} \frac{\sin(kr_2)}{r_2} dr_1 dr_2$$

B II 12) $E = 26 \text{ eV}$ correspond à l'énergie de sortie de l'électron éjecté lorsque l'on conserve l'énergie de la transition $2S - 2S \rightarrow 1S, 1P, 1m$.

$$\begin{aligned} \text{B II 13)} \quad W &= \frac{\cancel{\hbar}}{\hbar} \times \frac{\cancel{K}}{\hbar} \sqrt{\frac{m}{2E}} \times \frac{1}{K} \times 9 \cdot 10^{-46} \\ &= \frac{1.4}{10^{-68}} \sqrt{\frac{9 \cdot 10^{-31}}{2 \times 26 \times 1.6 \cdot 10^{-19}}} \times 9 \cdot 10^{-46} \\ &= 1.4 \times 10^{68-6-46} \times 27 \times \frac{1}{\sqrt{75}} \approx 4.5 \cdot 10^{18} \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

≈ 9

↑
l'état $2S - 2S$

l'auto-ionisation en moins d'une femto seconde