TD III – Optimisation sous contraintes

1 Contraintes d'égalité

Exercice 1.1 (Points critiques sous contrainte ★)**.** Soient $f, g : \mathbb{R}_+^{*2} \to \mathbb{R}$ les fonctions définies par

$$f(x,y) = xy \quad \& \quad g(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

1. Déterminer les points critiques de f sous la contrainte $g = 2/3$.

2. Déterminer les points critiques de g sous la contrainte $f = 9$.

Exercice 1.2 (Distance d'un point à une partie ★)**.** On considère la partie

$$\mathcal{C} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \& \quad x + y + z = 0\}.$$

Le but de cet exercice est de trouver le point de $\mathcal{C}$ le plus proche du point A de coordonnées $(1,1,0)$ (au sens de la distance euclidienne).

1. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (x+y)^2.$$

Déterminer le minimum de f sur l'ensemble

$$\mathcal{E} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 + (x+y)^2 = 1\}.$$

2. Montrer que

(a) Si $(x,y,z) \in \mathcal{C}$, alors $(x,y) \in \mathcal{E}$.

(b) Si $(x,y) \in \mathcal{E}$, alors $(x,y,-x-y) \in \mathcal{C}$.

3. En utilisant la fonction $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $F(x,y,z) = d(M,A)$, où M est le point de coordonnées (x,y,z), déterminer le point de $\mathcal{C}$ le plus proche de A.

Exercice 1.3 (Mesure de Gibbs)**.** On considère un système physique pouvant être dans N états distincts, l'état i correspondant à une énergie E_i. Un *état statistique du système* est la donnée de $p = (p_1, \cdots, p_N) \in [0;1]^N$ tel que

$$\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$$

et l'énergie correspondante est

$$\mathcal{E}(p) = \sum_{i=1}^{N} p_i E_i.$$

1. On définit une fonction $S : \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}$, appelée *entropie*, par

$$S(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{N} x_i \ln(x_i),$$

avec la convention $0 \ln(0) = 0$. Justifier que pour $\mathcal{E}_0$ fixé, S admet un maximum sur $\{p \mid \mathcal{E}(p) = \mathcal{E}_0\}$.

2. Soit $\widetilde{p}$ ce maximum. En utilisant les multiplicateurs de Lagrange, en déduire qu'il existe $\lambda, Z \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $1 \leqslant i \leqslant N$,

$$\widetilde{p}_i = \frac{1}{Z} e^{-\lambda E_i}.$$

En physique statistique, $\lambda = 1/k_B T$ *où* T *est la température du système et* k_B *la* CONSTANTE DE BOLTZMANN.

3. On pose $S(\mathcal{E}) = S(\widetilde{p})$. Montrer que S est dérivable et calculer sa dérivée en fonction de λ.

Exercice 1.4 (INÉGALITÉ ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUE)**.** Soient $f, g : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$ les fonctions définies par

$$f(x_1, \cdots, x_n) = (x_1 \cdots x_n)^{1/n} \quad \& \quad g(x_1, \cdots, x_n) = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

1. Montrer que la fonction f admet un maximum global sur l'ensemble $\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid g(x) = 1\}$.

2. Déterminer ce maximum.

3. Montrer que f et g sont des fonctions homogènes de degré 1, c'est-à-dire que $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ et $g(\lambda x) = \lambda g(x)$.

4. Déduire de ce qui précède que $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^n$.

Exercice 1.5 (UN CONTRE-EXEMPLE ★)**.** Soient $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ les fonctions définies respectivement par

$$f(x, y) = y \quad \& \quad g(x, y) = y^3 - x^2.$$

On note $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\}$.

1. Justifier que f admet un minimum sur E et qu'il est atteint en $(0, 0)$.

2. Existe-t-il $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla f(0, 0) = \lambda \nabla g(0, 0)$?

3. Quels sont les points (x, y) pour lesquels $\nabla f(x, y)$ est colinéaire à $\nabla g(x, y)$?

Exercice 1.6 (COMME AU PARTIEL ★)**.** On considère l'ensemble $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 - 1)^2 + y^2 \leqslant 4\}$ ainsi que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = xy$.

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est compact.

2. En déduire que f admet un minimum global et un maximum global $\mathcal{C}$.

3. (a) Calculer le gradient de f.
(b) On admet que l'intérieur de $\mathcal{C}$ est $\mathring{\mathcal{C}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 - 1)^2 + y^2 < 4\}$. Montrer que f possède un unique point critique dans $\mathring{\mathcal{C}}$ et le déterminer.

4. (a) Décrire le bord $\partial \mathcal{C}$ de $\mathcal{C}$ à l'aide d'une contrainte d'égalité.
(b) En utilisant les multiplicateurs de Lagrange, montrer que si (x, y) est un point critique sous contrainte, alors $x^2 - 1 = y^2/2x^2$.
(c) Déterminer les points critiques sous contrainte de f sur $\partial \mathcal{C}$.

5. Déduire de ce qui précède le minimum et le maximum de f sur $\mathcal{C}$.

2 Contraintes d'inégalité

Exercice 2.1 (Entraînement ★). On cherche à maximiser la fonction $f(x,y) = -x^2 - y^2$ sous les contraintes $2x + y \leqslant 2$, $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$.

1. Justifier qu'un minimum global existe.
2. Vérifier que les contraintes sont qualifiées en tout point.
3. Déterminer ce minimum.

Exercice 2.2 (Conditions KKT ★). Pour $\beta \in \mathbb{R}$, on considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = 2x + \beta y.$$

qu'on veut étudier sous les contraintes

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x^2 + y^2 - 5 & \leqslant & 0 \\ x - y - 2 & \leqslant & 0 \end{array} \right.$$

1. Montrer que les contraintes sont toujours qualifiées.
2. Déterminer les valeurs de β pour lesquelles le point $(-1, 2)$ est un point critique sous contraintes.
3. Dans ce cas, est-ce un minimum global ?

Exercice 2.3 (Insuffisance des conditions KKT ★). On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x + y$$

qu'on cherche à optimiser sous la contrainte $xy \leqslant 1$.

1. En quels points les contraintes sont-elles qualifiées ?
2. Trouver l'unique point pour lequel les conditions KKT sont vérifiées.
3. À l'aide d'un dessin, montrer que ces points ne sont pas des extrema locaux.

Exercice 2.4 (Au secours du CA ★). Une entreprise fabrique deux modèles de petites voitures, les modèles X et Y. Le modèle X, le plus abordable, se vend à 1€ pièce. Quant au modèle Y – beaucoup plus sophistiqué – il se vend à 3€. Le coût de fabrication, exprimé en €, est donné par la fonction suivante :

$$C(x,y) = 5x^2 + 5y^2 - 2xy - 2x - 1000,$$

où x est le nombre de petites voitures du modèle X et y est le nombre de petites voitures du modèle Y. On suppose que les jouets fabriqués sont tous écoulés sur le marché.

1. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, donner $P(x,y)$, le profit de l'entreprise lorsqu'elle a vendu x jouets de modèle X et y jouets de modèle Y.
2. La capacité de production de l'entreprise est au total de 20 jouets par jour. En supposant que l'entreprise tourne à plein régime, trouver la répartition entre les modèles de type X et Y permettant de maximiser le profit quotidien. Calculer dans ce cas le profit réalisé (on ne tiendra pas compte des contraintes $x, y \geqslant 0$, en justifiant pourquoi).

3. Le conseil d'administration de l'entreprise s'interroge sur la pertinence de vouloir produire à pleine capacité. Il se demande s'il ne peut pas augmenter le profit en produisant autrement. Pouvez-vous aider le conseil d'administration ?

Exercice 2.5 (Comme à l'examen ★). On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = x(1 + y^2)$$

qu'on cherche à minimiser sous les contraintes

$$\begin{cases} x^2 + y^2 & \leqslant & 4 \\ y & \geqslant & 1 - \dfrac{x^2}{4} \end{cases}$$

1. Justifier l'existence d'un minimum global.

2. Montrer que les contraintes sont qualifiées en tout point.

3. (a) Écrire le système KKT associé à ce problème.

(b) On suppose que les deux contraintes sont actives. Calculer x et y, μ_1 et μ_2.

(c) On suppose maintenant qu'une seule contrainte est active. Résoudre dans ce cas le système.

4. Déduire de ce qui précède le minimum recherché.

3 Optimisation linéaire

Exercice 3.1 (Roulez jeunesse ! ★). Un fabricant d'automobiles produit deux modèles de véhicules, un gros et un petit. La tension du marché lui assure de vendre tout ce qu'il produit, tant que les prix restent raisonnables, à savoir 16000 € pour les grosses voitures et 10000 € pour les petites. La fabrication est limitée par deux matières premières : l'acier dont il possède 600 unités et le caoutchouc dont il possède 400 unité. Il faut une unité de caoutchouc et une d'acier pour produire une petite voiture tandis qu'il faut une unité de caoutchouc mais deux d'acier pour produire une grosse voiture.

1. Le fabricant veut maximiser son profit, formuler ce problème comme un problème d'optimisation linéaire en notant x et y le nombre de grosses et de petites voitures produites respectivement, puis le résoudre (on pourra ignorer dans un premier temps les contraintes $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$). *Attention : il s'agit d'un problème de maximisation, les multiplicateurs doivent donc être positifs.*

2. Comment la solution est-elle modifiée si l'on dispose initialement de 700 unités d'acier ?

3. Même question avec 900 unités d'acier.

4. (a) Un concurrent en manque de matières premières propose au fabricant de lui racheter ses stocks. Ce dernier peut accepter à condition que le prix d'achat lui permette de gagner au moins autant que s'il vendait ses voitures. En notant u et v les prix d'achats du caoutchouc et de l'acier respectivement, formuler ce problème du point de vue du concurrent comme un problème d'optimisation linéaire.

(b) Montrer que le dual de ce problème est équivalent au problème de l'énoncé.

(c) En utilisant la dualité de Lagrange, en déduire la solution du problème du concurrent.

Exercice 3.2 (Sauve qui peut !)**.** On doit organiser un pont aérien pour transporter 1600 personnes et 90 tonnes de bagages. Les avions disponibles sont de deux types : 12 du type A et 9 du type B. Le type A peut transporter, à pleine charge, 200 personnes et 6 tonnes de bagages. Le type B, 100 personnes et 6 tonnes de bagages. La location d'un avion du type A coûte 80.000 € et la location d'un avion du type B coûte 20.000 €. L'objectif est de minimiser le coût de location total.

1. Formuler ce problème comme un problème d'optimisation linéaire, en notant x et y le nombre d'avions de type A et B respectivement qui sont utilisés.

2. En admettant qu'il existe une solution, justifier que les contraintes $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$ sont inactives.

3. Donner la formulation matricielle de la solution de ce problème.

4. Montrer qu'il n'y a pas de solution telle que $x \neq 12$ et $y \neq 9$.

5. Résoudre le problème.

Exercice 3.3 (L'or ou la terre ? ★)**.** Une entreprise souhaite investir 100000 € dans deux types de produits : des actions qui coûtent 2000 € l'unité et rapportent sur un an 800 € l'unité ou des lots de terrain coûtant 300 € du mètre carré et engendrant un profit sur un an de 100 € du mètre carré.

1. En notant x le nombre d'actions achetée et y le nombre de mètres carrés achetés, écrire le problème consistant à optimiser le profit annuel.

2. Faire un dessin de l'ensemble des points satisfaisant les contraintes.

3. Justifier l'existence d'un profit maximum.

4. En utilisant le Théorème de la solution-sommet, déterminer le maximum précédent.