Planche 6

Maitriser les bases

Dans les exercices suivants, on aura parfois besoin de la définition ci-dessous :

Définition 3: Base de E

Soit E une space vectoriel. Une famille $\{v_1, \dots, v_p\}$ de vecteurs de E est appelée *base* de E si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

- elle est génératrice de E, c'est-à-dire $E = \text{Vect}(v_1, \dots, v_p)$
- elle est libre

Exercice 61 ().
Soit E un espace vectoriel et $\{v_1, \dots, v_n\}$ une base de E. Soit $x \in E$.
Justifier qu'il existe une et une seule solution $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ permettant d'écrire x sous la forme :

$$x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$$

Dans certains raisonnements mathématiques, on procède parfois "par identification" des termes à gauche et à droite d'une égalité, quel est le rapport avec la propriété ci-dessus ?

Exercice 62 ().
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, soient $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de u et E_λ l'espace propre associé.
Démontrer que si $x \in E_\lambda$ alors $u(x) \in E_\lambda$.

Exercice 63 ().
Déterminer si les endomorphismes suivants sont surjectifs ou non, par un des deux arguments suivants :

- soit en prenant un vecteurs quelconque de l'espace d'arrivée et en trouvant un ou des antécédents possibles
- soit en trouvant un vecteurs de l'espace d'arrivée qui ne peut pas avoir d'antécédent

1. L'application linéaire
$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x+y+z \\ x-y \\ y+z \end{pmatrix} \end{array}$$
2. Soit $n \geq 1$ un entier. On pose $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible et on considère l'application linéaire φ_M définie pour tout $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :
$$\varphi_M(P) = MP$$
3. L'application linéaire
$$\begin{array}{rccc} I : & \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ & f & \mapsto & F \end{array}$$
où F est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$

4. L'application linéaire u qui à toute fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ associe la fonction $u(f)$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :
$$u(f)(x) = xf(x)$$

Exercice 64 ().
À l'aide du lemme de Steinitz, que peut-on dire immédiatement, en terme de caractéristiques (libre, liée, génératrice ou non) :

1. d'une famille de 4 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$?
2. d'une famille de 2 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$?

Proposer une généralisation sous la forme de deux phrases à compléter :

- Dans un espace de dimension n, une famille possédant ..... vecteurs est forcément .....
- Dans un espace de dimension n, une famille possédant .... vecteurs ne peut pas être ....

Exercice 65 ().
Soit E un espace vectoriel, et soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$ (on dit que f et g commutent). On dit qu'un sous-espace vectoriel F de E est stable par g (ou $g-$stable), si :

$$\text{pour tout } x \in F,\ g(x) \in F$$

1. Montrer que $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$ sont stables par g.
2. Montrer que tout sous-espace propre de f est stable par g.

Exercice 66 ().
Dans la robotique ou la dynamique des véhicules (aéronefs, automobiles, trains, etc.), il est souvent nécessaire de (re)construire des trajectoires sous des contraintes de position et de vitesse. Par exemple lors de la conception d'un trajet d'un drone ou d'un véhicule autonome, ou pour construire des rails, il faut passer par plusieurs points précis à des moments donnés et il est aussi nécessaire de contrôler sa vitesse en ces points pour assurer des transitions douces ou respecter des contraintes mécaniques (par exemple, éviter des accélérations soudaines qui pourraient endommager le drone ou affecter la qualité des images prises en vol).
Reconstruire une trajectoire en se basant sur ce type de contrainte s'appelle une *interpolation*.

Pour simplifier la situation, on se place dans le cadre suivant :
Un drone autonome parcourt de manière parfaitement rectiligne une rangée d'une exploitation maraîchère d'un bout à l'autre afin de faire une acquisition d'images en vue aérienne.
On note $Q(t)$ la position du drone au temps t le long de son axe rectiligne. La position de départ est prise comme origine de l'axe, et la longueur de la rangée est de 2 (l'unité étant la centaine de mètres)
Le temps t est mesuré en minutes et le drone effectue le parcourt en 1 minute.

1. Quelles sont les valeurs de $Q(0)$ et $Q(1)$? *On pose également pour toute la suite les contraintes $Q'(0) = 0$ et $Q'(1) = 0$, qui correspondent à des vitesses initiales et finales nulles*
2. On modélise $Q(t)$ par un polynôme de degré 3 : $Q(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$
   (a) Expliquer pourquoi on peut écrire $Q(t) = tR(t)$ avec $R(t)$ un polynôme de degré 2.
   (b) Déterminer $R(t)$ (puis $Q(t)$) à l'aide des contraintes de l'énoncé.

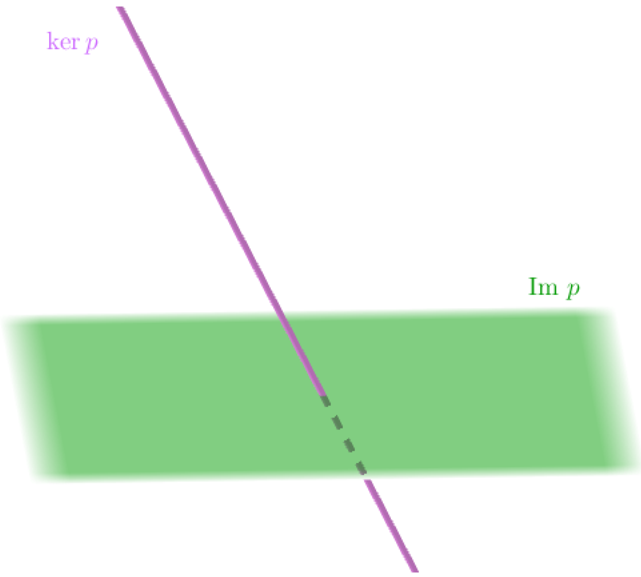
3. Ici on a donc trouver un seul polynôme Q possible. S'il en est de même pour n'importe quelles valeurs des 4 contraintes évoquées dans la question 1), expliquer ce que cela signifie en terme d'injectivité et/ou surjectivité de l'application linéaire suivante

$$\begin{array}{cccc} c & : & \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^4 \\ & & Q & \mapsto & \big(Q(0), Q(1), Q'(0), Q'(1)\big) \end{array}$$

4. Montrer que cette application linéaire est injective.

Exercice 67 ().
Soit E, soit $p \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $p \circ p = p$ (p est alors appelé *projecteur*).

1. Montrer que $\operatorname{Im} p = \ker(\mathrm{id} - p)$.
2. Démontrer que $\operatorname{Im} p$ et $\ker p$ sont en somme directe.
3. En utilisant notamment l'écriture $x = p(x) + x - p(x)$, démontrer que $E = \operatorname{Im} p \oplus \ker p$
4. On se place dans $\mathbb{R}^3$. Dans la configuration ci-dessous, représenter un vecteur x quelconque, les vecteurs $p(x)$ et $x - p(x)$, et illustrer graphiquement la décomposition $x = p(x) + x - p(x)$.



Exercice 68 ().
Soit E un espace vectoriel et soit f un endomorphisme de E. En manipulant à chaque fois l'égalité $f(x) = \lambda x$, déterminer les valeurs propres potentielles de f lorsque :

1. $f \circ f = f$
2. $f \circ f = \mathrm{id}$
3. $f \circ f = -\mathrm{id}$

Déterminer, pour chacune des trois propriétés ci-dessus, un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ la vérifie *(on privilégiera une définition géométrique par une phrase en français plutôt qu'une définition avec une formule)*

Exercice 69 ().
Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $p \geq 1$ un entier et soit $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ une famille libre de vecteurs de E.

1. Soit $w \in E$. Démontrer que :

$$\{v_1, v_2, \dots, v_p, w\} \text{ est libre } \Leftrightarrow w \notin \text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_p)$$

2. En déduire un algorithme permettant de construire une base de E en partant d'une famille libre de vecteurs de E.
3. À l'aide de cette construction, démontrer que si une famille libre possède $\dim(E)$ vecteurs, alors c'est une base.

Exercice 70 ().
Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies, tels que $F \subset E$.

1. Soit $\mathcal{B}$ une base de F. Vue en tant que famille de vecteurs de E, $\mathcal{B}$ n'est pas forcément une base de E : parmi les deux propriétés caractéristiques (libre et génératrice), quelle propriété peut être perdue ? Laquelle est conservée ?
2. En appliquant alors judicieusement le lemme de Steinitz, démontrer que $\dim(F) \leq \dim(E)$.
3. Dans cette question, on suppose de plus que $\dim(F) = \dim(E)$. **À l'aide du résultat de la dernière question de l'exercice précédent,** démontrer qu'une base de F est également une base de E. Qu'en déduire sur F et E ?

Exercice 71 ().
Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Soit $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ une famille génératrice de E, qui est liée.

1. Démontrer que pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$:

$$v_i \in \text{Vect}(v_1, v_2, v_{i-1}, v_{i+1} \dots, v_p) \Rightarrow \text{Vect}(v_1, v_2, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_p) = E$$

2. En déduire un algorithme permettant de construire une base de E en partant d'une famille génératrice.
3. À l'aide de cette construction, démontrer que si une famille génératrice possède $\dim(E)$ vecteurs, alors c'est une base.