Planche 6

Maitriser les bases

Dans les exercices suivants, on aura parfois besoin de la définition ci-dessous :

Définition 3: Base de E

Soit E une space vectoriel. Une famille $\{v_1, \dots, v_p\}$ de vecteurs de E est appelée *base* de E si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

- elle est génératrice de E, c'est-à-dire $E = \text{Vect}(v_1, \dots, v_p)$
- elle est libre

Exercice 61 ().
Soit E un espace vectoriel et $\{v_1, \dots, v_n\}$ une base de E. Soit $x \in E$.
Justifier qu'il existe une et une seule solution $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ permettant d'écrire x sous la forme :

$$x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$$

Dans certains raisonnements mathématiques, on procède parfois "par identification" des termes à gauche et à droite d'une égalité, quel est le rapport avec la propriété ci-dessus ?

Correction

D'une part, puisque $\{v_1, \dots, v_n\}$ est une base de E, elle est en particulier génératrice. Donc il y a au moins une solution.
Par l'absurde, supposons qu'il existe deux différentes. On a alors $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tels que

$$x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$$

Mézalor,

$$(\lambda_1 - \alpha_1)v_1 + (\lambda_2 - \alpha_2)v_2 + \cdots + (\lambda_n - \alpha_n)v_n = 0$$

Et comme $\{v_1, \dots, v_n\}$ est une base de E elle est en particulier libre, et donc nécessairement

$$\lambda_1 - \alpha_1 = 0 \qquad \lambda_2 - \alpha_2 = 0 \quad \cdots \quad \lambda_n - \alpha_n = 0$$

Et ainsi

$$\lambda_1 = \alpha_1 \qquad \lambda_2 = \alpha_2 \quad \cdots \quad \lambda_n = \alpha_n$$

Ce qui est absurde puisqu'on avait supposé que les deux solutions étaient différentes.
Ainsi, il y a une unique solution possible.
On peut donc conclure que lorsqu'on a une égalité du type

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$$

alors

$$\lambda_1 = \alpha_1 \qquad \lambda_2 = \alpha_2 \quad \cdots \quad \lambda_n = \alpha_n$$

ce qui est exactement le principe d'identification des termes de part et d'autre d'une égalité.

Exercice 62 ().
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, soient $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de u et E_λ l'espace propre associé.
Démontrer que si $x \in E_\lambda$ alors $u(x) \in E_\lambda$.

Correction

Soit $x \in E_\lambda$. On sait alors que $u(x) = \lambda x$. Montrons que $u(x) \in E_\lambda$, c'est-à-dire que $u(u(x)) = \lambda u(x)$.
Or on a :

$$\begin{aligned} u(u(x)) &= u(\lambda x) && \text{car } u(x) = \lambda x \\ &= \lambda u(x) && \text{par linéarité} \end{aligned}$$

et c'est ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 63 ().
Déterminer si les endomorphismes suivants sont surjectifs ou non, par un des deux arguments suivants :

- soit en prenant un vecteurs quelconque de l'espace d'arrivée et en trouvant un ou des antécédents possibles
- soit en trouvant un vecteurs de l'espace d'arrivée qui ne peut pas avoir d'antécédent

1. L'application linéaire
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x+y+z \\ x-y \\ y+z \end{pmatrix} \end{array}$$
2. Soit $n \geq 1$ un entier. On pose $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible et on considère l'application linéaire φ_M définie pour tout $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :
$$\varphi_M(P) = MP$$
3. L'application linéaire
$$I : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto & F \end{array}$$
où F est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$
4. L'application linéaire u qui à toute fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ associe la fonction $u(f)$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :
$$u(f)(x) = xf(x)$$

Correction

1. *Soit $V \in \mathbb{R}^3$. On cherche $X \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(X) = V$. Si X existe pour n'importe quel V alors cela montre la surjectivité de f. Or*
$$f(X) = V \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = V \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} V$$

car en effet la matrice est inversible puisqu'elle est de déterminant -1. *Donc* X *existe bien et donc l'application est surjective.*

2. *Soit* $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *Montrons que* Y *a au moins un antécédent par l'application* φ_M, *c'est-à-dire que l'on cherche* $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que*

$$Y = \varphi_M(P)$$

Posons $P = M^{-1}Y$. *Alors on a :*

$$\varphi_M(P) = MP = MM^{-1}Y = Y$$

Donc P *est bien un antécédent de* Y *et donc toute matrice a un antécédent. L'application* φ_M *est donc surjective.*

3. *On remarque que l'image par* I *d'une fonction continue* f *est la primitive de* f *s'annulant en* 0. *En particulier, toutes les images sont donc dérivables (et leur dérivée est leur antécédent).*

Ainsi, une fonction continue mais non dérivable (par exemple la fonction valeur absolue) ne peut pas avoir d'antécédent par l'application I. *Elle n'est donc pas surjective.*

4. *Tout élément de* $\mathrm{Im}(u)$ *est une fonction s'annulant en* 0 *puisque pour tout fonction* $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *:*

$$u(f)(0) = 0 \times f(0) = 0$$

Ainsi, $\mathrm{Im}(u) \neq \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *puisque n'importe quelle fonction continue ne s'annulant pas en* 0 *(par exemple la fonction exponentielle) n'est pas dans* $\mathrm{Im}(u)$.

Exercice 64 ().

À l'aide du lemme de Steinitz, que peut-on dire immédiatement, en terme de caractéristiques (libre, liée, génératrice ou non) :

1. d'une famille de 4 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$?
2. d'une famille de 2 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$?

Proposer une généralisation sous la forme de deux phrases à compléter :

- Dans un espace de dimension n, une famille possédant ..... vecteurs est forcément .....
- Dans un espace de dimension n, une famille possédant .... vecteurs ne peut pas être ....

Correction

Une base (famille libre et génératrice) de $\mathbb{R}^3$ *est formée de 3 vecteurs donc*

1. *Une famille de 4 vecteurs dans* $\mathbb{R}^3$ *ne peut pas être libre puisqu'une famille libre doit avoir un nombre de vecteurs inférieur ou égal au nombre de vecteurs d'une famille génératrice de* $\mathbb{R}^3$, *donc en particulier inférieur ou égal à la dimension de l'espace (3 ici).*
2. *Une famille de 2 vecteurs dans* $\mathbb{R}^3$ *ne peut pas être génératrice puisqu'une famille génératrice doit avoir au moins autant de vecteurs qu'une famille libre, donc en particulier au moins autant de vecteurs qu'une base (donc 3 ici).*

- *Dans un espace de dimension* n, *une famille possédant strictement plus de* n *vecteurs est forcément liée.*

- *Dans un espace de dimension n, une famille possédant strictement moins de n vecteurs ne peut pas être génératrice.*

Exercice 65 ().
Soit E un espace vectoriel, et soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$ (on dit que f et g commutent). On dit qu'un sous-espace vectoriel F de E est stable par g (ou $g-$stable), si :

$$\text{pour tout } x \in F,\ g(x) \in F$$

1. Montrer que $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$ sont stables par g.
2. Montrer que tout sous-espace propre de f est stable par g.

Correction

Cet exercice représente parfaitement le fait que lorsque l'on traduit le but, c'est-à-dire lorsqu'on écrit précisément ce que l'on veut montrer, alors tout devient facile, ou du moins on sait comment débuter car on sait ce qu'on doit calculer !

1. *Montrons que $\operatorname{Im} f$ est stable par g, c'est à dire que (je traduis ce que je veux montrer) $g(\operatorname{Im} f) \subset \operatorname{Im} f$.*
   Soit $y = f(x) \in \operatorname{Im} f$ (je prends un élément quelconque de l'ensemble de gauche de l'inclusion). Montrons alors que $g(y) \in \operatorname{Im} f$ (je veux montrer qu'il est dans l'ensemble de droite).
   On a : (je pars de $g(y)$ puisque je veux montrer que c'est $f(\text{quelqu'un})$, et j'utilise les propriétés à ma disposition)
   $$g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x) = f \circ g(x) = f(g(x)) \in \operatorname{Im} f$$
   Ainsi $g(\operatorname{Im} f) \subset \operatorname{Im} f$.
   Montrons maintenant que $\ker f$ est stable par g, c'est à dire que (je traduis ce que je veux montrer) $g(\ker f) \subset \ker f$.
   (je prends un élément quelconque de l'ensemble de gauche de l'inclusion, c'est à dire un $g(x)$ avec $x \in \ker f$)
   Soit $x \in \ker f$. On a alors $f(x) = 0$. Montrons alors que $g(x) \in \ker f$, c'est-à-dire que (je traduis ce que je veux montrer) $f(g(x)) = 0$.
   On a :
   $$f(g(x)) = f \circ g(x) = g \circ f(x) = g(f(x)) = g(0) = 0$$
   la dernière égalité étant vraie car g est une application linéaire.
   Ainsi $g(x) \in \ker f$ et l'inclusion est montrée.
2. *Soit λ une valeur propre de f et E_λ le sous-espace propre associé (l'ensemble des vecteurs propres pour la valeur propre λ).*
   Montrons que $g(E_\lambda) \subset E_\lambda$.
   Soit $x \in E_\lambda$ et montrons que $g(x) \in E_\lambda$, c'est-à-dire que (je traduis ce que je veux montrer) $f(g(x)) = \lambda x$.
   On a :
   $$f(g(x)) = g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x)$$
   Ainsi $g(x)$ est un vecteur propre pour la valeur propre λ, c'est-à-dire $g(x) \in E_\lambda$. Et donc E_λ est stable par g.

Exercice 66 ().
Dans la robotique ou la dynamique des véhicules (aéronefs, automobiles, trains, etc.), il est souvent nécessaire de (re)construire des trajectoires sous des contraintes de position et de vitesse. Par exemple lors de la conception d'un trajet d'un drone ou d'un véhicule autonome, ou pour construire des rails, il faut passer par plusieurs points précis à des moments donnés et il est aussi nécessaire de contrôler sa vitesse en ces points pour assurer des transitions douces ou respecter des contraintes mécaniques (par exemple, éviter des accélérations soudaines qui pourraient endommager le drone ou affecter la qualité des images prises en vol).
Reconstruire une trajectoire en se basant sur ce type de contrainte s'appelle une *interpolation.*

Pour simplifier la situation, on se place dans le cadre suivant :
Un drone autonome parcourt de manière parfaitement rectiligne une rangée d'une exploitation maraîchère d'un bout à l'autre afin de faire une acquisition d'images en vue aérienne.
On note $Q(t)$ la position du drone au temps t le long de son axe rectiligne. La position de départ est prise comme origine de l'axe, et la longueur de la rangée est de 2 (l'unité étant la centaine de mètres)
Le temps t est mesuré en minutes et le drone effectue le parcourt en 1 minute.

1. Quelles sont les valeurs de $Q(0)$ et $Q(1)$? *On pose également pour toute la suite les contraintes $Q'(0) = 0$ et $Q'(1) = 0$, qui correspondent à des vitesses initiales et finales nulles*
2. On modélise $Q(t)$ par un polynôme de degré 3 : $Q(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$
   (a) Expliquer pourquoi on peut écrire $Q(t) = tR(t)$ avec $R(t)$ un polynôme de degré 2.
   (b) Déterminer $R(t)$ (puis $Q(t)$) à l'aide des contraintes de l'énoncé.
3. Ici on a donc trouver un seul polynôme Q possible. S'il en est de même pour n'importe quelles valeurs des 4 contraintes évoquées dans la question 1), expliquer ce que cela signifie en terme d'injectivité et/ou surjectivité de l'application linéaire suivante

$$c \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^4 \\ Q & \mapsto & \big(Q(0), Q(1), Q'(0), Q'(1)\big) \end{array}$$

4. Montrer que cette application linéaire est injective.

Correction

1. On a immédiatement d'après l'énoncé $Q(0) = 0$ et $Q(1) = 2$.

2. On pose $Q(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$.

(a) Puisque $Q(0) = a_0$, la condition $Q(0) = 0$ donne $a_0 = 0$ et donc on peut factoriser par t le polynôme :

$$Q(t) = t(a_1 + a_2 t + a_3 t^2)$$

(On pourrait aussi le justifier ainsi : $Q(0) = 0$ donc 0 est une racine de Q, et donc on peut factoriser $Q(t)$ par $(t - 0)$, c'est-à-dire par t (de manière générale, si α est racine de $Q(t)$, on peut factoriser Q par $(t - \alpha)$)

(b) On a $Q(1) = a_1 + a_2 + a_3$, $Q'(0) = a_1$, $Q'(1) = a_1 + 2a_2 + 3a_3$ donc

$$\begin{cases} Q(1) = 2 \\ Q'(0) = 0 \\ Q'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + \ \ a_2 + \ \ a_3 = 2 \\ a_1 \qquad\qquad\quad = 0 \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \qquad a_2 + \ \ a_3 = 2 \\ a_1 \qquad\qquad = 0 \\ \qquad 2a_2 + 3a_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_2 + a_3 = 2 \\ a_1 = 0 \\ a_3 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = 6 \\ a_1 = 0 \\ a_3 = -4 \end{cases}$$

Ainsi :

$$Q(t) = t(6t - 4t^2)$$

3. *Le fait de pouvoir trouver un polynôme Q pour n'importe quelle contrainte signifie que l'application c est surjective. En effet, la donnée des contrainte correspond à la donnée d'un élément de l'espace d'arrivée, et trouver Q signifie trouver un antécédent. Autrement dit, pour tout vecteur de l'espace d'arrivée on trouve un antécédent, ce qui est exactement la définition de la surjectivité !*

   Le fait de trouver une seule solution (et pas plusieurs) correspond à l'injectivité. En effet, si on pouvait trouver plusieurs solutions pour le polynôme Q, cela revient à trouver plusieurs antécédents qui ont la même image (plusieurs polynômes pour la même contrainte), ce qui est le contraire de l'injectivité.

4. *Pour montrer que c est injective on montre que $\ker c = \{0\}$, c'est-à-dire que l'on résout l'équation $c(Q) = (0, 0, 0, 0)$ et on cherche à montrer que $Q = 0$.*

   Or, en notant toujours $Q(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$, on a :

$$\begin{cases} Q(0) = 0 \\ Q(1) = 0 \\ Q'(0) = 0 \\ Q'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_1 = 0 \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_2 + a_3 = 0 \\ a_1 = 0 \\ 2a_2 + 3a_3 = 0 \end{cases}$$

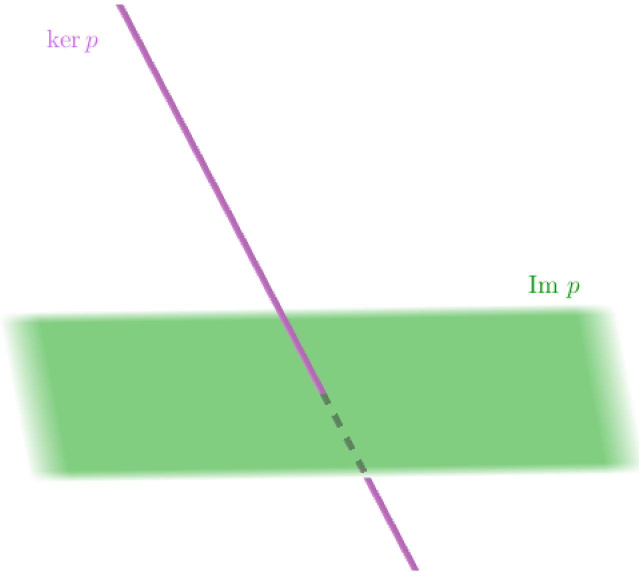
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_2 + a_3 = 0 \\ a_1 = 0 \\ a_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_1 = 0 \\ a_3 = 0 \end{cases}$$

   Ainsi la seule solution possible est $Q = 0$ et donc l'application est injective.

Exercice 67 ().

Soit E, soit $p \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $p \circ p = p$ (p est alors appelé *projecteur*).

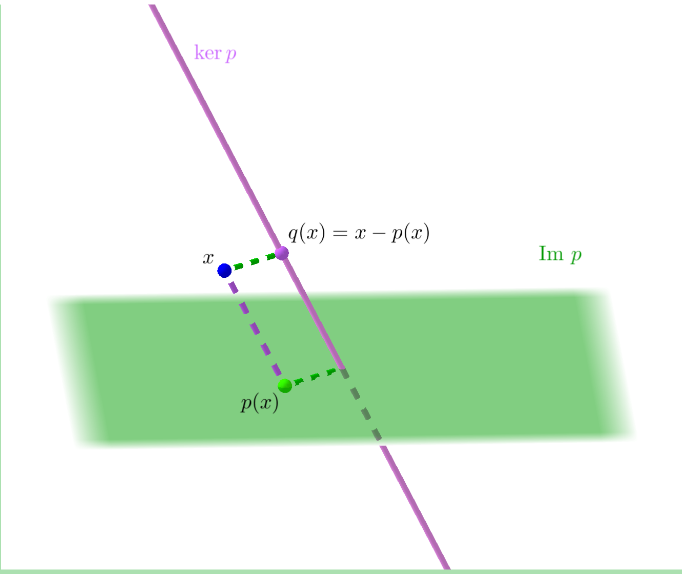
1. Montrer que $\operatorname{Im} p = \ker(\mathrm{id} - p)$.
2. Démontrer que $\operatorname{Im} p$ et $\ker p$ sont en somme directe.
3. En utilisant notamment l'écriture $x = p(x) + x - p(x)$, démontrer que $E = \operatorname{Im} p \oplus \ker p$
4. On se place dans $\mathbb{R}^3$. Dans la configuration ci-dessous, représenter un vecteur x quelconque, les vecteurs $p(x)$ et $x - p(x)$, et illustrer graphiquement la décomposition $x = p(x) + x - p(x)$.



Correction

1. *Procédons par double inclusion. On pose* $q = \mathrm{id} - p$.
   - *Montrons que* $\operatorname{Im} p \subset \ker q$. *Soit donc* $y \in \operatorname{Im} p$. *Il existe alors* $z \in E$ *tel que* $y = p(z)$.
     Montrons que $y \in \ker q$, *c'est-à-dire que* $q(y) = 0$. *Or, par définition de* q *:*
     $$q(y) = q(p(z)) = p(z) - p(p(z))$$
     Or p *est un projecteur donc* $p(p(z)) = p(z)$ *et donc finalement* $q(y) = 0$.
   - *Montrons que* $\ker q \subset \operatorname{Im} p$. *Soit donc* $y \in \ker q$. *Alors* $q(y) = 0$.
     Montrons que $y \in \operatorname{Im} p$, *c'est-à-dire qu'il existe* $x \in E$ *tel que* $y = p(x)$. *Or puisque* $q = \mathrm{id} - p$ *on a*
     $$0 = q(y) = y - p(y)$$
     Donc $y = p(y) \in \operatorname{Im} p$. *Ce qui conclut l'inclusion.*

   Par double inclusion, on a donc l'égalité $\operatorname{Im} p = \ker q$.
2. *Montrons que la somme est directe, i.e. que* $\operatorname{Im} p \cap \ker p = \{0\}$. *Soit donc* $x \in \operatorname{Im} p \cap \ker p$. *On a alors* $p(x) = 0$ *et il existe* $z \in E$ *tel que* $x = p(z)$. *On a donc* $p(p(z)) = 0$. *Or* $p^2 = p$ *donc* $p(z) = 0$, *i.e.* $x = 0$.
3. *On sait déjà que* $\ker p \oplus \operatorname{Im} p \subset E$ *puisqu'une somme de vecteurs de* E *reste dans* E *par stabilité par combinaison linéaire. Montrons l'inclusion réciproque. Soit* $x \in E$, *alors :*
   $$x = \underbrace{p(x)}_{\in \operatorname{Im} p} + \underbrace{x - p(x)}_{\in \ker p}$$
   puisque $p(x - p(x)) = p(x) - p(p(x)) = p(x) - p(x) = 0$.
4.



Exercice 68 ().
Soit E un espace vectoriel et soit f un endomorphisme de E. En manipulant à chaque fois l'égalité $f(x) = \lambda x$, déterminer les valeurs propres potentielles de f lorsque :

1. $f \circ f = f$
2. $f \circ f = \mathrm{id}$
3. $f \circ f = -\mathrm{id}$

Déterminer, pour chacune des trois propriétés ci-dessus, un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ la vérifie *(on privilégiera une définition géométrique par une phrase en français plutôt qu'une définition avec une formule)*

Correction

Un réel λ est valeur propre s'il existe un vecteur $x \neq 0$ tel que $f(x) = \lambda x$.

1. *Dans ce cas, on aurait d'une part d'après la relation $f \circ f = f$:*

$$f(f(x)) = f(x) = \lambda x$$

et d'autre part par linéarité de f :

$$f(f(x)) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda^2 x$$

Ainsi, $\lambda x = \lambda^2 x$ et donc $(\lambda - \lambda^2)x = 0$. Comme $x \neq 0$, la seule solution est que $\lambda - \lambda^2 = 0$, ce qui conduit à $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$, qui sont donc les deux seules valeurs propres potentielles possibles.

2. *Dans ce cas, on aurait d'une part d'après la relation $f \circ f = \mathrm{id}$:*

$$f(f(x)) = x$$

et d'autre part par linéarité de f :

$$f(f(x)) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda^2 x$$

Ainsi, $x = \lambda^2 x$ et donc $(1-\lambda^2)x = 0$. Comme $x \neq 0$, la seule solution est que $1-\lambda^2 = 0$, ce qui conduit à $\lambda == -1$ ou $\lambda = 1$, qui sont donc les deux seules valeurs propres potentielles possibles.

3. En procédant exactement de la même manière, on trouve $\lambda = i$ ou $\lambda = -i$.

Exercice 69 ().
Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $p \geq 1$ un entier et soit $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ une famille libre de vecteurs de E.

1. Soit $w \in E$. Démontrer que :
$$\{v_1, v_2, \ldots, v_p, w\} \text{ est libre } \Leftrightarrow w \notin \mathrm{Vect}(v_1, v_2, \ldots, v_p)$$
2. En déduire un algorithme permettant de construire une base de E en partant d'une famille libre de vecteurs de E.
3. À l'aide de cette construction, démontrer que si une famille libre possède $\dim(E)$ vecteurs, alors c'est une base.

Exercice 70 ().
Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies, tels que $F \subset E$.

1. Soit $\mathcal{B}$ une base de F. Vue en tant que famille de vecteurs de E, $\mathcal{B}$ n'est pas forcément une base de E : parmi les deux propriétés caractéristiques (libre et génératrice), quelle propriété peut être perdue ? Laquelle est conservée ?
2. En appliquant alors judicieusement le lemme de Steinitz, démontrer que $\dim(F) \leq \dim(E)$.
3. Dans cette question, on suppose de plus que $\dim(F) = \dim(E)$. **À l'aide du résultat de la dernière question de l'exercice précédent,** démontrer qu'une base de F est également une base de E. Qu'en déduire sur F et E ?

Exercice 71 ().
Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Soit $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ une famille génératrice de E, qui est liée.

1. Démontrer que pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$:
$$v_i \in \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_{i-1}, v_{i+1} \ldots, v_p) \Rightarrow \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_p) = E$$
2. En déduire un algorithme permettant de construire une base de E en partant d'une famille génératrice.
3. À l'aide de cette construction, démontrer que si une famille génératrice possède $\dim(E)$ vecteurs, alors c'est une base.