Présentation
- Déroulement
- Programmes
- Difficultés

Fractions
- Dans l'histoire
- Unités fraction-naires
- Mesures de longueurs
- Au sujet des grandeurs
- Aspect ratio, aspect opérateur

Décimaux
- Intérêt
- Liens fraction écriture décimale
- Liens entier décimal
- Propriétés des décimaux et rationnels
- Écriture décimale et nombres réels.

Fractions

Mélanie Guenais

Novembre 2019

Plan

1. Présentation
   - Déroulement
   - Programmes
   - Difficultés
2. Fractions
   - Dans l'histoire
   - Unités fractionnaires
   - Mesures de longueurs
   - Au sujet des grandeurs
   - Aspect ratio, aspect opérateur
3. Décimaux
   - Intérêt
   - Liens fraction écriture décimale
   - Liens entier décimal
   - Propriétés des décimaux et rationnels
   - Écriture décimale et nombres réels.
4. Bibliographie

construire des nouveaux nombres

Présentation des concepts liés aux fractions

- Pourquoi des nouveaux nombres ?
- Quelles sont les difficultés liées à leur apprentissage ?
- Comment les construire ?
- Qu'ont-ils en commun avec les entiers ? Qu'apportent-ils de nouveau ?

construire des nouveaux nombres

Présentation des concepts liés aux fractions

- Pourquoi des nouveaux nombres ?
- Quelles sont les difficultés liées à leur apprentissage ?
- Comment les construire ?
- Qu'ont-ils en commun avec les entiers ? Qu'apportent-ils de nouveau ?

Activités collectives :

- Introduction des fractions par les mesures de longueurs et définition d'une fraction.
- Démonstration des propriétés des fractions en lien avec le nombre.
- Analyse de productions d'élèves.
- Analyse de manuels et mise en lien avec les pré-requis et les attendus des programmes
- Si le temps le permet : réflexions sur des activités possibles, jeux, énigmes etc...

Plan

1. Présentation
   - Déroulement
   - Programmes
   - Difficultés
2. Fractions
   - Dans l'histoire
   - Unités fractionnaires
   - Mesures de longueurs
   - Au sujet des grandeurs
   - Aspect ratio, aspect opérateur
3. Décimaux
   - Intérêt
   - Liens fraction écriture décimale
   - Liens entier décimal
   - Propriétés des décimaux et rationnels
   - Écriture décimale et nombres réels.
4. Bibliographie

Présentation
Déroulement
Programmes
Difficultés
Fractions
Dans l'histoire
Unités fractionnaires
Mesures de longueurs
Au sujet des grandeurs
Aspect ratio, aspect opérateur
Décimaux
Intérêt
Liens fraction écriture décimale
Liens entier décimal
Propriétés des décimaux et rationnels
Écriture décimale et nombres réels.

Le nombre, que disent les programmes ?

Extraits du programme 2015 de Cycle 1

La construction du nombre s'appuie sur

- *la notion de quantité,*
- *sa codification orale et écrite,*
- *l'acquisition de la suite orale des nombres et*
- *l'usage du dénombrement.*

Le nombre, que disent les programmes ?

Extraits du programme 2015 de Cycle 1

La construction du nombre s'appuie sur

- *la notion de quantité,*
- *sa codification orale et écrite,*
- *l'acquisition de la suite orale des nombres et*
- *l'usage du dénombrement.*

Mises en garde :

- *La connaissance de la suite orale de nombres ne constitue pas l'apprentissage du nombre mais y contribue.*
- *Les activités de dénombrement doivent éviter le comptage-numérotage*

Le nombre, que disent les programmes ?

Extraits du programme 2015 de Cycle 1

La construction du nombre s'appuie sur

- *la notion de quantité,*
- *sa codification orale et écrite,*
- *l'acquisition de la suite orale des nombres et*
- *l'usage du dénombrement.*

Mises en garde :

- *La connaissance de la suite orale de nombres ne constitue pas l'apprentissage du nombre mais y contribue.*
- *Les activités de dénombrement doivent éviter le comptage-numérotage*

Recommandations :

La maîtrise de la **décomposition des nombres** *est une condition nécessaire à la construction du nombre.*

Fractions

Mélanie Guenais

Présentation
Déroulement
Programmes
Difficultés

Fractions
Dans l'histoire
Unités fraction-naires
Mesures de longueurs
Au sujet des grandeurs
Aspect ratio, aspect opérateur

Décimaux
Intérêt
Liens fraction écriture décimale
Liens entier décimal
Propriétés des décimaux et rationnels
Écriture décimale et nombres réels.

La fraction est l'écriture d'un nombre !

L'enseignement des fractions en CM vus par les programmes 2018 :

Les fractions puis les décimaux apparaissent comme des nouveaux nombres introduits pour pallier l'insuffisance des nombres entiers, notamment pour mesurer des longueurs, des aires et repérer des points sur une demi-droite graduée. Le lien à établir avec les connaissances acquises à propos des entiers est essentiel.

Présentation
Déroulement
Programmes
Difficultés
Fractions
Dans l'histoire
Unités fractionnaires
Mesures de longueurs
Au sujet des grandeurs
Aspect ratio, aspect opérateur
Décimaux
Intérêt
Liens fraction écriture décimale
Liens entier décimal
Propriétés des décimaux et rationnels
Écriture décimale et nombres réels.

La fraction est l'écriture d'un nombre !

L'enseignement des fractions en CM vus par les programmes 2018 :

Les fractions puis les décimaux apparaissent comme des nouveaux nombres introduits pour pallier l'insuffisance des nombres entiers, notamment pour mesurer des longueurs, des aires et repérer des points sur une demi-droite graduée. Le lien à établir avec les connaissances acquises à propos des entiers est essentiel.

Les fractions comme mesures de grandeurs (BO 2018)

Mesurer une grandeur consiste à déterminer, après avoir choisi une unité, combien d'unités ou de fractionnements de cette unité sont contenus dans cette grandeur, pour lui associer un nombre (entier ou non).

Fractions

Mélanie Guenais

Présentation
Déroulement
Programmes
Difficultés

Fractions
Dans l'histoire
Unités fractionnaires
Mesures de longueurs
Au sujet des grandeurs
Aspect ratio, aspect opérateur

Décimaux
Intérêt
Liens fraction écriture décimale
Liens entier décimal
Propriétés des décimaux et rationnels
Écriture décimale et nombres réels.

La fraction est l'écriture d'un nombre !

L'enseignement des fractions en CM vus par les programmes 2018 :

Les fractions puis les décimaux apparaissent comme des nouveaux nombres introduits pour pallier l'insuffisance des nombres entiers, notamment pour mesurer des longueurs, des aires et repérer des points sur une demi-droite graduée. Le lien à établir avec les connaissances acquises à propos des entiers est essentiel.

Les fractions comme mesures de grandeurs (BO 2018)

Mesurer une grandeur consiste à déterminer, après avoir choisi une unité, combien d'unités ou de fractionnements de cette unité sont contenus dans cette grandeur, pour lui associer un nombre (entier ou non).

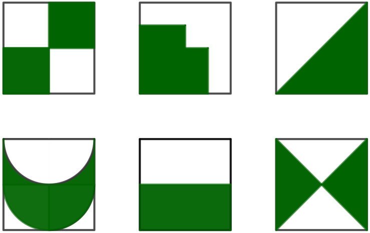
Les fractions ne se limitent pas aux parties d'un tout !

Pour pouvoir lier fractions et quantités, il est indispensable que l'aspect mesure de grandeur des fractions soit mis en lien avec la vision ensembliste de son aspect partage (de l'unité)

Fractions et mesures d'aires, conflits prévisibles...

Défi : Que pensez-vous des partages ci-dessous ?

Equitables ou non ? Quelle est la partie la plus grande ? La plus petite ? Comment reconstuire le tout à l'aide d'une partie ?

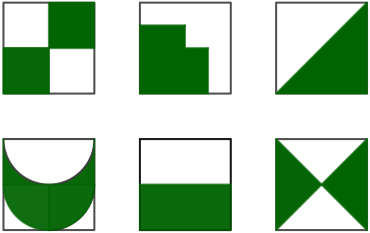


Présentation
Déroulement
Programmes
Difficultés
Fractions
Dans l'histoire
Unités fraction-naires
Mesures de longueurs
Au sujet des grandeurs
Aspect ratio, aspect opérateur
Décimaux
Intérêt
Liens fraction écriture décimale
Liens entier décimal
Propriétés des décimaux et rationnels
Écriture décimale et nombres réels.

Fractions et mesures d'aires, conflits prévisibles...

Défi : Que pensez-vous des partages ci-dessous ?

Equitables ou non ? Quelle est la partie la plus grande ? La plus petite ? Comment reconstuire le tout à l'aide d'une partie ?



Le problème de la reconstruction de l'unité d'aire.

Comprendre le report de longueurs, c'est facile. En revanche, le report d'aire, c'est une autre histoire...le conflit entre la forme et l'aire est important et ne permet pas de comparer les mesures des parties. (l'aire ne permet pas de rendre compte de la forme)

Commentaires au sujet des schémas :

- Tous ces partages concernent le partage de l'aire du carré qui est considérée comme l'unité (d'aire).
- Les arguments pour vérifier qu'il s'agit d'un partage "équitable" repose bien sur la notion de partage de l'unité en 2 parties de même aire. (elles n'ont pas toutes la même forme)
- Pour savoir si les 2 parties sont de même aire :
  - on peut les superposer. (invariance de la forme par déplacement)
  - Ce n'est pas toujours possible de superposer sans découpage de l'une des parties : la propriété d'invariance des aires par découpage et recollement est importante et difficile.
- Relations entre unité et unité fractionnée :
  - On visualise 2 parties dans le carré unité, ce qui ne permet pas d'identifier l'unité fractionnée (la partie colorée ou la partie blanche ?).
  - Faut-il en "mettre" 2 fois plus, ou 1 de plus pour reconstruire l'unité ? : l'importance du registre multiplicatif est essentiel.
  - une idée serait de visualiser les 2 unités côte à côte.

Présentation
Déroulement
Programmes
Difficultés
Fractions
Dans l'histoire
Unités fraction-naires
Mesures de longueurs
Au sujet des grandeurs
Aspect ratio, aspect opérateur
Décimaux
Intérêt
Liens fraction écriture décimale
Liens entier décimal
Propriétés des décimaux et rationnels
Écriture décimale et nombres réels.

Analyse d'une situation de classe :

Situation 1: Retrouver le bon segment.

Activité de réinvestissement du travail sur les fractions demi, quart, huitièmes obtenus par partage (pliage), en 2 temps :

- Un émetteur mesure la longueur d'un segment qui lui est donné parmi plusieurs à l'aide d'une bande unité (longueurs : $\frac{7}{4}$, $\frac{11}{8}$, $\frac{15}{8}$, $\frac{11}{4}$, $\frac{19}{8}$).
- Il transmet ses résultats à un autre élève qui doit retrouver le segment mesuré.

Analyse d'une situation de classe :

Situation 2: Retrouver le bon segment.

Activité de réinvestissement du travail sur les fractions demi, quart, huitièmes obtenus par partage (pliage), en 2 temps :

- Un émetteur mesure la longueur d'un segment qui lui est donné parmi plusieurs à l'aide d'une bande unité (longueurs : $\frac{7}{4}$, $\frac{11}{8}$, $\frac{15}{8}$, $\frac{11}{4}$, $\frac{19}{8}$).
- Il transmet ses résultats à un autre élève qui doit retrouver le segment mesuré.

Quelques observations a priori :

- De nouvelles unités s'obtiennent en partageant l'unité : demi, quart, etc.
- On peut les ajouter entre elles (comme les heures, minutes, secondes) : il s'agit d'une décomposition additive, mais l'addition est-elle bien perçue ?
- On peut les comparer à l'unité en comptant le nombre de reports dans l'unité : l'unité est 2 fois plus grande que le demi parce qu'il faut 2 demi pour obtenir l'unité.
- On peut les comparer directement deux à deux : le demi est deux fois plus grand que le quart, parce qu'il faut deux quarts pour faire un demi.

Ce que montrent les productions d'élèves :

Prénom de l'émetteur : Benjamin — Feuille 2

Message : toute une barre unité et un tout petit peu moin de la moitié

Prénom du récepteur : Maxime
Segment de la feuille n°3 correspondant au message : j'ai trouvé le n°5

Remarques : j'ai pas bien comprit mais je crois n'avoir c'est le quel

---

Prénom de l'émetteur : Fabien — Feuille 2

Message : La fait deux fois plus un petit boux

Prénom du récepteur : Manon
Segment de la feuille n°3 correspondant au message : segment C'est le n°6

Remarques : c'était très ~~mal~~ mais écrit il y avait des fautes.

Prénom de l'émetteur : Mélissa — Feuille 2

Message : Il faut que tu place la bande sur le segment et que tu mais une marque avec ton crayon fais le 3 fois.

Prénom du récepteur : Emma
Segment de la feuille n°3 correspondant au message :

Remarques : je ne comprent pas parceque j'ai est vu tous les segment ~~...~~ donc je sa pas la ma poule

---

Prénom de l'émetteur : Ophélie — Feuille 2

Message :
Salut Devinette
2 fois la bandelette + □ .

Prénom du récepteur : Nathalie
Segment de la feuille n°3 correspondant au message : 5

Remarques : c'est bien expliquer mais je n'ai pas trop compris pour le carré.

Ce que montrent les productions d'élèves :

Bilan : des liens nécessaires à enseigner explicitement

Ces productions d'élèves montrent que malgré une séquence de travail sur les fractions, l'aspect mesure de la fraction n'est pas perçu.
L'aspect partie-tout ne permet pas l'accès à la mesure si elle n'est pas travaillée en parallèle (par reconstruction du tout notamment).

Des fractions vers les nombres décimaux

On pourrait dire comme pour le cycle 1 ...

La construction des fractions (décimales) s'appuie sur

- *la notion de quantité,*
- *leur verbalisation,*
- *les relations entre les unités fractionnées (ou fractions d'unités)*

Des fractions vers les nombres décimaux

On pourrait dire comme pour le cycle 1 ...

La construction des fractions (décimales) s'appuie sur

- *la notion de quantité,*
- *leur verbalisation,*
- *les relations entre les unités fractionnées (ou fractions d'unités)*

Mises en garde :

- *La connaissance de la dénomination des fractions ne constitue pas leur apprentissage.*
- *Les activités doivent éviter le recours prépondérant au comptage de parties d'un tout.*

Des fractions vers les nombres décimaux

On pourrait dire comme pour le cycle 1 ...

La construction des fractions (décimales) s'appuie sur

- *la notion de quantité,*
- *leur verbalisation,*
- *les relations entre les unités fractionnées (ou fractions d'unités)*

Mises en garde :

- *La connaissance de la dénomination des fractions ne constitue pas leur apprentissage.*
- *Les activités doivent éviter le recours prépondérant au comptage de parties d'un tout.*

Recommandations :

La compréhension de la **décomposition des nombres** *est une condition nécessaire à la construction des fractions décimales comme écritures de nouveaux nombres.*

Plan

1 Présentation
  - Déroulement
  - Programmes
  - Difficultés

2 Fractions
  - Dans l'histoire
  - Unités fractionnaires
  - Mesures de longueurs
  - Au sujet des grandeurs
  - Aspect ratio, aspect opérateur

3 Décimaux
  - Intérêt
  - Liens fraction écriture décimale
  - Liens entier décimal
  - Propriétés des décimaux et rationnels
  - Écriture décimale et nombres réels.

4 Bibliographie

Fraction, un mot ambigu aux facettes nombreuses...

Partage, Mesure, Quotient, Rapport, Opérateur..

Ce sont les aspects didactiques liés au concept des fractions. Ils sont mis en évidence par les didacticiens depuis la fin des années 70 (par exemple Kieren, 1976).

Fraction, un mot ambigu aux facettes nombreuses...

Partage, Mesure, Quotient, Rapport, Opérateur..

Ce sont les aspects didactiques liés au concept des fractions. Ils sont mis en évidence par les didacticiens depuis la fin des années 70 (par exemple Kieren, 1976).

Morceau, nombre ou écriture ?

Pour ajouter un peu de difficulté, le terme "fraction" est polysémique :

- En français, il signifie "morceau",
- En mathématiques, il signifie une écriture particulière des nombres rationnels,
- A l'école, on l'utilise pour désigner le nombre représenté.

Présentation
Déroulement
Programmes
Difficultés
Fractions
Dans l'histoire
Unités fractionnaires
Mesures de longueurs
Au sujet des grandeurs
Aspect ratio, aspect opérateur
Décimaux
Intérêt
Liens fraction écriture décimale
Liens entier décimal
Propriétés des décimaux et rationnels
Écriture décimale et nombres réels.

Fraction, un mot ambigu aux facettes nombreuses...

Partage, Mesure, Quotient, Rapport, Opérateur..

Ce sont les aspects didactiques liés au concept des fractions. Ils sont mis en évidence par les didacticiens depuis la fin des années 70 (par exemple Kieren, 1976).

Morceau, nombre ou écriture ?

Pour ajouter un peu de difficulté, le terme "fraction" est polysémique :

- En français, il signifie "morceau",
- En mathématiques, il signifie une écriture particulière des nombres rationnels,
- A l'école, on l'utilise pour désigner le nombre représenté.

Beaucoup de conflits en perspective...

- Un morceau n'est pas un nombre, pourtant il provient d'un partage ?
- Un nombre et une écriture, ce n'est pas pareil ?
- Dans un opérateur, il y a une opération, pas dans un nombre ?
- Pour mesurer une grandeur, il y a besoin d'une unité et d'un nombre...

Plan

1 Présentation
  - Déroulement
  - Programmes
  - Difficultés

2 Fractions
  - Dans l'histoire
  - Unités fractionnaires
  - Mesures de longueurs
  - Au sujet des grandeurs
  - Aspect ratio, aspect opérateur

3 Décimaux
  - Intérêt
  - Liens fraction écriture décimale
  - Liens entier décimal
  - Propriétés des décimaux et rationnels
  - Écriture décimale et nombres réels.

4 Bibliographie

Fractions

Mélanie Guenais

Présentation
Déroulement
Programmes
Difficultés

Fractions
Dans l'histoire
Unités fractionnaires
Mesures de longueurs
Au sujet des grandeurs
Aspect ratio, aspect opérateur

Décimaux
Intérêt
Liens fraction écriture décimale
Liens entier décimal
Propriétés des décimaux et rationnels
Écriture décimale et nombres réels.

Fractions : premiers usages, premiers écrits

Des questions vieilles de 5000 ans

- Questions de concepts
- Questions d'écritures

Ces deux types de questions sont liés et l'étude des concepts et de l'écriture évoluent ensembles : le formalisme utilisé aujourd'hui pour traiter les nombres en général est très récent (Bourbaki 1960)

Fractions : premiers usages, premiers écrits

Des questions vieilles de 5000 ans

- Questions de concepts
- Questions d'écritures

Ces deux types de questions sont liés et l'étude des concepts et de l'écriture évoluent ensembles : le formalisme utilisé aujourd'hui pour traiter les nombres en général est très récent (Bourbaki 1960)

Au sujet du concept : le nombre ne va pas de soi

Les fractions représentent plusieurs visions des relations entre les mesures de grandeurs qui sont les fondements de la construction du nombre. Leur statut de nombre n'est établi qu'à la fin du premier millénaire par l'école arabe.

Focus sur les classes de nombres

- On parle à l'école primaire des nombres entiers naturels, $\mathbb{N}$.
- Ces nombres se représentent sur une demi-droite graduée qui sera prolongée en une droite en cycle 4 et permettra de situer les entiers relatifs, par symétrie des entiers naturels. Ce nouvel ensemble est noté $\mathbb{Z}$ et contient $\mathbb{N}$.
- Les fractions permettent de fabriquer des nombres qui seront repérés entre les graduations délimitées par les entiers relatifs. Ces nouveaux nombres sont appelés les nombres rationnels, et leur ensemble est noté $\mathbb{Q}$. Il contient les nombres précédents.
- Attention ! A l'école on ne nomme pas ces nombres, et on les confond avec leur écriture sous forme de fraction (écriture de 2 entiers séparés par un trait de fraction). Lorsque l'écriture met en jeu des nombres non entiers, on parle d'écriture fractionnaire.
- On pourrait définir l'ensemble des nombres rationnels comme l'ensemble de tous les nombres qui se repèrent à l'aide d'une graduation régulière passant par l'unité..ce qui fait beaucoup de points sur la droite, mais il en manque... $\sqrt{2}$ en est un exemple classique. Pourquoi ?
- Pour compléter les nombres, l'idée est de "boucher les trous" sur la droite graduée, qui devient aussi "la droite réelle" : elle représente l'ensemble de tous les nombres réels, $\mathbb{R}$.
- Remarquons qu'il n'y a pas de nombres décimaux dans cette histoire...pourquoi ?

Premières traces écrites : fractions et mesures

Les fractions égyptiennes de l'antiquité (2e millénaire avant J-C)

Dans les écrits de l'Egypte antique on utilise les décompositions en fractions unitaires pour résoudre des problèmes de mesures de la vie courante.

Coudée de Mâya, Louvre, 1330 avant J-C, Sechat, projetrosette.info

Premières traces écrites : fractions et mesures

Les fractions égyptiennes de l'antiquité (2e millénaire avant J-C)

Dans les écrits de l'Egypte antique on utilise les décompositions en fractions unitaires pour résoudre des problèmes de mesures de la vie courante.

Coudée de Mâya, Louvre, 1330 avant J-C, Sechat, projetrosette.info

Définition : une fraction unitaire est une fraction de la forme $\frac{1}{n}$

Sauriez-vous écrire $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{2}{5}$ à la mode égyptienne ?

Premières traces écrites : fractions et mesures

Les fractions égyptiennes de l'antiquité (2e millénaire avant J-C)

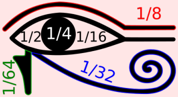
Dans les écrits de l'Egypte antique on utilise les décompositions en fractions unitaires pour résoudre des problèmes de mesures de la vie courante.

Coudée de Mâya, Louvre, 1330 avant J-C, Sechat, projetrosette.info

Définition : une fraction unitaire est une fraction de la forme $\frac{1}{n}$

Sauriez-vous écrire $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{2}{5}$ à la mode égyptienne ?

Le mythe de l'oeil d'Horus



B. Stella, wikipedia.org

On trouve souvent dans les manuels ce type de présentation...C'est une interprétation ancienne, dont la validité scientifique n'est plus d'actualité (J. Ritter 2003).

Présentation
Déroulement
Programmes
Difficultés
Fractions
Dans l'histoire
Unités fractionnaires
Mesures de longueurs
Au sujet des grandeurs
Aspect ratio, aspect opérateur
Décimaux
Intérêt
Liens fraction écriture décimale
Liens entier décimal
Propriétés des décimaux et rationnels
Écriture décimale et nombres réels.

Commentaires

- Sur cette coudée royale, on distingue des graduations régulières, et entre chacune des sous-graduations de plus en plus fines : ce sont les demi, tiers, quart, jusqu'au 16$^{\text{ième}}$ de la graduation qui sont dessinées.
- L'écriture égyptienne est cumulative en base dix (il n'y a pas de valeur positionnelle des signes qui désignent le nombre). I représente l'unité et ∩ une dizaine. Alors 13 s'écrit aussi bien ∩III que III∩ ou I∩II ..ce qui permet libre cours à l'imagination pour dessiner les nombres d'ennemis vaincus sur les tombeaux ! L'oeil indique qu'il s'agit d'une fraction du nombre écrit.
- Les égyptiens écrivent leurs mesures sous forme décomposée uniquement à l'aide des fractions unitaires. Par exemple, $\frac{11}{4}$ s'écrit : $2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$.
- Cette décomposition en somme de fractions unitaires est très efficace pour obtenir des valeurs de plus en plus précises lors des mesurages : on cherche d'abord la valeur entière de l'unité dans la grandeur à mesurer, puis la plus grande fraction unitaire qui entre dans le reste à mesurer, et on répète ce procédé. La décomposition est alors unique.
- Ecrivons $\frac{2}{5}$ de cette manière : $\frac{2}{5}$ est supérieur à $\frac{1}{3}$ mais plus petit que $\frac{1}{2}$, donc il commence par $\frac{1}{3}$. Ensuite, on écrit le reste : $\frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{2\times 3 - 5}{3\times 5} = \frac{1}{15}$. Donc $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$.
- On peut remarquer que $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$, cette écriture n'est donc pas unique.
- Ces écritures des nombres rationnels sous cette forme sont toujours possibles, mais rendent les comparaisons et les opérations difficiles (et questionnent encore les mathématiciens !).

Les fractions de l'antiquité grecque jusqu'à nous.

Proposition 2 du Livre XII des *Eléments* d'Euclide 300 av J-C

≪ Les cercles sont entr'eux comme les quarrés de leurs diamètres ≫
De quel nombre parle-t-on ?

Présentation
Déroulement
Programmes
Difficultés
Fractions
Dans l'histoire
Unités fractionnaires
Mesures de longueurs
Au sujet des grandeurs
Aspect ratio, aspect opérateur
Décimaux
Intérêt
Liens fraction écriture décimale
Liens entier décimal
Propriétés des décimaux et rationnels
Écriture décimale et nombres réels.

Les fractions de l'antiquité grecque jusqu'à nous.

Proposition 2 du Livre XII des *Eléments* d'Euclide 300 av J-C

≪ Les cercles sont entr'eux comme les quarrés de leurs diamètres ≫
De quel nombre parle-t-on ?

Pour les mathématiciens de l'antiquité grecque, seuls les entiers sont considérés comme des nombres. Les fractions sont, comme le nombre π qui est évoqué ci-dessus, considérées comme des relations entre des grandeurs (ici les aires et les diamètres).

Les fractions de l'antiquité grecque jusqu'à nous.

Proposition 2 du Livre XII des *Eléments* d'Euclide 300 av J-C

≪ Les cercles sont entr'eux comme les quarrés de leurs diamètres ≫
De quel nombre parle-t-on ?

Pour les mathématiciens de l'antiquité grecque, seuls les entiers sont considérés comme des nombres. Les fractions sont, comme le nombre π qui est évoqué ci-dessus, considérées comme des relations entre des grandeurs (ici les aires et les diamètres).

Les fractions et leur statut de nombre

- L'intégration des fractions comme nombres date du début du premier millénaire, elle est établie par l'école arabe, qui définit également le système de numération décimale de position (d'après des travaux provenant de l'Inde du VIIIe siècle).
- La construction rigoureuse des nombres ne date que de la fin du XIX$^{\text{ième}}$ siècle

Plan

1 Présentation
- Déroulement
- Programmes
- Difficultés

2 Fractions
- Dans l'histoire
- Unités fractionnaires
- Mesures de longueurs
- Au sujet des grandeurs
- Aspect ratio, aspect opérateur

3 Décimaux
- Intérêt
- Liens fraction écriture décimale
- Liens entier décimal
- Propriétés des décimaux et rationnels
- Écriture décimale et nombres réels.

4 Bibliographie

Introduction : insuffisance des nombres entiers

Situation 3: Mesurer sans règle des longueurs.

Vous disposez d'une bande unité (blanche) et de petites bandes colorées. L'objectif est de déterminer la mesure de chacune de ses bandes. Notez les stratégies utilisées et comparez les. Pas de règle, bien sûr !

Introduction : insuffisance des nombres entiers

Situation 4: Mesurer sans règle des longueurs.

Vous disposez d'une bande unité (blanche) et de petites bandes colorées. L'objectif est de déterminer la mesure de chacune de ses bandes. Notez les stratégies utilisées et comparez les. Pas de règle, bien sûr !

Observations : deux grands types de stratégies

- Stratégie 1 (de partage) : on partage l'unité en 2 (ou 3), puis encore en 2 (ou 3), etc, pour fabriquer des graduations.
- Stratégie 2 (de report de mesure) : On utilise la petite bande colorée comme unité, et on compare sa longueur par report à celle de l'unité.

Introduction : insuffisance des nombres entiers

Situation 5: Mesurer sans règle des longueurs.

Vous disposez d'une bande unité (blanche) et de petites bandes colorées. L'objectif est de déterminer la mesure de chacune de ses bandes. Notez les stratégies utilisées et comparez les. Pas de règle, bien sûr !

Observations : deux grands types de stratégies

- Stratégie 1 (de partage) : on partage l'unité en 2 (ou 3), puis encore en 2 (ou 3), etc, pour fabriquer des graduations.
- Stratégie 2 (de report de mesure) : On utilise la petite bande colorée comme unité, et on compare sa longueur par report à celle de l'unité.

Les intérêts et limitations de ces stratégies

- Elles sont identiques pour les fractions de l'unité : $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$.. mais l'opération physique du partage n'est pas toujours facile.
- Les graduations permettent de tout mesurer, mais on "perd" des nombres. On peut augmenter la précision, mais c'est long.
- Le report de mesure est plus efficace en général, il est simple pour les fractions de l'unité, mais plus compliqué pour les autres (par exemple $\frac{2}{3}$ ou $\frac{7}{10}$).
- ...

Présentation
Déroulement
Programmes
Difficultés
Fractions
Dans l'histoire
Unités fractionnaires
Mesures de longueurs
Au sujet des grandeurs
Aspect ratio, aspect opérateur
Décimaux
Intérêt
Liens fraction écriture décimale
Liens entier décimal
Propriétés des décimaux et rationnels
Écriture décimale et nombres réels.

Les fractions d'unité : quantièmes d'unités

On peut construire toute une famille de nouvelles unités qui servent à mesurer, qui sont les quantièmes.

Essai de définition du $n^{\text{ième}}$ d'unité. (aspect partage de l'unité)

Le $n^{\text{ième}}$ d'unité est le résultat d'un partage de l'unité en n parties égales.

Attention, on ne sait pas ce que signifie "partage égal", il faut donc le définir : le résultat d'un partage en n parties égales de l'unité est une grandeur qui reportée n fois reconstitue l'unité. Donc :

Définition par reconstruction de l'unité - vers l'aspect quotient

Le $n^{\text{ième}}$ d'unité est la grandeur qui reportée n fois reconstitue l'unité. On peut aussi dire que 1 c'est n fois $\frac{1}{n}$.

Présentation
Déroulement
Programmes
Difficultés
Fractions
Dans l'histoire
Unités fractionnaires
Mesures de longueurs
Au sujet des grandeurs
Aspect ratio, aspect opérateur
Décimaux
Intérêt
Liens fraction écriture décimale
Liens entier décimal
Propriétés des décimaux et rationnels
Écriture décimale et nombres réels.

Les fractions d'unité : quantièmes d'unités

On peut construire toute une famille de nouvelles unités qui servent à mesurer, qui sont les quantièmes.

Essai de définition du $n^{\text{ième}}$ d'unité. (aspect partage de l'unité)

Le $n^{\text{ième}}$ d'unité est le résultat d'un partage de l'unité en n parties égales.

Attention, on ne sait pas ce que signifie "partage égal", il faut donc le définir : le résultat d'un partage en n parties égales de l'unité est une grandeur qui reportée n fois reconstitue l'unité. Donc :

Définition par reconstruction de l'unité - vers l'aspect quotient

Le $n^{\text{ième}}$ d'unité est la grandeur qui reportée n fois reconstitue l'unité. On peut aussi dire que 1 c'est n fois $\frac{1}{n}$.

Situation 7: reconstruction de l'unité dixième par report

En utilisant une bande unité de 100 graduations de 2 cm, l'élève doit découper un dixième de l'unité dans une bande colorée suffisamment grande.

L'importance de la verbalisation en cycle 3

Les liens avec la verbalisation ≪ n fois plus (grand) ≫, ≪ n fois plus petit ≫ sont importants et permettent d'accéder à des problèmes numériques de division ou multiplication à trou lorsqu'il s'agit d'une grandeur discrète (une collection).

Focus sur le vocabulaire

Les grandeurs, espèces de grandeurs, mesures et unités : quelques idées. Voir Y. Chevallard et C. Chambris (2015) pour davantage de précisions.

- Une espèce de grandeur est une grande famille de grandeurs de même nature : longueurs, aires, volumes, masses, durées, températures, effectif, etc.
- Une grandeur est associée à un objet particulier : la largeur d'une table, la hauteur d'une pyramide, la masse d'une pomme, la durée d'un jour, etc...
- Une unité est une grandeur de référence, qui permet d'accéder à une mesure des grandeurs de même espèce.
- Le nombre est le rapport entre la mesure d'une grandeur et l'unité.
- Les grandeurs discrètes sont associées à l'estimation de l'effectif d'une collection d'entités disjointes. Elles possèdent une unité naturelle qui est l'entité elle-même. Cette unité est insécable et appelée parfois l'"unité de compte". En revanche, on peut construire des unités plus grandes qui elles peuvent être (partiellement) fractionnées.
- Les grandeurs continues (celles qui ne sont pas discrètes) n'ont pas d'unité naturelle, et toute unité peut-être fractionnée.

Comparer les fractions unitaires entre elles : ruptures

Toutes les fractions d'unités sont comparables, en comparant le nombre de reports dans l'unité : il faut plus de quart pour obtenir l'unité que de tiers, donc c'est que le quart est plus petit que le tiers.

Des propriétés en rupture avec les nombres entiers

- Propriété de comparaison par reports : la mesure de la fraction d'unité est d'autant plus petite que son nombre de reports dans une longueur donnée est grand.
- Propriété de l'infiniment petit : il est toujours possible de choisir une fraction d'unité plus petite qu'une autre.

Situation 8: d'après M. Simon (2006)

Il s'agit de comparer différentes unités, d'abord corporelles puis fractionnées à partir du nombre de leurs reports dans une longueur donnée. L'objectif est de comprendre que $\frac{1}{40}$ est plus grand que $\frac{1}{60}$ parce qu'il en faut moins pour reconstituer la longueur de référence (ou l'unité).

Plan

1 Présentation
- Déroulement
- Programmes
- Difficultés

2 Fractions
- Dans l'histoire
- Unités fractionnaires
- Mesures de longueurs
- Au sujet des grandeurs
- Aspect ratio, aspect opérateur

3 Décimaux
- Intérêt
- Liens fraction écriture décimale
- Liens entier décimal
- Propriétés des décimaux et rationnels
- Écriture décimale et nombres réels.

4 Bibliographie

Définition générale des fractions - Additions de fractions

Dans la situation 1

Que pensez-vous des mesures suivantes : $\frac{5}{4}$, $1+\frac{1}{4}$, $\frac{19}{8}$, $2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$? Que met-on en évidence ? *on introduit la somme d'un entier et d'une fraction, de deux fractions et on définit la fraction* $\frac{5}{4}$.

Définition de la fraction $\frac{k}{n}$

La fraction $\frac{k}{n}$ (qu'on dit "k n-ième") désigne la mesure obtenue en reportant k fois un $n^{\text{ième}}$: on peut écrire $\frac{k}{n}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}=k\times\frac{1}{n}$.

Analyse des manuels : quand, où, comment explicite-t-on cette notation ?

Définition générale des fractions - Additions de fractions

Dans la situation 1

Que pensez-vous des mesures suivantes : $\frac{5}{4}$, $1+\frac{1}{4}$, $\frac{19}{8}$, $2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$? Que met-on en évidence ? *on introduit la somme d'un entier et d'une fraction, de deux fractions et on définit la fraction* $\frac{5}{4}$.

Définition de la fraction $\frac{k}{n}$

La fraction $\frac{k}{n}$ (qu'on dit "k n-ième") désigne la mesure obtenue en reportant k fois un $n^{\text{ième}}$: on peut écrire $\frac{k}{n}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}=k\times\frac{1}{n}$.

Analyse des manuels : quand, où, comment explicite-t-on cette notation ?

Additionner des fractions, c'est naturel !

Avec la définition ci-dessus, additionner les fractions de même dénominateur est simple, ce sont des opérations sur les $n^{\text{ième}}$: k $n^{\text{ième}}$ et p $n^{\text{ième}}$ c'est $k+p$ $n^{\text{ième}}$. Ou bien : $\frac{k}{n}+\frac{p}{n}=\frac{k+p}{n}$.

La multiplication avec des fractions, aspect quotient

Remarque : nous venons de donner un sens à la multiplication d'une fraction unitaire avec un entier. Mais on sait que $2 \times 3 = 3 \times 2$...est-ce pareil avec une fraction ?

Situation 9: 10 minutes, par binôme

Six septièmes c'est le septième de six, c'est aussi deux fois le septième de trois. Vérifier l'affirmation à l'aide d'un guide âne, puis argumenter.

La multiplication avec des fractions, aspect quotient

Remarque : nous venons de donner un sens à la multiplication d'une fraction unitaire avec un entier. Mais on sait que $2 \times 3 = 3 \times 2$...est-ce pareil avec une fraction ?

Situation 10: 10 minutes, par binôme

Six septièmes c'est le septième de six, c'est aussi deux fois le septième de trois. Vérifier l'affirmation à l'aide d'un guide âne, puis argumenter.

Propriété (équivalence des aspects partage-quotient)

k $n^{\text{ième}}$, c'est aussi le $n^{\text{ième}}$ de k (la nouvelle unité c'est k fois l'unité). Lorsqu'on reporte n fois $\frac{k}{n}$, on obtient k. Cela se traduit par une égalité de type quotient qui peut s'écrire : $n \times \frac{k}{n} = k$.

Ceci permet de considérer un nombre tel que $\frac{4}{3}$ comme quatre fois un tiers, le tiers de quatre ou encore le nombre dont le produit par trois est égal à quatre.

Commentaires :

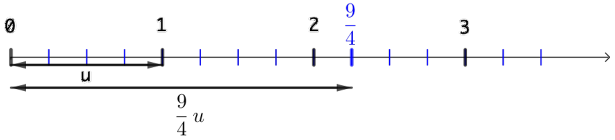
Voilà quelques arguments permettant de justifier les observations faites lors de la situation 5 :

- Du point de vue matériel, on observe que des difficultés de compréhension du choix de l'unité peuvent naître simplement des choix de mises en oeuvre. Ainsi, ne pas préparer à l'avance une bande de longueur 6 unités perturbe la démarche à suivre.
- Vérifier que six reports de un septième correspond au septième des six unités ne justifie pas à lui seul l'égalité $6 \times \frac{1}{7} = \frac{1}{7} \times 6$.
- Pour justifier, nous revenons donc à la définition du $7^{\text{ième}}$ d'unité : c'est la grandeur qui reportée 7 fois donne l'unité. Pour montrer que $6 \times \frac{1}{7}$ est le $7^{\text{ième}}$ de 6, on doit donc le reporter 7 fois, et expliquer pourquoi on obtient 6.
- Reporter 7 fois $6 \times \frac{1}{7}$, c'est reporter 7×6 fois un $7^{\text{ième}}$, c'est à dire 42 fois le $7^{\text{ième}}$. Mais un $7^{\text{ième}}$ reporté 7 fois donne 1. Lorsqu'il est reporté 42 fois, c'est qu'il est reporté 7 fois, à 6 reprises, et on obtient donc bien 6. Ouf !

De la mesure de longueur vers le nombre : la droite graduée

La droite graduée, un support essentiel pour représenter les nombres

Mais attention à ses difficultés : ce sont les mêmes pour les fractions que pour les entiers. Un point sur la droite est repéré par un nombre qui correspond à la longueur du segment limité par ce point et l'origine.



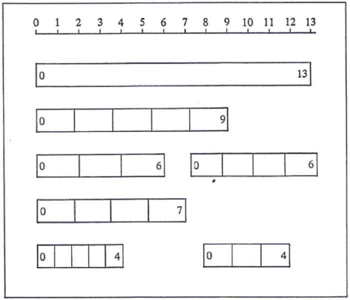
Situation 11: Ajouts et retraits sur la droite graduée

Ajout par juxtaposition, retrait par superposition de longueurs, pour des fractions de même dénominateur.

Additionner, décomposer, recomposer les fractions :

Situation 12: Décomposer, additionner, plusieurs points de vues

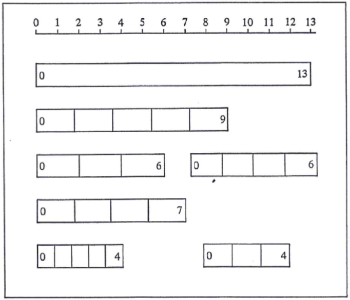
A l'aide des bandes et sans les plier, ni recourir au guide-âne, il faut partager la bande de longueur 13 en cinq parties égales ; ciseaux autorisés.



Additionner, décomposer, recomposer les fractions :

Situation 13: Décomposer, additionner, plusieurs points de vues

A l'aide des bandes et sans les plier, ni recourir au guide-âne, il faut partager la bande de longueur 13 en cinq parties égales ; ciseaux autorisés.



Linéarité de la division et lien avec l'encadrement des fractions

On peut accompagner ce travail avec le calcul mental sur la division (72 divisé par 6 c'est 60 divisé par 6 et 12 divisé par 6 donc c'est 10+2).
On peut aussi établir le lien avec la division euclidienne et l'encadrement des fractions entre 2 nombres entiers consécutifs.

Commentaires

L'activité est déstabilisante car dans ce contexte, il s'agit de travailler sur l'unité 13 et sa décomposition en 9+4.

- L'unité 13 n'est pas naturelle a priori, la définition des fractions reposant sur l'idée de 13 fois le cinquième de l'unité et non le cinquième de 13.

Commentaires

L'activité est déstabilisante car dans ce contexte, il s'agit de travailler sur l'unité 13 et sa décomposition en 9+4.

- L'unité 13 n'est pas naturelle a priori, la définition des fractions reposant sur l'idée de 13 fois le cinquième de l'unité et non le cinquième de 13.
- Les liens avec le cinquième de 4 et de 9 ne sont pas matérialisés et bloquent l'intuition.

Commentaires

L'activité est déstabilisante car dans ce contexte, il s'agit de travailler sur l'unité 13 et sa décomposition en 9+4.

- L'unité 13 n'est pas naturelle a priori, la définition des fractions reposant sur l'idée de 13 fois le cinquième de l'unité et non le cinquième de 13.
- Les liens avec le cinquième de 4 et de 9 ne sont pas matérialisés et bloquent l'intuition.
- L'obstacle principal provient de l'absence d'une unité commune (le cinquième) qui permettrait d'établir ce lien. (il faut donc partager le cinquième de 4 en 4 et le cinquième de 9 en 9 pour voir apparaitre cette unité).

Présentation
Déroulement
Programmes
Difficultés
Fractions
Dans l'histoire
Unités fractionnaires
Mesures de longueurs
Au sujet des grandeurs
Aspect ratio, aspect opérateur
Décimaux
Intérêt
Liens fraction écriture décimale
Liens entier décimal
Propriétés des décimaux et rationnels
Écriture décimale et nombres réels.

Commentaires

L'activité est déstabilisante car dans ce contexte, il s'agit de travailler sur l'unité 13 et sa décomposition en 9+4.

- L'unité 13 n'est pas naturelle a priori, la définition des fractions reposant sur l'idée de 13 fois le cinquième de l'unité et non le cinquième de 13.
- Les liens avec le cinquième de 4 et de 9 ne sont pas matérialisés et bloquent l'intuition.
- L'obstacle principal provient de l'absence d'une unité commune (le cinquième) qui permettrait d'établir ce lien. (il faut donc partager le cinquième de 4 en 4 et le cinquième de 9 en 9 pour voir apparaitre cette unité).
- La démarche consiste à travailler sur ces échanges d'unités : un $5^{\text{ième}}$ de 13 c'est 13 $5^{\text{ième}}$, c'est 9 $5^{\text{ième}}$ et 4 $5^{\text{ième}}$, donc c'est un $5^{\text{ième}}$ de 9 et un $5^{\text{ième}}$ de 4. On obtient finalement la longueur voulue en découpant puis recollant chacune des parties correspondantes sur la bande 13.

Commentaires

L'activité est déstabilisante car dans ce contexte, il s'agit de travailler sur l'unité 13 et sa décomposition en 9+4.

- L'unité 13 n'est pas naturelle a priori, la définition des fractions reposant sur l'idée de 13 fois le cinquième de l'unité et non le cinquième de 13.
- Les liens avec le cinquième de 4 et de 9 ne sont pas matérialisés et bloquent l'intuition.
- L'obstacle principal provient de l'absence d'une unité commune (le cinquième) qui permettrait d'établir ce lien. (il faut donc partager le cinquième de 4 en 4 et le cinquième de 9 en 9 pour voir apparaitre cette unité).
- La démarche consiste à travailler sur ces échanges d'unités : un $5^{\text{ième}}$ de 13 c'est 13 $5^{\text{ième}}$, c'est 9 $5^{\text{ième}}$ et 4 $5^{\text{ième}}$, donc c'est un $5^{\text{ième}}$ de 9 et un $5^{\text{ième}}$ de 4. On obtient finalement la longueur voulue en découpant puis recollant chacune des parties correspondantes sur la bande 13.
- Le choix des variables numériques perturbe : transformons 9 en 10 et 4 en 3, la décomposition devient transparente : 13 c'est 10+3, donc $\frac{13}{5} = \frac{10}{5} + \frac{3}{5} = 2 + \frac{3}{5}$, et ce raisonnement ne gêne personne...sauf peut-être les élèves ! A méditer.

Plan

1. Présentation
    - Déroulement
    - Programmes
    - Difficultés
2. Fractions
    - Dans l'histoire
    - Unités fractionnaires
    - Mesures de longueurs
    - Au sujet des grandeurs
    - Aspect ratio, aspect opérateur
3. Décimaux
    - Intérêt
    - Liens fraction écriture décimale
    - Liens entier décimal
    - Propriétés des décimaux et rationnels
    - Écriture décimale et nombres réels.
4. Bibliographie

Varier les grandeurs, et les unités, c'est utile !

Situation 14: Partage et crocodiles, pour commencer.. ? (Empson et al 2006)

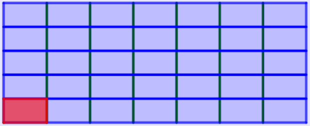
Il y a 6 tartes au citron à partager pour 24 crocodiles. Mais les crocodiles ne veulent pas des morceaux trop petits.. Quel partage proposes-tu ?
Que met en évidence cette situation ? Comment l'énoncé permet-il à l'élève d'évoluer dans ses représentations ? Quelles peuvent être les stratégies utilisées ?

Varier les grandeurs, et les unités, c'est utile !

Situation 16: Partage et crocodiles, pour commencer.. ? (Empson et al 2006)

Il y a 6 tartes au citron à partager pour 24 crocodiles. Mais les crocodiles ne veulent pas des morceaux trop petits.. Quel partage proposes-tu ?
Que met en évidence cette situation ? Comment l'énoncé permet-il à l'élève d'évoluer dans ses représentations ? Quelles peuvent être les stratégies utilisées ?

Situation 17: L'aire et la multiplication :



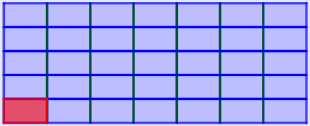
Partage de l'unité d'aire en cinquième, puis en septième...on obtient donc le septième du cinquième..
Et l'égalité $\frac{1}{7} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{7 \times 5}$.

Varier les grandeurs, et les unités, c'est utile !

Situation 18: Partage et crocodiles, pour commencer.. ? (Empson et al 2006)

Il y a 6 tartes au citron à partager pour 24 crocodiles. Mais les crocodiles ne veulent pas des morceaux trop petits.. Quel partage proposes-tu ?
Que met en évidence cette situation ? Comment l'énoncé permet-il à l'élève d'évoluer dans ses représentations ? Quelles peuvent être les stratégies utilisées ?

Situation 19: L'aire et la multiplication :



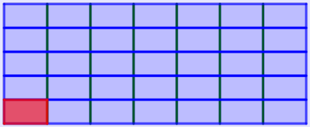
Partage de l'unité d'aire en cinquième, puis en septième...on obtient donc le septième du cinquième..
Et l'égalité $\frac{1}{7} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{7 \times 5}$.

Varier les grandeurs, et les unités, c'est utile !

Situation 20: Partage et crocodiles, pour commencer.. ? (Empson et al 2006)

Il y a 6 tartes au citron à partager pour 24 crocodiles. Mais les crocodiles ne veulent pas des morceaux trop petits.. Quel partage proposes-tu ?
Que met en évidence cette situation ? Comment l'énoncé permet-il à l'élève d'évoluer dans ses représentations ? Quelles peuvent être les stratégies utilisées ?

Situation 21: L'aire et la multiplication :



Partage de l'unité d'aire en cinquième, puis en septième...on obtient donc le septième du cinquième..
Et l'égalité $\frac{1}{7} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{7 \times 5}$.

La puissance de l'unité

La question du choix de l'unité est essentiel : c'est en variant ces choix qu'on met en évidence les équivalences des différents aspects de la fraction et les liens avec les multiplications et divisions.

Au sujet des tartes au citron :

- Il s'agit de passer d'une stratégie visant à partager chaque unité plusieurs fois avec le partage de la collection des 6 unités. Pour cela le contexte de l'énoncé et le statut du crocodile semble motivant.
- On retrouve la question de savoir si le $24^{\text{ième}}$ de 6 (tartes) est égal à 6 $24^{\text{ième}}$ (de tartes).
- On peut imaginer que le jeune élève puisse procéder par tatonnement en divisant chacune des tartes en 2, puis de nouveau en 2 : le choix des variables numériques est important (avec 30 crocodiles, on pourrait imaginer un problème moins accessible).
- Le changement d'unité (qui devient les 6 tartes) permet ensuite le recours aux faits multiplicatifs, une fois le problème reformulé : "combien de parts dans chaque tarte pour obtenir 24 parts ?" puis "quel est le nombre qui multiplié par 6 donne 24 ?".
- Peu importe comment est partagée chaque tarte, le problème est réduit à résoudre une multiplication à trou. L'idée du partage pour effectuer la division est compliquée ici : on ne partage pas les crocodiles ! (que penser de l'énoncé : 24 bonbons crocodiles et 6 enfants, combien de bonbons chacun ?)
- Une réponse élève à la question "pourquoi n'as-tu pas partagé chaque tarte en 24 ?" : "parce que les crocodiles auraient été fâchés".

Fractions

Mélanie Guenais

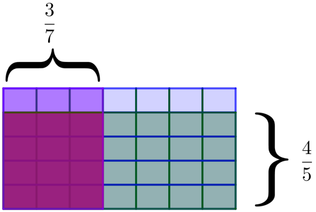
Présentation
Déroulement
Programmes
Difficultés

Fractions
Dans l'histoire
Unités fractionnaires
Mesures de longueurs
Au sujet des grandeurs
Aspect ratio, aspect opérateur

Décimaux
Intérêt
Liens fraction écriture décimale
Liens entier décimal
Propriétés des décimaux et rationnels
Écriture décimale et nombres réels.

Au sujet des aires et autres grandeurs

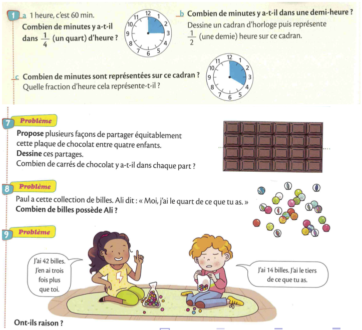
Multiplier des fractions : L'exemple du partage du rectangle peut-être généralisé pour donner du sens aux multiplications des fractions puis montrer les règles de calculs. Pour cela, il suffit de choisir disons une fraction $\frac{4}{5}$ du rectangle, puis d'en prendre le 7$^{\text{ième}}$, puis de le reporter 3 fois :



$$\frac{3}{7} \times \frac{4}{5} = \frac{3 \times 4}{7 \times 5}$$

Tisser des liens entre faits numériques, fractions et grandeurs :

Sur ces exemples issus du manuel Opération Math CM1, on retrouve, en découverte, du vocabulaire lié au fractions (de l'unité), des liens entre grandeurs, (aires, durées, collections), des liens entre fractions et faits opératoires (le quart du cadran, c'est le quart de 60 minutes, c'est 60 divisé par 4, c'est 15 minutes), des liens avec la verbalisation et les relations multiplicatives (J'ai le tiers de toi..tu as le triple de moi). De nombreux autres exemples permettent dès le début de lier les fractions et les nombres !



Premier bilan sur les fractions comprises comme mesures de grandeur

Cet aspect de la mesure, de longueurs en particulier, qui met en lien l'aspect partage et l'aspect quotient permet d'utiliser les propriétés des mesures et donc d'accéder aux propriétés des nombres.

Ce qu'on peut faire :

- Comparer
- Ajouter, dans l'ordre qu'on veut, par juxtaposition
- Soustraire, par superposition.
- Multiplier par un nombre entier (par l'addition itérée), multiplier des fractions unitaires.

Premier bilan sur les fractions comprises comme mesures de grandeur

Cet aspect de la mesure, de longueurs en particulier, qui met en lien l'aspect partage et l'aspect quotient permet d'utiliser les propriétés des mesures et donc d'accéder aux propriétés des nombres.

Ce qu'on peut faire :

- Comparer
- Ajouter, dans l'ordre qu'on veut, par juxtaposition
- Soustraire, par superposition.
- Multiplier par un nombre entier (par l'addition itérée), multiplier des fractions unitaires.

Ce qu'on ne peut pas (encore) faire :

- Trouver une manière simple pour comparer.
- Ecrire le résultat des additions, savoir si c'est une fraction.
- Multiplier ensemble des fractions en général et les diviser.

Plan

1. Présentation
   - Déroulement
   - Programmes
   - Difficultés
2. Fractions
   - Dans l'histoire
   - Unités fractionnaires
   - Mesures de longueurs
   - Au sujet des grandeurs
   - Aspect ratio, aspect opérateur
3. Décimaux
   - Intérêt
   - Liens fraction écriture décimale
   - Liens entier décimal
   - Propriétés des décimaux et rationnels
   - Écriture décimale et nombres réels.
4. Bibliographie

Rapports, ratio et fractions équivalentes.

Situation 22: Déplacement d'un robot par bonds, d'après L. Coulange

Activité de constructions et comparaisons de parcours sur une ligne graduée :

- Construire un parcours qui se déplace de 6 unités en 4 bonds.
- Peut-on atteindre 7 , 9 partant de 0 ? En combien de bonds ?
- Un autre robot parcourt 15 unités en 10 bonds, va-t-il plus vite ? et s'il parcourt 7 unités en 5 bonds ?

Rapports, ratio et fractions équivalentes.

Situation 23: Déplacement d'un robot par bonds, d'après L. Coulange

Activité de constructions et comparaisons de parcours sur une ligne graduée :

- Construire un parcours qui se déplace de 6 unités en 4 bonds.
- Peut-on atteindre 7 , 9 partant de 0 ? En combien de bonds ?
- Un autre robot parcourt 15 unités en 10 bonds, va-t-il plus vite ? et s'il parcourt 7 unités en 5 bonds ?

Fractions équivalentes : couple de nombres de même "ratio".

Dans ce cadre de la commensuration, la fraction représente un couple de nombres qui sont équivalents à d'autres couples : s' il faut n sauts pour aller en k, alors il faut 2n sauts pour aller en 2k. On peut le traduire par l'égalité $\frac{k}{n} = \frac{2k}{2n}$. On dit alors que les 2 fractions sont équivalentes (car elles représentent le même nombre). Remarquons qu'on a aussi : $\frac{3k}{3n} = \frac{2k}{2n}$, donc les fractions $\frac{2k}{2n}$, $\frac{3k}{3n}$, $\frac{7k}{7n}$, etc. sont toutes équivalentes.

Rapports, ratio et fractions équivalentes.

Situation 24: Déplacement d'un robot par bonds, d'après L. Coulange

Activité de constructions et comparaisons de parcours sur une ligne graduée :

- Construire un parcours qui se déplace de 6 unités en 4 bonds.
- Peut-on atteindre 7 , 9 partant de 0 ? En combien de bonds ?
- Un autre robot parcourt 15 unités en 10 bonds, va-t-il plus vite ? et s'il parcourt 7 unités en 5 bonds ?

Fractions équivalentes : couple de nombres de même "ratio".

Dans ce cadre de la commensuration, la fraction représente un couple de nombres qui sont équivalents à d'autres couples : s' il faut n sauts pour aller en k, alors il faut 2n sauts pour aller en 2k. On peut le traduire par l'égalité $\frac{k}{n} = \frac{2k}{2n}$. On dit alors que les 2 fractions sont équivalentes (car elles représentent le même nombre). Remarquons qu'on a aussi : $\frac{3k}{3n} = \frac{2k}{2n}$, donc les fractions $\frac{2k}{2n}$, $\frac{3k}{3n}$, $\frac{7k}{7n}$, etc. sont toutes équivalentes.

La fraction est une écriture, mais où est le nombre ?

Dans ce cas, c'est bien l'écriture qui est en jeu : $\dfrac{8}{4}$ est une fraction, $\dfrac{4}{2}$ en est une autre, mais elles permettent de réaliser les mêmes opérations : le nombre représenté est le même, bien que difficile à concevoir (qui est 2 ? est-ce la même chose que $\frac{2}{1}$?)

Additionner les fractions en général :

Dans ce cas aussi, c'est la recherche d'une ≪ commune mesure ≫ qui permet de comparer et d'additionner efficacement les fractions. L'intérêt de ce point du vue est de raisonner et de calculer avec les fractions sans chercher à diviser.

Situation 25: le tas de feuilles d'après Brousseau.

On dispose d'un tas d'épaisseur 12 mm de 50 feuilles rouges et d'un autre tas d'épaisseur 30 mm contenant 100 feuilles bleues. On colle ensemble une feuille rouge et une feuille bleue, peut-on savoir l'épaisseur obtenue ?
Ici, il s'agit de trouver l'unité commune en feuilles, à partir d'un tas de 50 et d'un tas de 100 : la commune mesure donne l'unité fractionnée commune aux 2 fractions (ici le centième, ou le cinquantième puisqu'on peut aussi considérer l'épaisseur de la moitié du tas de 100 feuilles). On peut ensuite d'ajouter les épaisseurs relatives à chaque tas, donnant ainsi accès au calcul de la somme des 2 fractions représentées par l'épaisseur d'une feuille de chaque sorte.

Propriété de stabilité de l'addition des fractions

La somme (et la différence) de 2 fractions est une fraction.

Question de vocabulaire

Attention, ici, l'addition de fractions doit être comprise comme l'addition des nombres représentés par ces fractions... et non comme une écriture.

Multiplier des fractions : aspect opérateur des fractions.

Situation 26: liens avec la commensuration. Comparaison de longueurs

A l'aide du report des petites bandes, déterminer leur "commune mesure". Quel résultat peut-on écrire ? Faites le lien avec la multiplication et la division des fractions.

Multiplier des fractions : aspect opérateur des fractions.

Situation 28: liens avec la commensuration. Comparaison de longueurs

A l'aide du report des petites bandes, déterminer leur "commune mesure". Quel résultat peut-on écrire ? Faites le lien avec la multiplication et la division des fractions.

Propriété : multiplication de fractions - aspect opérateur

Le produit de 2 fractions est une fraction dont le dénominateur (resp. le numérateur) peut s'obtenir en multipliant les dénominateurs (resp. les numérateurs).

En particulier $\frac{1}{n} \times \frac{1}{p} = \frac{1}{n \times p}$

Conséquence : le k n$^{\text{ième}}$ d'une grandeur, c'est multiplier $\frac{k}{n}$ à cette grandeur.

L'importance de la verbalisation

Les expressions ≪ moitié de , double de, tiers de , triple de ≫ qui traduisent l'aspect opérateur peuvent être mises en lien avec ≪ n fois plus≫, ≪ n fois moins ≫, (puis ≪ n pour 100 de ≫). Elles permettent de comprendre le sens de la multiplication par une fraction et de faire les liens avec les problèmes multiplicatifs.

Multiplier des fractions : aspect opérateur des fractions.

Situation 30: liens avec la commensuration. Comparaison de longueurs

A l'aide du report des petites bandes, déterminer leur "commune mesure". Quel résultat peut-on écrire ? Faites le lien avec la multiplication et la division des fractions.

Propriété : multiplication de fractions - aspect opérateur

Le produit de 2 fractions est une fraction dont le dénominateur (resp. le numérateur) peut s'obtenir en multipliant les dénominateurs (resp. les numérateurs).

En particulier $\dfrac{1}{n} \times \dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{n \times p}$

Conséquence : le k n$^{\text{ième}}$ d'une grandeur, c'est multiplier $\dfrac{k}{n}$ à cette grandeur.

L'importance de la verbalisation

Les expressions ≪ moitié de , double de, tiers de , triple de ≫ qui traduisent l'aspect opérateur peuvent être mises en lien avec ≪ n fois plus≫, ≪ n fois moins ≫, (puis ≪ n pour 100 de ≫). Elles permettent de comprendre le sens de la multiplication par une fraction et de faire les liens avec les problèmes multiplicatifs.

Situation 31: liens avec l'arithmétique et aspect quotient

Multiplications à trous impliquant progressivement des fractions.

Commentaires au sujet de la situation 12 :

- On obtient une commune mesure au bout de 10 reports de la petite bande pour 7 de la grande. Le ratio entre la petite bande et la grande est donc de 10 pour 7. Cela signifie qu'elle sont dans un rapport $\frac{7}{10}$ (on a choisi comme unité la grande bande). D'après la situation 2, la petite bande mesure $\frac{1}{5}$ de l'unité et la grande $\frac{2}{7}$ de l'unité. On obtient une égalité du type : $\frac{1}{5} = \frac{7}{10} \times \frac{2}{7}$, qui permet de donner un sens à la multiplication (et à la division) de 2 fractions et de vérifier la compatibilité des règles de calcul pour le produit des fractions.
- Comment justifier que $\dfrac{5}{7}$ ne peut pas être égal à $\dfrac{7}{10}$? :
  On peut dire que des fractions ne peuvent pas être égales si leur dénominateurs n'ont pas de diviseurs en commun (différent de 1). En effet, il faudrait que les fractions soient équivalentes, ce qui n'est possible que si elle proviennent d'une même unité fractionnée, autrement dit que les dénominateurs soient tous deux multiples d'un même nombre (différent de 1).
- Questions de mesures expérimentales :
  Si les deux nombres précédents ne sont pas égaux, cela ne signifie pas que l'un des résultats d'expérience est faux : pour s'en rendre compte on peut calculer l'erreur de mesure entre ces 2 valeurs : ici la mesure de l'erreur est le $70^{\text{ième}}$ de la grande bande qui mesure 12 cm, ce qui donne une erreur d'environ 1,7mm, compatible avec les approximations dues au matériel et à l'opération physique de report.

Liens fraction/division/multiplication : pourquoi c'est difficile

Reconstituer les procédures prévisibles des élèves et commenter.

- La multiplication : *Il y a 25 élèves dans la classe. Il faut 2 cahiers pour chaque élève. Combien faut-il de cahiers en tout ?*
- La division "quotité" : *Il y a 50 cahiers pour toute la classe. Chaque élève a 2 cahiers. Combien y a-t-il d'élèves dans la classe ?*
  On peut imaginer que l'élève dans un premier temps adopte une stratégie de soustractions itérées, qui indique l'opération inverse de la multiplication comme addition itérée. Il n'y a pas de partage ici.
- La division "partition" : *Il y a 50 cahiers en tout. Il y a 25 élèves dans la classe. Combien chaque élève a-t-il de cahiers ?*
  La stratégie de partage est ici envisageable. En revanche les données numériques sont difficiles à traiter (50 :25), et il n'est pas évident de faire le lien avec la première stratégie, donc avec la division quotité. Le choix des variables numériques est important.

La construction de la division comme inverse de la multiplication (avec l'idée de soustractions itérées) ne permet pas de faire le lien avec le partage de l'unité dans le cadre des fractions. La division doit donc être travaillée en lien avec les fractions et la multiplication, sous ses différents aspects (partager en 6 c'est diviser en 6, c'est multiplier par $\frac{1}{6}$, c'est 6 fois moins grand, c'est le nombre qui multiplié par 6 donne...)

Vers la proportionnalité, lien avec le "ratio".

Situation 32: Exemples simples de problèmes liés à la proportionnalité.

- Combien de cL dans 1/4 de L ?
- Pour faire un diabolo, on mélange 1 dose de grenadine pour 7 doses de limonade, combien de grenadine dans 1L de diabolo ?
- Reproduire un puzzle en changeant la mesure d'un côté d'une des pièces (voir Brousseau) etc..

Une définition possible de la proportionnalité

On dit que deux grandeurs sont proportionnelles si les mesures de l'une s'obtiennent en multipliant celles de l'autre par un même nombre. (On obtient alors des fractions (ou des écritures fractionnaires) équivalentes.)

plusieurs contextes de la proportionnalité : avec ou sans unités

- Le cas des conversions ou des changements d'échelles : lorsqu'on change d'unité de mesure, on multiplie les mesures par la relation qui lie les deux unités. Il n'y a pas de changement de grandeur.
- Le cas des pourcentages : il s'agit de déterminer la mesure d'une partie d'un tout, il n'y a pas de changement de grandeur. Le pourcentage désigne un rapport sans unité. Sa notation doit être explicitée : $25\% = \frac{25}{100} (= 0,25)$.
- Le cas des grandeurs de différentes espèces : cas de la commensuration. : le principe de proportionnalité est reconnu par des relations de type "rapport" ou "ratio" : un prix au kilo, une vitesse, une masse volumique, etc...

Commentaires

La commensuration de deux grandeurs est directement liée à la notion de proportionnalité. On utilise plutôt dans les programmes de 2018 le terme de "ratio" issu de la littérature anglo-saxone.

Les résultats de la DEEP sur l'enquête CEDRE 2014 montrent des faiblesses importantes dans ces apprentissages en fin de 3e. On peut pointer quelques exemples qui interpellent :

- 75% des élèves échouent à écrire $\frac{3}{4}$ sous forme décimale, à calculer 10% d'une grandeur.
- 90% des élèves échouent à donner les $\frac{3}{4}$ de 44
- Presque tous les élèves échouent à calculer 20% d'une grandeur, à convertir des unités d'aire (voir ci-contre pour le groupe des 10% des élèves les plus performants)

L'activité décrite révèle les mauvaises compréhensions des multiplications par 10, 100, 1000... et montre l'enjeu que représente la compréhension de l'écriture des nombres (entiers).

Conversion d'unité d'aire m² -> cm².

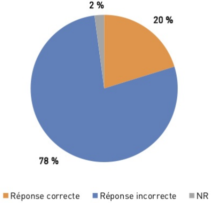
En 2014, la probabilité de réussir cet item par les élèves du groupe 5 est de 0,404. La réponse qui a obtenu le plus fort score est le distracteur correspondant à une conversion d'unités métriques. L'item, sans contexte réel, mesure un savoir-faire, sans surprise, peu présent. Près de deux tiers des élèves tentent une conversion dans le champ des longueurs ; parmi eux, 45 % le font en manipulant correctement les décimaux (réponse 130 cm²) et 22 % en ajoutant deux zéros à la partie décimale, à droite du nombre (1,300 cm²)

Exemple 1 :

FIGURE 2.6.1 Conversions

Comment peut-on écrire autrement 1,3 m² ?
Cocher la bonne réponse.

1 ☐ 0,013 cm²
2 ☐ 1,300 cm²
3 ☐ 130 cm²
4 ☐ 13 000 cm²



Plan

1. Présentation
   - Déroulement
   - Programmes
   - Difficultés
2. Fractions
   - Dans l'histoire
   - Unités fractionnaires
   - Mesures de longueurs
   - Au sujet des grandeurs
   - Aspect ratio, aspect opérateur
3. Décimaux
   - Intérêt
   - Liens fraction écriture décimale
   - Liens entier décimal
   - Propriétés des décimaux et rationnels
   - Écriture décimale et nombres réels.
4. Bibliographie

Nombres décimaux : une histoire récente !

SIMON STEVIN est né à Bruges, en Belgique.

Le mathématicien belge SIMON STEVIN (1548 - 1620) est à l'origine de la notation actuelle des nombres décimaux.
En Europe occidentale, à cette époque,
le nombre **34,125** s'écrivait : $34\,\frac{1}{8}$ ***(notation A)***
ce qui signifie $34 + \frac{1}{8}$, c'est-à-dire $34 + 0{,}125$.
Pour ce même nombre, STEVIN écrivait :
34⓪1①2②5③ ***(notation B)***
ce qui signifie $34 + \frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{5}{1000}$.
Par la suite, cette notation deviendra : **34∘125** ***(notation C)***

Extrait du manuel Phare 6e, Hachette

Ecritures en rompus, parties entières, parties fractionnaires et décimales

La notation A s'appelle l'écriture en rompus. C'est l'écriture usuelle encore actuellement dans les pays anglo-saxons. Il s'agit d'une décomposition additive sous forme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1 : cette fraction est la partie fractionnaire du nombre, qui s'appelle aussi partie décimale dans le cas d'un nombre décimal.

Présentation
Déroulement
Programmes
Difficultés
Fractions
Dans l'histoire
Unités fractionnaires
Mesures de longueurs
Au sujet des grandeurs
Aspect ratio, aspect opérateur
Décimaux
Intérêt
Liens fraction écriture décimale
Liens entier décimal
Propriétés des décimaux et rationnels
Écriture décimale et nombres réels.

Techniques efficaces pour comparer, calculer : les bases de numération

Comme pour les entiers, les problèmes de comparaison ou d'addition peuvent devenir redoutables avec un mauvais système d'écriture.

Quelques exemples pour comprendre l'addition

1. Calculer $\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}$ puis $\frac{5}{3}+\frac{2}{7}+\frac{6}{11}$.
2. Calculer $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ puis $\frac{5}{2}+\frac{2}{4}+\frac{6}{8}$.
3. Calculer $\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}$ puis $\frac{5}{10}+\frac{2}{100}+\frac{6}{1000}$.

Qu'en pensez-vous ?

Et pour comparer les fractions ?

Proposer quelques exemples progressifs montrant les difficultés de classer les fractions, puis des activités possibles de comparaison mettant en évidence l'intérêt de dénominateurs de puissances de 10 dans le choix des fractions. (voir Brousseau, la chasse aux nombres)

Commentaires

Dans le premier cas, il n'y a pas de "relations" entre les fractions d'unités : le septième n'est pas un fractionnement du tiers, le onzième non plus. On pourrait dire que deux unités fractionnées sont "en relation" si l'une s'obtient en fractionnant l'autre autrement dit si le dénominateur de l'une est un multiple de l'autre.

1. il faut d'abord repérer l'unité commune aux 3 fractions d'unités qui est la fraction résultant du partage en $3 \times 7 \times 11$, puis transformer en fractions équivalentes chacune des fractions, puis calculer $5 \times (7 \times 11) + 2 \times (3 \times 11) + 6 \times (3 \times 7)$
2. les unités fractionnées sont en relation : chacune est le double de la suivante, par conséquent la fraction d'unité commune est la dernière, on gagne une étape de calcul. Ensuite il reste à transformer en fractions équivalentes chacune des fractions (le numérateur est doublé lorsque l'unité est fractionnée en moitié), il reste à calculer $5 \times (2 \times 2) + 2 \times 2 + 6$
3. les unités fractionnées sont en relation, et liées à la base dix de l'écriture du nombre. Comme précédemment l'unité la plus petite est l'unité commune, et il faut transformer les fractions pour les exprimer dans l'unité commune : lorsque l'unité est dix fois plus petite, le numérateur est multiplié par dix. On obtient alors à transformer l'expression $5 \times 100 + 2 \times 10 + 6$ qui est la décomposition suivant les unités de numération du nombre 526. Il n'y a donc plus de calcul.

Plan

1. Présentation
   - Déroulement
   - Programmes
   - Difficultés
2. Fractions
   - Dans l'histoire
   - Unités fractionnaires
   - Mesures de longueurs
   - Au sujet des grandeurs
   - Aspect ratio, aspect opérateur
3. Décimaux
   - Intérêt
   - Liens fraction écriture décimale
   - Liens entier décimal
   - Propriétés des décimaux et rationnels
   - Écriture décimale et nombres réels.
4. Bibliographie

Quels acquis pour bien comprendre l'écriture décimale ?

Situation 33: analyse d'erreurs à partir de production d'élèves de 6e.

Quelles sont les stratégies possibles ? Quelles sont les causes possibles des erreurs ? Les fractions sont-elles comprises comme nombres ?

Quels acquis pour bien comprendre l'écriture décimale ?

Situation 34: analyse d'erreurs à partir de production d'élèves de 6e.

Quelles sont les stratégies possibles ? Quelles sont les causes possibles des erreurs ? Les fractions sont-elles comprises comme nombres ?

Points essentiels à avoir compris pour l'écriture des nombres décimaux

- Le rôle des unités de numération dans les règles de l'écriture décimale de position. *Avec en particulier le fait que les chiffres indiquent le nombre des unités isolées correspondant à la place du chiffre dans l'écriture.*
- Le principe de l'écriture de position et le rôle du 0. *Savoir que le 0 n'est pas uniquement une notation positionnelle suppose qu'il ait été introduit au cours du cycle 1 avant l'apparition de 10 en le présentant pour signifier l'absence d'une unité.*
- Les relations entre les unités. *Le travail sur les changements d'unités est important, et en particulier sur les décompositions non ordonnées et surtout non canoniques (par exemple écrire le nombre correspondant à 13 dizaines et 2 centaines. Voir Tempier (2013))*
- Le principe de la multiplication par 10, 100, 1000, puis de la division. *Il est important de préciser les relations entre unités (de dix en dix fois plus grandes) et de revenir sur le rôle des chiffres, en insistant sur le fait que multiplier par 10 revient à changer toutes les unités par les unités immédiatement supérieures, donc à déplacer tous les chiffres vers la gauche dans l'écriture du nombre.*

Plan

1. Présentation
   - Déroulement
   - Programmes
   - Difficultés
2. Fractions
   - Dans l'histoire
   - Unités fractionnaires
   - Mesures de longueurs
   - Au sujet des grandeurs
   - Aspect ratio, aspect opérateur
3. Décimaux
   - Intérêt
   - Liens fraction écriture décimale
   - Liens entier décimal
   - Propriétés des décimaux et rationnels
   - Écriture décimale et nombres réels.
4. Bibliographie

Fractions

Mélanie Guenais

Présentation
Déroulement
Programmes
Difficultés

Fractions
Dans l'histoire
Unités fractionnaires
Mesures de longueurs
Au sujet des grandeurs
Aspect ratio, aspect opérateur

Décimaux
Intérêt
Liens fraction écriture décimale
Liens entier décimal
Propriétés des décimaux et rationnels
Écriture décimale et nombres réels.

Vers l'écriture décimale : définir la virgule.

Définition : fraction décimale, nombre décimal

Un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire à l'aide d'une fraction décimale.
Une fraction est décimale si son dénominateur est une puissance de 10 (10, 100, 1000, etc).
Exemple : $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$ qui est une fraction décimale, donc $\frac{1}{2}$ est un nombre décimal.

Ecriture décimale et nouvelles unités de numération : dixièmes, centièmes, millièmes,..

Ces unités permettent de prolonger de manière efficace notre système d'écriture décimale de position : on peut alors définir une nouvelle classe de nombres parmi les fractions qui sont les nombres décimaux.

$$\begin{aligned} 34 + \frac{725}{1000} &= 34 + \frac{7}{10} + \frac{2}{100} + \frac{5}{1000} \\ &= 3 \times 10 + \mathbf{4} \times \mathbf{1} + 7 \times \frac{1}{10} + 2 \times \frac{1}{100} + 5 \times \frac{1}{1000} \\ &= 34{\scriptstyle 725} \end{aligned}$$

Vers l'écriture décimale : définir la virgule.

Définition : fraction décimale, nombre décimal

Un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire à l'aide d'une fraction décimale.
Une fraction est décimale si son dénominateur est une puissance de 10 (10, 100, 1000, etc).
Exemple : $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$ qui est une fraction décimale, donc $\frac{1}{2}$ est un nombre décimal.

Ecriture décimale et nouvelles unités de numération : dixièmes, centièmes, millièmes,..

Ces unités permettent de prolonger de manière efficace notre système d'écriture décimale de position : on peut alors définir une nouvelle classe de nombres parmi les fractions qui sont les nombres décimaux.

$$\begin{aligned} 34 + \frac{725}{1000} &= 34 + \frac{7}{10} + \frac{2}{100} + \frac{5}{1000} \\ &= 3 \times 10 + \mathbf{4} \times \mathbf{1} + 7 \times \frac{1}{10} + 2 \times \frac{1}{100} + 5 \times \frac{1}{1000} \\ &= 34_{725} \end{aligned}$$

- On introduit de nouveaux chiffres correspondants aux nouvelles unités fractionnées qu'on juxtapose à droite de l'unité par ordre de taille dans l'écriture du nombre.
- ces unités vérifient toutes les mêmes relations : 1 est le dixième de 10, $\frac{1}{10}$ est le dixième de 1, etc.. ou dans l'autre sens.

Vers l'écriture décimale : définir la virgule.

Définition : fraction décimale, nombre décimal

Un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire à l'aide d'une fraction décimale.
Une fraction est décimale si son dénominateur est une puissance de 10 (10, 100, 1000, etc).
Exemple : $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$ qui est une fraction décimale, donc $\frac{1}{2}$ est un nombre décimal.

Ecriture décimale et nouvelles unités de numération : dixièmes, centièmes, millièmes,..

Ces unités permettent de prolonger de manière efficace notre système d'écriture décimale de position : on peut alors définir une nouvelle classe de nombres parmi les fractions qui sont les nombres décimaux.

$$\begin{aligned} 34 + \frac{725}{1000} &= 34 + \frac{7}{10} + \frac{2}{100} + \frac{5}{1000} \\ &= 3 \times 10 + \mathbf{4} \times \mathbf{1} + 7 \times \frac{1}{10} + 2 \times \frac{1}{100} + 5 \times \frac{1}{1000} \\ &= 34{,}725 \end{aligned}$$

- On introduit de nouveaux chiffres correspondants aux nouvelles unités fractionnées qu'on juxtapose à droite de l'unité par ordre de taille dans l'écriture du nombre.
- ces unités vérifient toutes les mêmes relations : 1 est le dixième de 10, $\frac{1}{10}$ est le dixième de 1, etc.. ou dans l'autre sens.
- Pour savoir dans la nouvelle écriture décimale où se trouve l'unité, on indique sa place à l'aide d'une virgule. C'est la définition de la virgule.

Fractions

Mélanie Guenais

Présentation
Déroulement
Programmes
Difficultés

Fractions
Dans l'histoire
Unités fractionnaires
Mesures de longueurs
Au sujet des grandeurs
Aspect ratio, aspect opérateur

Décimaux
Intérêt
Liens fraction écriture décimale
Liens entier décimal
Propriétés des décimaux et rationnels
Écriture décimale et nombres réels.

Questions de graphie et de vocabulaire : attention !

Quelques points de vigilance :

Présentation
Déroulement
Programmes
Difficultés
Fractions
Dans l'histoire
Unités fraction-naires
Mesures de longueurs
Au sujet des grandeurs
Aspect ratio, aspect opérateur
Décimaux
Intérêt
Liens fraction écriture décimale
Liens entier décimal
Propriétés des décimaux et rationnels
Écriture décimale et nombres réels.

Questions de graphie et de vocabulaire : attention !

Quelques points de vigilance :

- Le mot fraction désigne d'abord une écriture mais représente, de manière non unique, un nombre. Au Cycle 3, c'est l'appellation du nombre par le terme de fraction qui prédomine (comme il est écrit dans les parties précédentes).

Questions de graphie et de vocabulaire : attention !

Quelques points de vigilance :

- Le mot fraction désigne d'abord une écriture mais représente, de manière non unique, un nombre. Au Cycle 3, c'est l'appellation du nombre par le terme de fraction qui prédomine (comme il est écrit dans les parties précédentes).
- L'une des difficultés majeures est la représentation en 2 nombres indépendants des décimaux et des fractions : proscrire tout vocabulaire en ce sens !

Fractions

Mélanie Guenais

Présentation
Déroulement
Programmes
Difficultés

Fractions
Dans l'histoire
Unités fractionnaires
Mesures de longueurs
Au sujet des grandeurs
Aspect ratio, aspect opérateur

Décimaux
Intérêt
Liens fraction écriture décimale
Liens entier décimal
Propriétés des décimaux et rationnels
Écriture décimale et nombres réels.

Questions de graphie et de vocabulaire : attention !

Quelques points de vigilance :

- Le mot fraction désigne d'abord une écriture mais représente, de manière non unique, un nombre. Au Cycle 3, c'est l'appellation du nombre par le terme de fraction qui prédomine (comme il est écrit dans les parties précédentes).
- L'une des difficultés majeures est la représentation en 2 nombres indépendants des décimaux et des fractions : proscrire tout vocabulaire en ce sens !
- La virgule est un marqueur de l'unité, ce n'est pas un séparateur. Attention aux sens implicites des gestes graphiques (virgule, trait oblique pour la fraction, trait de fraction). De même, les fractions ne proviennent pas d'une coupe en part égales !

Questions de graphie et de vocabulaire : attention !

Quelques points de vigilance :

- Le mot fraction désigne d'abord une écriture mais représente, de manière non unique, un nombre. Au Cycle 3, c'est l'appellation du nombre par le terme de fraction qui prédomine (comme il est écrit dans les parties précédentes).
- L'une des difficultés majeures est la représentation en 2 nombres indépendants des décimaux et des fractions : proscrire tout vocabulaire en ce sens !
- La virgule est un marqueur de l'unité, ce n'est pas un séparateur. Attention aux sens implicites des gestes graphiques (virgule, trait oblique pour la fraction, trait de fraction). De même, les fractions ne proviennent pas d'une coupe en part égales !
- Comparer avec les graphies anglo saxonnes. *Ce sont des écritures en rompus, la juxtaposition représente donc une addition et non une multiplication !*.

Questions de graphie et de vocabulaire : attention !

Quelques points de vigilance :

- Le mot fraction désigne d'abord une écriture mais représente, de manière non unique, un nombre. Au Cycle 3, c'est l'appellation du nombre par le terme de fraction qui prédomine (comme il est écrit dans les parties précédentes).
- L'une des difficultés majeures est la représentation en 2 nombres indépendants des décimaux et des fractions : proscrire tout vocabulaire en ce sens !
- La virgule est un marqueur de l'unité, ce n'est pas un séparateur. Attention aux sens implicites des gestes graphiques (virgule, trait oblique pour la fraction, trait de fraction). De même, les fractions ne proviennent pas d'une coupe en part égales !
- Comparer avec les graphies anglo saxonnes. *Ce sont des écritures en rompus, la juxtaposition représente donc une addition et non une multiplication !.*
- Comparer avec les touches de la calculette pour le signe de division. *Le recours à l'utilisation de la calculette pour remplacer la barre de fraction par la barre de division entretient la confusion sur la "valeur" du nombre qui n'a de sens qu'après sa transformation en écriture décimale : cela renforce l'idée qu'une fraction est une opération non terminée.*

Questions de graphie et de vocabulaire : attention !

Quelques points de vigilance :

- Le mot fraction désigne d'abord une écriture mais représente, de manière non unique, un nombre. Au Cycle 3, c'est l'appellation du nombre par le terme de fraction qui prédomine (comme il est écrit dans les parties précédentes).
- L'une des difficultés majeures est la représentation en 2 nombres indépendants des décimaux et des fractions : proscrire tout vocabulaire en ce sens !
- La virgule est un marqueur de l'unité, ce n'est pas un séparateur. Attention aux sens implicites des gestes graphiques (virgule, trait oblique pour la fraction, trait de fraction). De même, les fractions ne proviennent pas d'une coupe en part égales !
- Comparer avec les graphies anglo saxonnes. *Ce sont des écritures en rompus, la juxtaposition représente donc une addition et non une multiplication !.*
- Comparer avec les touches de la calculette pour le signe de division. *Le recours à l'utilisation de la calculette pour remplacer la barre de fraction par la barre de division entretient la confusion sur la "valeur" du nombre qui n'a de sens qu'après sa transformation en écriture décimale : cela renforce l'idée qu'une fraction est une opération non terminée.*
- Un même nombre.. mais plusieurs écritures. *Par exemple* $2\frac{3}{4}$ *pour un anglosaxon c'est* $2,75$ *en notation décimale, c'est aussi* $\frac{11}{4}$ *en écriture à l'aide d'une fraction, ou encore* $\frac{33}{12}$, *ou* $\frac{5,5}{2}$ *en écriture fractionnaire, ou encore* $\frac{5}{2}+\frac{1}{4}$ *etc..*

Plan

1. Présentation
   - Déroulement
   - Programmes
   - Difficultés
2. Fractions
   - Dans l'histoire
   - Unités fractionnaires
   - Mesures de longueurs
   - Au sujet des grandeurs
   - Aspect ratio, aspect opérateur
3. Décimaux
   - Intérêt
   - Liens fraction écriture décimale
   - Liens entier décimal
   - Propriétés des décimaux et rationnels
   - Écriture décimale et nombres réels.
4. Bibliographie

Synthèse : propriétés des nombres rationnels et cas particulier des nombres décimaux

Points communs avec les entiers

- même support de représentation sur la droite graduée,
- technique de comparaison analogue à celle des entiers pour les nombres décimaux, en étant vigilant sur les unités comparées (ne pas se tromper de place dans l'écriture)
- techniques opératoires liés à la base dix identiques aux entiers pour les nombres décimaux, en étant vigilant sur les unités communes.

Synthèse : propriétés des nombres rationnels et cas particulier des nombres décimaux

Points communs avec les entiers

- même support de représentation sur la droite graduée,
- technique de comparaison analogue à celle des entiers pour les nombres décimaux, en étant vigilant sur les unités comparées (ne pas se tromper de place dans l'écriture)
- techniques opératoires liés à la base dix identiques aux entiers pour les nombres décimaux, en étant vigilant sur les unités communes.

Ruptures avec les entiers

- Existences de nombres arbitrairement petits,
- Pas de successeur, existence de nombres arbitrairement proches, (intercalation)
- Techniques opératoires de l'addition et de comparaison additive difficiles avec des fractions qui ne sont pas décimales.
- Les effets des multiplications et divisions par les nombres plus petits que 1 contredisent l'idée que la multiplication grandit le nombre et que la division le diminue.

Plan

1. Présentation
   - Déroulement
   - Programmes
   - Difficultés
2. Fractions
   - Dans l'histoire
   - Unités fractionnaires
   - Mesures de longueurs
   - Au sujet des grandeurs
   - Aspect ratio, aspect opérateur
3. Décimaux
   - Intérêt
   - Liens fraction écriture décimale
   - Liens entier décimal
   - Propriétés des décimaux et rationnels
   - Écriture décimale et nombres réels.
4. Bibliographie

Approximations rationnelles en Mésopotamie, il y a 4000 ans.

Situation 35: La numération babylonienne : clous et chevrons

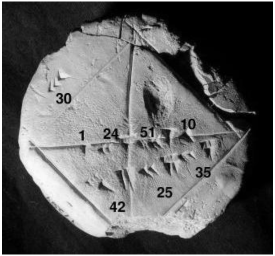
C'est une numération positionnelle en base soixante, mais sans le zéro. On écrit un clou pour une unité et un chevron pour une dizaine.

Comment écrivez-vous 1, 15, 59, 60, $\frac{1}{4}$?

1 et 60 s'écrivent tous les deux de la même manière, avec un clou. Donc $\frac{1}{4}$ s'écrit comme le quart de 60 qui vaut..15 !

une approximation de la diagonale du carré...2000 ans avant Pythagore

La tablette montre une approximation de $\sqrt{2}$ avec 10 chiffres significatifs.. mais ce ne peut pas être une valeur exacte. Savez-vous pourquoi ?



Les limites de l'écriture décimale pour écrire les fractions

Situation 36: Ecriture décimale des fractions

Ecrire $\frac{10}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{7}$ en écriture décimale. Que penser du nombre 0,9999... ?

Les limites de l'écriture décimale pour écrire les fractions

Situation 37: Ecriture décimale des fractions

Ecrire $\frac{10}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{7}$ en écriture décimale. Que penser du nombre 0,9999... ?

Ecriture décimale, nombre décimal, nombre réel.

Les nombres décimaux sont les nombres rationnels qui "oublient" tous les rationnels qui ne peuvent pas s'écrire à l'aide de demi et de cinquièmes (qui permettent de fabriquer les dixièmes, centièmes, etc..).
En revanche tous les nombres réels peuvent s'écrire à l'aide de l'écriture décimale à condition de permettre à la suite des chiffres correspondants aux unités de plus en plus petites de ne pas s'arrêter (c'est alors l'écriture qui est infinie, pas le nombre !).

L'écriture décimale et l'algorithme de la division

Pour donner l'écriture décimale d'un nombre écrit à l'aide d'une fraction $\frac{k}{n}$, on effectue la division du numérateur par son dénominateur. Il est possible qu'elle ne s'arrête pas...mais elle "boucle" : toute fraction admet une écriture décimale périodique.
On peut aussi chercher à résoudre la multiplication à trou, comme les babyloniens !
Exemple : pour trouver l'écriture de $\frac{3}{4}$ en centièmes, on cherche le nombre qui multiplié par 4 donne 300 (centièmes) : c'est 75 centièmes. Donc $\frac{3}{4} = 0,75$.

Ecritures décimales-commentaires

- $\frac{10}{4}$ s'obtient facilement en divisant 10 par 2, puis par 2 , pour obtenir 2,5.
- $\frac{1}{3}$ (et $\frac{1}{7}$) ne peut pas être équivalent à une fraction décimale, car 3 n'a pas de diviseur commun avec 10.
- On peut approcher $\frac{1}{3}$ aussi près qu'on veut en dixième, centième, millièmes, etc : en centièmes, cela donne le tiers de 100 centièmes, c'est à dire 33 centièmes et un tiers de centième : on obtient $\frac{1}{3} = 0,33 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{100}$. On peut continuer, ou changer d'unité de numération.. c'est le principe de la division décimale.
- Utilisons la même technique pour $\frac{1}{7}$ (pour les motivés !) :
  - un septième c'est le septième de 10 dixièmes, donc c'est 1 dixième et 3 septièmes de dixièmes : $\frac{1}{7} = \frac{1}{10} + \frac{3}{7} \times \frac{1}{10} = 0,1 + \frac{3}{7} \times \frac{1}{10}$
  - Trois septièmes de dixièmes, c'est le septième de 30 centièmes, donc c'est 4 centièmes et 2 septièmes de centièmes. Donc $\frac{1}{7} = \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{2}{7} \times \frac{1}{100} = 0,14 + \frac{2}{7} \times \frac{1}{100}$.
  - On peut continuer, ou aller plus vite : deux septièmes de centièmes, c'est le septième de 20 millièmes, ou 200 dix-millièmes, ou 2000 cent-millièmes ; donc c'est $(2 + \frac{6}{7})$ millièmes ou $(28 + \frac{4}{7})$ dix-millièmes, ou $(285 + \frac{5}{7})$ cent-millièmes, ou même encore $(2857 + \frac{1}{7})$ millionièmes.
  - On obtient donc $\frac{1}{7} = 0,142857 + \frac{1}{7} \times \frac{1}{1000000}$. Mais on peut recommencer !
    $\frac{1}{7} = 0,142857 + \frac{0,142857}{1000000} + \frac{1}{7} \times \frac{1}{1000000} \times \frac{1}{1000000} = 0,142857142857 + \frac{1}{7} \times \frac{1}{1000000^2}$
    etc..
- Pour le nombre 0,9999..., il s'agit des problèmes de l'écriture décimale qui n'est pas unique pour les nombres décimaux. On peut imaginer un verre rempli au 9 dixièmes, auquel on ajoute 9 dixièmes de ce qui manque, et ainsi de suite...à la fin, le verre est plein : c'est 1. (A méditer... il y a bien sûr d'autres méthodes !)

Pour terminer : et π dans tout ça ?

Situation 38: Mesure de cercle et découverte de π.

Activité de découverte du rapport entre la longueur du périmètre du cercle et son diamètre : les élèves tracent par binôme des cercles au sol à l'aide d'une ficelle, puis mesurent les 2 longueurs, en choisissant leur unité (mètres, centimètres, ficelle, pieds, etc..). On reporte les données dans un tableau, et on compare les résultats. L'objectif est d'amener la conscience d'un rapport constant qui est proche de 3, indépendant de l'unité et de la taille des cercles. On demande d'abord de deviner une règle multiplicative entre diamètre et périmètre. On compare ensuite le triple du diamètre au périmètre, puis on cherche le rapport (avec la calculette) entre périmètre et diamètre. On observe des valeurs numériques proches, mais supérieures à 3. On peut poursuivre vers des questions statistiques et expérimentales.

Petite digression historique

Le nombre π fait partie des nombres les plus anciens et les plus étudiés. Parce qu'il est difficile d'en donner une mesure exacte, que son statut de ratio ne permet pas aux mathématiciens de l'antiquité grecque de l'intégrer parmi les nombres, parce qu'il recèle encore de trésors cachés dans les chiffres de son écriture (par exemple Gramain 2010). Connaissez-vous d'autres nombres célèbres ?

Le nombre d'or fait partie des nombres ancestraux définis par leur rapport (la divine proportion) : il s'agit du rapport entre la largeur et la hauteur d'un rectangle qui reste constant lorsqu'on enlève un carré de la hauteur du rectangle : ce nombre est relié aux suites de Fibonacci, et la nature l'utilise beaucoup ! C'est le nombre le plus difficilement approché par les nombres rationnels.

Eléments de bibliographie

- Anselmo, B., Rozanes, B., Zucchetta, H. (2017). *Construire des nouveaux nombres au Cycle 3 : fractions et décimaux*, At 15, Colloque des IREM, Poitiers.
- Austin, D., Guillemot, M. (2017). *Les "fractions égyptiennes"*, repères IREM n°106, p.49-77
- Bloch, I. (2013) *Élèves en difficulté à l'entrée au collège : quels repères pour penser l'enseignement des mathématiques*, Petit x, 93, IREM de Grenoble.
- Brousseau, G., Brousseau, N. (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*, IREM de Bordeaux.
- Chambris, C. (2012). *Consolider la maîtrise de la numération et des grandeurs à l'entrée au collège : le système métrique peut-il être utile ?*, Petit x, 89, IREM de Grenoble.
- Chambris, C., Tempier, F., Allard, C. (2017). *Un regard sur les nombres à la transition école-collège*, Repères IREM.
- Chevallard, Y., Chambris, C. (2015). *Grandeurs et nombres : quelques remarques pour un programme*, CFEM
- Cortina,J. L., Visnovská, J., Zúñiga, C. (2015) *An Alternative Starting Point for Fraction Instruction*, International Journal for Math. Teaching and Learning
- Coulange, L., Train, G. (2017). *Continuités et ruptures de l'enseignement des fractions au cycle 3. Quelles perspectives ?* At 21, Colloque des IREM Poitiers.

Eléments de bibliographie

- Empson, S. B., Junk, D., Dominguez, H., Turner, E. (2006) *Fractions as the Coordination of Multiplicatively Related Quantities : A Cross-Sectional Study of Children's Thinking* Educational Studies in Mathematics, Vol. 63, No. 1, 1-28
- Gramain, F. (2010) *Les décimales de* π, Images de Maths, CNRS.
- Kieren, T. (1976). *On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers.* In R. Lesh (Ed.), Number and measurement : Papers from a research workshop, 101-144. Columbus, Ohio : IRC
- Lubczanski, J. (2008) Interprétation d'une tablette babylonienne, Exposition Babylone, Louvre.
- Simon, M. A. (2006) *Key Developmental Understandings in Mathematics : A Direction for Investigating and Establishing Learning Goals*, Mathematical thinking and learning, 8(4), 359-371
- Tempier, F.(2013) La numération décimale à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource., Thèse, Université Paris Diderot.