Bilan Feuille 6 :

utilisation des bases / dimensions :

Soit F une famille de vecteurs, dans un espace E de dimension n

* Si F a strictement moins de n vecteurs, elle n'est pas génératrice de E.

* Si F a strictement plus de n vecteurs, elle ne peut pas être libre.

Théorème de la base incomplète :

Si F est libre, on peut la compléter (ajouter des vecteurs) pour qu'elle devienne une base de E.

(Algo : on trouve $v \in \text{Vect}(F)$, jusqu'à avoir n vecteurs)

Théorème d'extraction :

Si F est génératrice de E, on peut lui enlever des vecteurs jusqu'à obtenir une base.

(Algo : on enlève de F les vecteurs qui s'expriment en fonction des autres, jusqu'à avoir n vecteurs)

Conditions pour être une base :

- si F est libre <u>et</u> possède n vecteurs, alors c'est une base de E.
- si F est génératrice <u>et</u> possède n vecteurs,

alors c'est une base de E.

Egalité entre deux EV :

- si $E_1 \subset E_2$, $\dim(E_1) \leq \dim(E_2)$

"économise" la double inclusion

- si $E_1 \subset E_2$ et si $\dim(E_1) = \dim(E_2)$
  alors $E_1 = E_2$

Notions de coordonnées :

si $F = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E, et $x \in E$

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n$$

coordonnées du vecteur x dans la base F.

$$\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \underline{3}\times\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \underline{1}\times\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \underline{1}\times\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \underline{2}\times\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

vecteur des coordonnées : $\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\vdots\\\lambda_n\end{pmatrix}_{\mathcal{F}}$

$$\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad \text{avec } \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$$

Exemples de bases (bases canoniques) :

- $\mathbb{R}^3$: $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ dimension 3
- $\mathbb{R}_2[X]$: $1, X, X^2$) dimension 3
- $\mathbb{R}_n[X]$: $1, X, \dots, X^n$) dimension $n+1$

* $M_2(\mathbb{R})$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ dimension 4.

$$\dim(M_n(\mathbb{R})) = n^2$$

(n^2 positions pour le chiffre 1)

Outil de calcul :

Dans $\mathbb{R}^n$, avec $F = \{v_1, \ldots, v_n\}$

(le bon nombre de vecteurs pour être une base)

F est une base $\Leftrightarrow$ $\det(v_1, \ldots, v_n) \neq 0$

exemple : $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det(M) = 1 \neq 0$ donc $\mathcal{F}$ est une base.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ 0 \times$$

$$+ 0 \times$$

$$- 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$