Chapitre 4

Maths et musique

Rémi Coulon

Dans ses mémoires Hector Berlioz (1803 - 1869), grand compositeur français, raconte une de ses soirées à l'opéra. Ce jour là, on donnait une représentation d'Œdipe à Colone, opéra d'Antonio Sacchini. Un énorme succès à l'époque. Dans un mouvement de prosélytisme musical, Berlioz avait emmené avec lui un ami étudiant. Le jeune homme « *parfaitement étranger à tout autre art que celui du carambolage* », passa la soirée à éplucher des oranges. Devant lui, au contraire, un spectateur bouleversé s'exclamait : « *C'est sublime !... Quel art céleste !... Ah, monsieur quelle musique !* ». Voyant que Berlioz manifestait aussi son émotion, le spectateur lui tomba dans les bras. Berlioz poursuit son récit ainsi. « *Sans m'étonner le moins du monde, et la figure toute décomposée par les larmes, je lui réponds par cette interrogation :*
- Êtes-vous musicien ?
- Non, mais je sens la musique aussi vivement que qui que ce soit.
- Ma foi c'est égal. Donnez moi votre main. Pardieu monsieur, vous êtes un brave homme.
Là dessus, parfaitement insensible aux ricanements des spectateurs qui faisaient un cercle autour de nous, comme à l'air établi de mon mangeur d'oranges, nous échangeons quelques mots à voix basse, je lui donne mon nom, il me confie le sien et sa profession. C'est un ingénieur ! Un mathématicien !!! Où diable la sensibilité va-t-elle se nicher ! »

Considérer que mathématique et musique n'ont a priori rien à faire ensemble, voilà un point de vue tout à fait « romantique ».Pourtant pendant très longtemps la musique fut considérée comme une science au même titre que l'astronomie ou la géométrie. A ce titre de nombreux savants se sont penchés sur les problèmes musicaux : Pythagore, Galilée, Descartes, Euler, pour n'en citer que quelques-uns.

Au cours de l'histoire, les échanges entre la musique et les mathématiques furent fréquents. Dans certains cas, les mathématiques offrent un langage qui permet de décrire et de mieux comprendre certains aspects de la musique. Dans d'autres cas, au contraire la musique a considérablement devancé sa consœur, en introduisant des objets qui ne seront formalisés que plusieurs siècles après. Ce dialogue entre les deux disciplines prend nécessairement une part importante dans la théorie musicale. La construction d'une gamme en est un exemple. Mais l'apport des mathématiques ne se limite pas à la théorie. On le retrouve dans des aspects très pratiques - comment fixer de la musique sur le papier ? - ou encore dans des questions esthétiques liées à la composition.

1 Construire une gamme... la quadrature du cercle musical ?

« *do, ré, mi, fa, sol, la, si, do. Gratte moi la puce que j'ai dans le dos* ». Comme dans cette comptine, cette gamme utilisée dans toute la musique occidentale, semble une évidence. Pourtant le choix des notes - c'est à dire ici de leur hauteur - pour construire une gamme a agité l'esprit de nombreux savants depuis l'Antiquité. Ce n'est qu'à partir de la fin du XVIII^e siècle que la gamme tempérée à laquelle nous sommes habitués a pris sa forme définitive. Elle est le résultat d'un compromis entre des considérations théoriques et des problèmes concrets issus de la pratique musicale.

1.1 Dans la forge de Pythagore

Pythagore (VI^e siècle av. J.C.) évoque pour beaucoup le bon vieux théorème du même nom. « *Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égale à la somme...* » S'il est surtout connu comme mathématicien, c'est aussi l'un des premiers grands théoriciens de la musique. La légende raconte qu'il découvrit le lien entre la musique et les nombres, au détour d'une promenade, en passant devant une forge. Il remarqua que la note produite par le marteau lorsqu'il frappe l'enclume ne dépend que de la masse de celui-ci. Plus le marteau est léger, plus le son est aigu. Dans un langage moderne, la fréquence de la note est inverse-proportionelle à la masse du marteau. En soupesant les marteaux, Pythagore s'aperçut que l'intervalle entre deux notes ne dépendait que du rapport entre leurs masses. En musique, un intervalle est la distance qui sépare deux notes. Leurs noms proviennent du nombre de notes entre les extrémités de l'intervalle. Deux pour la *seconde*, trois pour la *tierce*, quatre pour *quarte*, etc. Prenons par exemple trois marteaux pesant respectivement 2, 3 et 4 livres. Les deux notes produites par les marteaux de 2 et 4 livres, sont certes différentes mais se ressemblent si singulièrement qu'on leur donne le même nom - *do* et *do* par exemple. L'intervalle entre celles-ci est une *octave*[1]. Le rapport correspondant entre les masses des marteaux est 2. L'intervalle associé aux marteaux de 2 et 3 livres est une *quinte* - l'intervalle entre un *do* et un *sol* par exemple. Il est caractérisé par le rapport 3/2. Certes les grecs anciens ne connaissaient pas la notion de fréquence, mais celle-ci offre un outil - plus commode que les marteaux - pour décrire ces observations. Considérons deux notes dont les fréquences sont f_1 pour la plus grave et f_2 pour la plus aiguë. Si l'intervalle entre les deux notes est un octave alors $f_2/f_1 = 2$. Pour une quinte on a $f_2/f_1 = 3/2$.

[1]Le terme d'octave est aussi utilisé en électronique, en traitement du signal, etc. On dit par exemple que l'atténuation d'un filtre est de « 6 dB par octave » si l'amplitude du signal de sortie est diminuée de 6 décibels, lorsque la fréquence du signal d'entrée est doublée.

Cette découverte va façonner la pensée grecque. En effet, dans l'Antiquité, seules l'octave et la quinte étaient considérées comme des intervalles consonants. Il suffit pour les caractériser des nombres 1, 2 et 3. Cette simplicité vint conforter les pythagoriciens que l'Univers était régi par les nombres. Certains musicologues pensent même que c'est à partir de ce constat que les pythagoriciens cherchèrent à décrire le monde par des nombres entiers. Pour eux la musique était « l'art du nombre rendu audible ». A ce titre la musique a longtemps été classée parmi les sciences. Jusqu'à la fin du Moyen-âge notamment, l'enseignement reposait sur un socle de sept matères : les arts libéraux. Ceux-ci se divisaient en deux catégories : les arts du langages, le *trivium*, composé de la rhétorique la dialectique et la grammaire et les arts du nombres, le *quadrivium*, qui se compose de l'arithmétique, la géométrie, l'astronomie et la musique.

Décomposition d'un son en fréquence

Le son est provoqué par un mouvement de l'air. Un microphone, en mesurant les variations de pressions, permet de s'en faire une image. Pour « visualiser » le signal sonore, on peut représenter le déplacement $s(t)$ de la membrane du microphone en fonction du temps t. Le signal correspondant à une note de musique tenue a la particularité d'être périodique, c'est à dire que le graphe de la fonction s contient un fragment qui se répète à l'identique (voir Fig. 4.1).

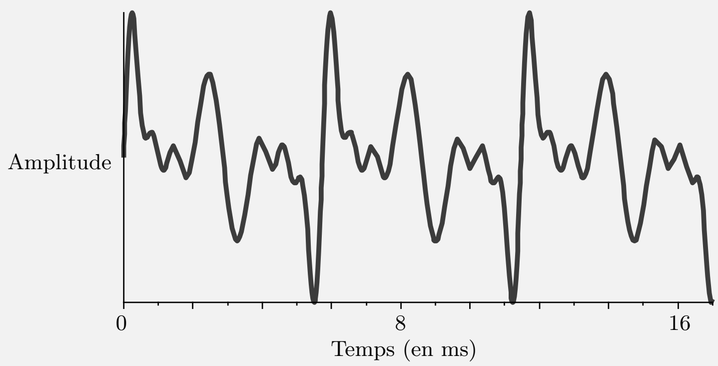


Fig. 4.1: *Enregistrement simplifié d'une clarinette jouant un fa*

Mathématiquement on écrit qu'il existe un nombre T tel que pour tout temps t on ait $s(t+T) = s(t)$. T, baptisé *période* du signal, caractérise la hauteur du son. En général on préfère travailler avec son inverse $f = \frac{1}{T}$ qu'on appelle la fréquence. Elle se mesure en Hertz (Hz). Plus un son est aigu, plus sa fréquence est élevée. Les fonctions trigonométriques $t \to \sin(2\pi ft)$ et $t \to \cos(2\pi ft)$ sont des fonctions périodiques de fréquence f.

C'est en étudiant la propagation de la chaleur que Joseph Fourier (1768 - 1830), mathématicien et physicien français, inventa la décomposition en série trigonométrique qui porte son nom. Il montra que toute fonction périodique s de fréquence f est peut être écrite comme une somme de fonctions trigonométriques dont les fréquences sont des multiples entiers de f.

$$s(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(2k\pi ft) + b_k \sin(2k\pi ft)$$

Les coefficients a_k et b_k dépendent de s et peuvent être calculés explicitement via une « grosse » formule. Tout cela n'est pas forcément très parlant. Restons concret, voici une petite expérience qui permet « d'entendre » la décomposition en série de Fourier. Munissez vous d'un piano - bien accordé de préférence - maintenez la pédale enfoncé, celle qui relève les étouffoirs et permet aux cordes de vibrer librement. Maintenant enfoncez brutalement la touche du *do* le plus grave - faîtes tout de même attention à l'instrument... surtout si c'est un Steinway - et ouvrez grand vos oreilles. En plus du *do* que vous venez de jouer vous devez entendre quelques autres notes. Que ce passe-t-il ? Le signal qui correspond au *do* grave est périodique et n'échappe pas à la décomposition de Fourier, c'est donc une somme de signaux sinusoïdaux. Les termes de fréquence kf ayant la même fréquence que d'autres notes du piano, vont faire entrer en résonance les cordes correspondantes. On dit que le son musical est une superposition de sinusoïdes. L'ensemble des fréquences $f, 2f, 3f, \ldots$ est appelé le spectre du son. La valeurs des coefficients a_k et b_k diffèrent d'un instrument à l'autre (voir Fig. 4.2). Il sont pour beaucoup dans le timbres de l'instrument.

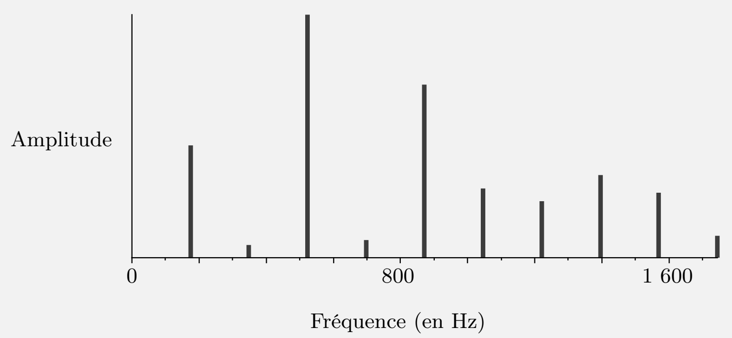


FIG. 4.2: *Spectre simplifié d'une clarinette jouant un fa. L'amplitude des fréquences correspond aux valeurs des coefficients b_k (les a_k sont nuls).*

La décomposition de Fourier permet d'expliquer un peu pourquoi certains sons joués simultanément nous paraissent agréables. Il y a certes une grande part de subjectivité dans ce jugement, mais on peu tenter une ébauche d'explication. Deux notes paraissent harmonieuses si leur spectre sont proches. Prenons deux notes situées à une octave d'intervalle. La note basse a une fréquence f, son spectre est $f, 2f, 3f, \ldots$. La seconde a pour fréquence $2f$ et son spectre est $2f, 4f, 6f, \ldots$. Ce dernier est donc entièrement contenu dans le spectre de la note basse. Tant et si bien qu'on a l'impression que les deux notes sont identiques. Plus généralement, considérons deux notes N_1 et N_2 de fréquences respectives f_1 et f_2 telles que $f_2/f_1 = p/q$. Seule une fréquence sur q du spectre de N_2 fait partie du spectre de N_1. Ceci explique en partie pourquoi Zarlino cherche à utiliser uniquement des rapports avec des petits dénominateurs.

La décomposition en série de Fourier a d'autres applications. Le format musical MP3 utilise pour compresser l'information le fait que les fréquences hautes du spectre sont de faibles intensités.

1.2 Le cycle des quintes

Forts de ces considérations mathématiques et philosophiques, les pythagoriciens ont proposé une échelle musicale. La note la plus grave de la gamme, par exemple un *do*, est appelée *fondamentale*. Sa fréquence sera notée f. L'objectif est de construire une suite de notes entre la fondamentale et le *do* situé une octave au dessus, ce qui revient à se donner un ensemble de fréquences entre f et $2f$. Puisque seules la quinte et l'octave sont considérées comme consonantes, voici une manière de procéder. A partir de la fondamentale, on construit la note située une quinte au dessus, un sol , et dont la fréquence est $\frac{3}{2}f$. La note située une quinte au dessus de ce *sol* a pour fréquence $\frac{9}{4}f$. Toutefois, on dépasse ici la limite supérieure de $2f$. Pour ramener cette note dans l'intervalle $[f; 2f]$, il suffit de l'abaisser d'une octave - ce qui revient à diviser sa fréquence par deux. La note ainsi obtenue, un *ré*, a pour fréquence $\frac{9}{8}f$. En réitérant le processus on construit le cycle des quintes : *do*, *sol*, *ré*, *la*, *mi*, *si*, ... Cette construction peut se poursuivre à l'infini. En effet, si on considère deux notes distinctes, le rapport de leurs fréquences est toujours de la forme $\frac{3^p}{2^q}$ avec p, q deux entiers relatifs. Celui-ci ne peut donc être égal à 1. Le nombre de notes de la gamme est donc fixé arbitrairement. Dans la civilisation chinoise, les principales gammes, construites sur le même principe comportent cinq notes. La gamme pythagoricienne en utilise sept[2] (voir Fig. 4.1).

Si on prolonge encore le cycle des quintes, il est raisonnable de s'arrêter au

[2] On notera que le *fa* est en fait construit comme la note une quinte en dessous du *do*. Pour construire une gamme, on commence le cycle des quintes une quinte au dessous de la fondamentale.

Note	*do*	*ré*	*mi*	*fa*	*sol*	*la*	*si*	*do*
Rapport	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	2

TAB. 4.1: Gamme pythagoricienne. Elle est obtenue en arrêtant le cycle des quintes au bout de sept notes. Le tableau donne le nom des notes et le rapport de leur fréquence à la fondamentale

Note	*do*	*do*♯	*ré*	*ré*♯	*mi*	*fa*	*fa*♯	*sol*	*sol*♯	*la*	*la*♯	*si*	*do*
Rapport	1	$\frac{2187}{2048}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{19683}{16384}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{729}{512}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{6561}{4096}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{59049}{32768}$	$\frac{243}{128}$	2

TAB. 4.2: Gamme chromatique. Elle est obtenue en arrêtant le cycle des quintes au bout de douze notes. Le tableau donne le nom des notes et le rapport de leur fréquence à la fondamentale

bout de douze notes[3] (voir Fig. 4.2). En effet la douzième note obtenue, donnée par le rapport $\frac{3^{12}}{2^{19}} \simeq 1,013$, est très proche de la note de départ, si bien que l'oreille ne les distingue pas facilement. Toutefois si on stoppe la construction au bout de douze notes, un problème subsiste : dans le cycle des quintes, l'intervalle qui permet de passer de la douzème note (*la*♯) à la première (*fa*)[4]- ou plus précisément, une octave au dessus de la première - n'est pas tout à fait une quinte juste. Son rapport est $(8/3)/(59049/32768) = 262144/177147 \simeq 1,479 < 3/2$. Les deux notes, jouées simultanément, produisent une impression bizarre. On entend une sorte de battement à la manière d'une alarme incendie. On dit que la quinte « hurle », d'où son nom *quinte du loup*. Cette impossibilité de construire une gamme n'utilisant que des intervalles naturels sera l'un des grands problèmes des théoriciens de la musique.

1.3 Gioseffo Zarlino et la gamme naturelle

Durant l'Antiquité, la musique était essentiellement monodique : tous les instruments jouaient la même mélodie. L'apparition vers le XII^e siècle de la polyphonie a changé la perception des intervalles. Jusque là, les musiciens s'intéressaient uniquement aux intervalles mélodiques (entre deux notes jouées successivement). La polyphonie, faisant entendre plusieurs voix différentes, prend naturellement en compte les intervalles harmoniques, c'est à dire entre deux notes jouées simultanément. A ce titre, la *tièrce majeure* et la *tierce mineure* caractérisées respectivement par les rapports 5/4 et 6/5 changèrent de statut. A

[3]Dans la gamme chromatique proposée, toutes les notes altérées sont « diésées », pour obtenir les bémols, il faut prendre un cycle de quintes descendant et non ascendant.

[4]On rappelle qu'on a commencé le cycle des quintes sur un *fa*.

partir de la Renaissance elles rejoignent l'octave et la quinte au rang des intervalles consonants. Cette tierce naturelle est essentielle pour construire *l'accord parfait majeur* point de départ de l'harmonie. Un accord parfait majeur est la superposition de trois notes : la fondamentale (1/1) *do*, la tierce majeure (5/4) *mi* et la quinte (3/2) *sol*. L'intervalle entre le *mi* et le *sol* est la différence entre la quinte et la tierce majeure. Son rapport est $(3/2)/(5/4) = 6/5$. C'est une tierce mineure. De ce point de vue, la gamme pythagoricienne présente un grave défaut. Ces deux tierces n'apparaissent pas dans le cycle des quintes. En effet il est impossible d'écrire 5/4 et 6/5 sous la forme $\frac{3^q}{2^p}$. Dans la gamme pythagoricienne, la tierce dont la rapport est 81/64, sonne fausse. Pour pallier ce problème, Gioseffo Zarlino (1517 - 1590) musicien et théoricien vénitien[5] inventa la *gamme naturelle*. Son idée est d'utiliser un maximum de rapports « simples » faisant intervenir des petits dénominateurs (voir l'encadré *Décomposition d'un son en fréquence*). La gamme zarlinienne est donnée à la figure 4.3.

Note	*do*	*ré*	*mi*	*fa*	*sol*	*la*	*si*	*do*
Rapport	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2

TAB. 4.3: Gamme zarlinienne. Le tableau donne le nom des notes et le rapport de leur fréquence à la fondamentale

La gamme de Zarlino présentée ici a pour fondamentale un *do*. Toutefois les musiciens ne se contentent pas d'une seule gamme. On peut imaginer de construire la même gamme à partir d'un *sol*, d'un *fa* ou de toute autre note. La note de base à partir de laquelle est construite une gamme détermine sa *tonalité*. Lorsqu'on parle du *Concerto pour clarinette en la* de Wolfgang Amadeus Mozart, cela signifie que l'œuvre est composée dans la tonalité de *la*. En ayant plusieurs tonalités à leur disposition, les compositeurs peuvent créer des effets savoureux notamment en en changeant au milieu d'une pièce. On parle de *modulation*. Toutefois du point de vue théorique, multiplier les tonalités multiplie les difficultés.

Imaginons la situation suivante. On a déjà construit une gamme zarlinienne à partir de la fondamentale *do* de fréquence f_0. On souhaite maintenant construire une gamme dont la fondamentales est *sol* (fréquence $\frac{3}{2}f_0$) sur le modèle de la gamme zarlinienne. On ne peut pas se contenter d'utiliser les sept notes de la figure 4.3. En effet l'intervalle entre les deux dernières notes de la gamme Zarlinienne est donné par le rapport $2/(15/8) = 16/15$. C'est un *demi-ton*. Dans la gamme de *sol*, il faut donc une note un demi-ton en dessous

[5]Pour la petite histoire, G. Zarlino enseigna la théorie musicale à Vincenzo Galilei, père du célèbre scientifique Galileo Galilei.

du *sol* dont la fréquence sera $f = \frac{15}{16} \times \frac{3}{2} f_0 = \frac{45}{32} f_0$. Cette note - un *fa*$\sharp$ - ne fait pas partie de la gamme de *do*. On dit qu'elle est *altérée*. Ce besoin de notes supplémentaires existait déjà avec la gamme pythagoricienne. La gamme naturelle introduit un autre problème. Chez Pythagore la gamme de *do* et la gamme de *sol* sont rigoureusement identiques. L'intervalle entre la note i et la note $i+1$ ne dépend pas de la fondamentale. Ce n'est pas le cas dans la gamme de Zarlino. Déjà l'intervalle entre les deux premières notes de la gamme est différent. En *do*, l'intervalle *do* -*ré* est donné par le rapport 9/8, en *sol* l'intervalle *sol* -*la* correspond à la fraction 10/9. Du point de vue pratique ce constat est catastrophique. Dans un premier temps, il faut multiplier le nombre de notes. Zarlino ne se contente pas de douze notes comme dans la gamme chromatique de Pythagore. Dans son ouvrage *Le istitutioni harmoniche*, G. Zarlino présente un clavecin peu commun (voir Fig. 4.3). Le clavier se compose de trois types de touches. Les longues pour les notes non altérées. Les petites noires pour les dièses et les petites blanches pour les bémols.

Même avec cet artifice les gammes diffèrent d'une tonalité à l'autre, empêchant ainsi toute transposition ou modulation. Un chanteur ne pouvant pas interpréter une pièce trop aiguë va devoir la transposer, c'est à dire la chanter dans une tonalité plus grave. S'il est seul, libre à lui d'adapter la répartition des intervalles. Mais s'il est accompagné d'un clavecin, il sera obligé d'utiliser une gamme dans laquelle les intervalles seront répartis de manière différente. Cela aura pour effet de « tordre » la mélodie. Ce qui n'est pas nécessairement l'effet escompté. De même pour les modulations, si au cours d'un pièce le compositeur décide de changer de tonalité, sa mélodie sera aussi déformée.

1.4 Vers un clavier bien tempéré

Les gammes pythagoricienne et zarlinienne soulèvent des problèmes pratiques. La première ne prend pas en compte l'aspect harmonique de la musique, la seconde ne permet pas de passer facilement d'une tonalité à une autre. Pour résumer voici les trois caractéristiques que devraient vérifier une « bonne » gamme.

1. Comporter un nombre « limité » de notes dans une octave (sinon les pianistes s'emmêleraient les doigts). Par exemple confondre les notes dites enharmoniques comme le *do*$\sharp$ et le *ré*$\flat$.
2. Présenter le plus grand nombre possibles de tierces et de quinte justes.
3. Permettre de transposer et moduler facilement.

La théorie montre qu'il est parfaitement impossible de construire une gamme dont toutes les tierces et les quintes seraient justes. Déjà dans la gamme de Pythagore qui n'utilise que la quinte cette contrainte est trop forte. Pour contourner cette difficulté, on peut placer les quintes du loup et autres animaux du

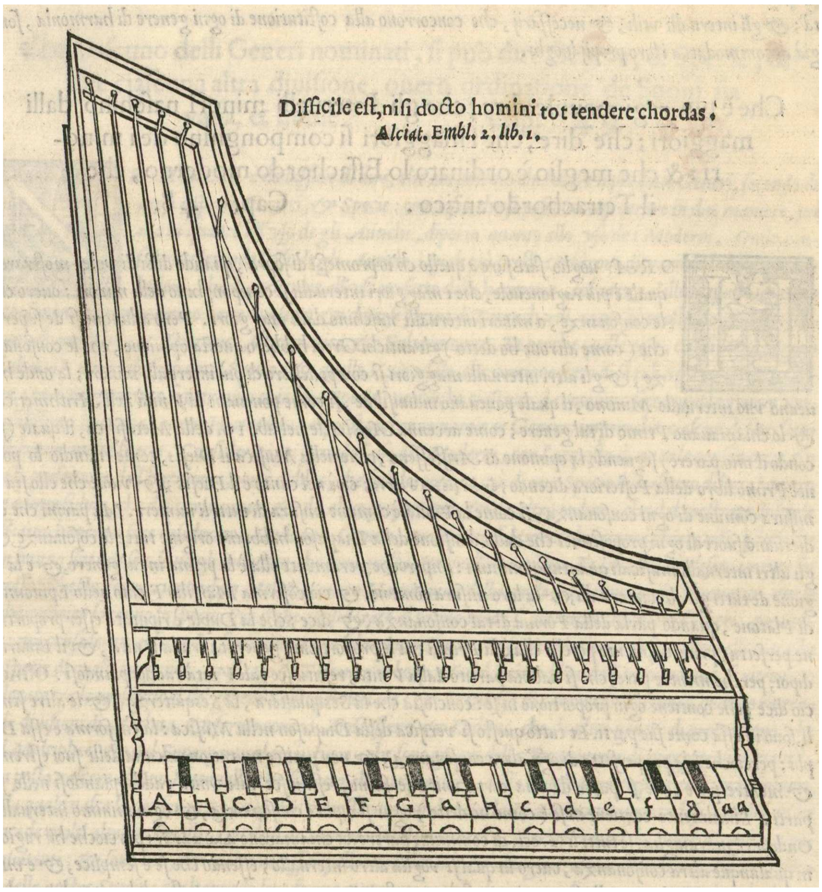


FIG. 4.3: Modèle de clavecin avec trois types de touches extrait de *Le istitutioni harmoniche* de G. Zarlino.

genre, de telle sorte que les intervalles faux soient ceux qui dans la pratique sont le moins utilisés. Mais cela ne suffit pas pour répondre aux trois exigences ci-dessus. Puisqu'il est impossible de construire une gamme parfaite, il va falloir faire des compromis en privilégiant l'un ou l'autre des aspects. On appelle tempérament une gamme obtenue en modifiant légèrement les intervalles naturels. Les tempéraments sont très nombreux. Chaque théoricien propose le sien. Les tempérament inégaux privilégient les intervalles naturels. Aussi chaque tonalité garde sa particularité. Musicalement, ce point de vue est riche. En effet chaque tonalité sonne à sa manière, on dit qu'elle a une *couleur*. Les tempéraments inégaux offre donc une grande palette de nuances pour exprimer des sentiments variés. Dans la musique de Johann Sebastian Bach (1685 - 1750) le choix des tonalités a une très grande importance.

Le modèle qui va s'imposer à partir du XVIII^e siècle est le tempérament égal. Il vise d'abord à régler le problème de la transposition. Pour pouvoir transposer et moduler dans toutes les tonalités sans déformer la musique, il suffit que l'intervalle entre deux notes successives soit toujours le même. Formellement on recherche donc un rapport d, qui permette de découper l'octave en douze intervalles égaux. Ce qui se traduit par la condition $d^{12} = 2$. Cet intervalle, le *demi-ton chromatique* a pour valeur $d = \sqrt[12]{2}$. La gamme tempérée est donnée à la figure 4.4.

Note	*do*	*ré*	*mi*	*fa*	*sol*	*la*	*si*	*do*
Rapport	$d^0 = 1$	d^2	d^4	d^5	d^7	d^9	d^{11}	$d^{12} = 2$

TAB. 4.4: Gamme tempérée. Le tableau donne le nom des notes et le rapport de leur fréquence à la fondamentale

Bien sûr, d un nombre irrationnel - c'est à dire qui ne s'écrit pas comme une fraction de deux entiers. Aussi plus aucun des intervalles ne sera pur. C'est le prix à payer pour que permettre toutes les transpositions et modulations sans altération de la musique. Ce tempérament est toujours celui utilisé de nos jours.

1.5 Des logarithmes et des groupes avant l'heure ?

En 1614, John Napier (1550-1617) un scientifique écossais, introduit les logarithmes dans le but de simplifier de nombreux calculs en astronomie. Cet outil mathématique fondamental était pourtant utilisé, certes inconsciemment, depuis bien longtemps par les musiciens. Du point de vue physique, les intervalles se représentent par des rapports de fréquences. Alors que le mathématicien multiplie ces rapports, le musicien, lui, additionne les intervalles. D'ailleurs le nom de ces derniers est très révélateur. Entre les extrémités d'une tierce on trouve trois notes. Si on ajoute deux tierces, on obtient un intervalle qui contient cinq notes, c'est une quinte. Ainsi la correspondance entre intervalles et rapports de fréquences transforme les additions en multiplications. En particulier un intervalle de n octaves est caractérisé par le rapport $r = 2^n$. Les mathématiciens disent que n est le logarithme en base 2 de r. Ainsi depuis Pythagore, les musiciens en associant à un rapport de fréquence un intervalle ont introduit une correspondance logarithmique entre ces deux objets. Avec une gamme à tempérament égal on peut même s'amuser à donner une formule. Considérons deux notes dont les fréquences sont f_1 et f_2. Le nombre n de demi tons entre ces deux notes est exactement

$$n = \frac{12}{\ln(2)} \ln\left(\frac{f_2}{f_1}\right)$$

La gamme tempérée offre aussi un exemple d'objet mathématique qui ne sera formalisé qu'au XIX^e siècle : les groupes. Encore une fois, le musicien a l'habitude d'additionner les intervalles. Par exemple transposer d'une seconde puis d'une tierce revient à transposer d'une quarte. Pour clarifier les idées on peut associer à chaque intervalle un entier entre 0 et 11 qui correspond au nombre de demi-tons qu'il contient. Par exemple une quinte contient sept demi-tons. Ajouter deux intervalles revient à additionner le nombre de demi-tons. Si on ajoute deux quintes, le nombres de demi-tons dans l'intervalle obtenu est quatorze. Mais, par le principe d'identification des octaves - deux notes séparées d'une octave portent le même nom - cet intervalle s'identifie avec la seconde qui contient deux demi-tons. Mathématiquement l'opération consiste à prendre le reste de 14 dans la division euclidienne par 12. On construit alors une table d'addition pour les intervalles (voir Fig. 4.5).

Si pour le musicien cette table est tout à fait naturelle, elle semble défier le bon sens. On peut y lire par exemple $7 + 8 = 3$! ! Cette bizarrerie provient du fait qu'on a changé la définition de l'addition. On devrait plutôt écrire $7 \oplus 8 = 3$. Toutefois cette nouvelle opération $\oplus$ se comporte de manière analogue à l'addition usuelle $+$. En terme mathématiques, l'ensemble des intervalles, muni de cette addition, a exactement une structure de groupe (voir l'encadré *Qu'est-ce qu'un groupe ?*). Mieux encore c'est un exemple très particulier de groupe cyclique (voir l'encadré *Les groupes cycliques*). J. S. Bach a exploité cette particularité dans *Le petit labyrinthe harmonique*. Cette pièce enchaine les modulations et explore toutes les tonalités, tant et si bien qu'au bout d'un moment l'auditeur est perdu et ne sait plus dans quelle tonalité la pièce a débuté.

Mais finalement, que penser de toutes ces gammes ? La figure 4.6 permet de comparer numériquement les trois constructions présentées ici : pythagoricienne, zarlinienne et tempérée.

$\nearrow$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0 (*unisson*)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1 (*seconde mineure*)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0
2 (*seconde majeure*)	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1
3 (*tierce mineure*)	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2
4 (*tierce majeure*)	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3
5 (*quarte*)	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4
6 (*quarte augmentée*)	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5
7 (*quinte*)	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6
8 (*sixte mineure*)	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7
9 (*sixte majeure*)	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8
10 (*septième mineure*)	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
11 (*septième majeure*)	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

TAB. 4.5: La table du groupe des transposition, c'est à dire de $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$.

Gamme \Note	*do*	*ré*	*mi*	*fa*	*sol*	*la*	*si*	*do*
Pythagoricienne	1,000	1,125	1,266	1,333	1,500	1,687	1,898	2,000
Zarlinienne	1,000	1,125	1,250	1,333	1,500	1,667	1,875	2,000
Tempérée	1,000	1,122	1,260	1,335	1,498	1,682	1,888	2,000

TAB. 4.6: Comparaison des gammes. Le tableau donne le nom des notes et une approximation du rapport de leur fréquence à la fondamentale.

Les écarts de l'une à l'autre sont relativement fins. Il faut une oreille bien exercée pour faire la différence. D'ailleurs en jouant sur l'embouchure et la colonne d'air, les instruments à vent peuvent facilement ajuster la hauteur de chaque note. De mêmes pour les instruments à cordes. Seul les instruments à sons fixes comme le piano, le clavecin ou encore l'orgue jouent avec une gamme figée et soulèvent de réels problèmes d'accord. Mais, au delà du simple aspect intellectuel, l'évolution de la théorie accompagne les changements de conception sur la musique.

2 Notation musicale

La notation musicale est à la musique ce que l'écriture est à la parole. La musique est une discipline inscrite dans le temps. A l'inverse de la sculpture ou de la peinture on ne peut fixer dans la matière une œuvre musicale. Pour laisser une trace matérielle de la musique et la transmettre, un « codage » est nécessaire. Ces symboles tels qu'on les connait aujourd'hui, *portée*, *clef*, *noires*, *croches*, etc, rendent compte principalement de deux données : la hauteur et la durée des notes. Ce système est le résultat d'une longue évolution qui une fois de plus a anticipé les bases de la *géométrie analytique*.

Pendant très longtemps seule la tradition orale permettait de transmettre des mélodies. Ce n'est qu'à partir du VI^{e} siècle av. J.C. qu'apparaissent dans la Grèce antique les premières notations. A chaque note de la gamme était associé un caractère de l'alphabet. Comme la musique était souvent là pour accompagner un texte, les Grecs notaient au dessus de chaque syllabe la note qui lui correspondait. Le rythme de la musique était en parfait accord avec le texte qu'il accompagnait. En effet dans la poésie grecque les vers sont organisés autour de figures alternant syllabes longues et courtes. Une syllabe longue valait deux syllabes courtes. Ainsi le texte dictait la durée des notes. Ce système de notation sera en partie abandonné au début de l'ère chrétienne. Toutefois on en retrouve un écho dans les pays anglo-saxon, où les notes sont désignées par des lettres (Fig. 4.7).

A	B	C	D	E	F	G
la	*si*	*do*	*ré*	*mi*	*fa*	*sol*

TAB. 4.7: Correspondance des noms des notes dans les pays anglo-saxons et latins

Au Moyen-âge, la musique est avant tout sacrée et ponctue les offices. Mais c'est aussi un instrument politique. Charlemagne notamment chercha à donner une unité à son empire grâce à la liturgie. Pour cela il imposa le rite romain qui faisait la part belle au *chant grégorien*. Selon la légende ce répertoire aurait été écrit par le pape Saint Grégoire le Grand (ca 532-604) sous la dictée de la colombe du Saint-Esprit. La réalité est bien plus complexe et cette attribution a en partie pour but de légitimer ce répertoire. Il n'est donc pas étonnant que les prémices d'un nouveau système de notation aient vu le jour autour de l'an 800, à une époque où l'Eglise cherchait à renforcer son unité grâce au chant. Celui-ci ressemble par divers aspects au système grec. La musique accompagne les textes liturgiques. Dans un premier temps des symboles - les *neumes* - sont placés au dessus du texte pour indiquer grosso modo si la mélodie monte ou descend (voir Fig. 4.4).

Ce ne sont au début que des aides mémoires, mais rapidement, le nombre de symboles est multiplié et leur sens affiné. A partir du XI^{e} siècle, notamment sous l'influence de Guido d'Arezzo (ca 990 - 1033)[6], les neumes vont être disposés sur quatre puis cinq lignes horizontales. Plus un neume est haut, plus la note qu'il représente est aiguë. Le rythme suis encore le texte (voir Fig. 4.5).

[6] C'est à lui aussi qu'on doit le nom des notes *ut*, *ré*, *mi*, *fa*, *sol*, *la* et *si*.

FIG. 4.4: Un exemple de neumes. *Fragment d'antiphonaire, fin du* XI^e *siècle, Albi, bibliothèque municipale, Ms. 15 (152)*

FIG. 4.5: Un exemple de portée à quatre lignes. *Extrait du psautier Lutrell British Library Add. MS 42130*

Déjà, cette notation anticipe l'invention des coordonnées en géométrie. En effet les lignes de la portée correspondent aux graduations d'un axe vertical. La distance entre deux lignes sert d'unité. Il ne manque plus qu'une origine pour lever tout ambiguïté dans la lecture. C'est exactement le rôle de la *clef*. Pour se donner un point de repère sur les lignes, on marquait l'une d'entre elle avec une lettre : G, F, ou C. Par exemple, si une ligne était marquée avec un G, alors toute note située sur cette ligne était un *sol*. Les clefs moderne - clefs de *sol*, de *fa*, et d'*ut* - dérivent de ces trois lettres. Un axe, une origine et une unité, voici les trois éléments nécessaires pour définir des coordonnées. De ce point de vue la musique à largement devancé les mathématiques. En effet, les coordonnées seront introduites pour la première fois en géométrie par Nicole Oresme (1325 - 1382) au XIV^e siècle.

Jusqu'au XII^e siècle, la musique était essentiellement monodique. Ce qui signifie que tous les musiciens - très souvent des chanteurs - jouaient la même mélodie. Avec l'apparition de la polyphonie, le texte n'est plus suffisant pour indiquer le rythme. Si deux personnes chantent des mélodies différentes, parfois aussi sur des textes différents, il faut veiller à ce que ces mélodies s'agencent harmonieusement. A partir du XII^e siècle on voit alors apparaître de nouveaux symboles pour noter la durée de chaque note. Les textes musicaux du XIV^e siècle présentent déjà une grande similarité avec nos partitions modernes (voir

Fig. 4.6).

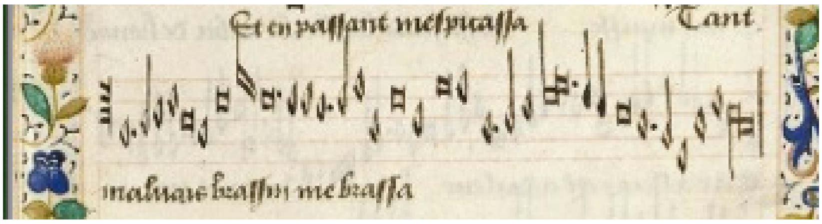


FIG. 4.6: Une notation proche de la notation moderne. *Le Chansonnier de Jean de Montchenu, Bibliothèque nationale de France*

Dans ce système, le temps est représenté sur un axe vertical. La partition représente alors une mélodie comme une fonction du temps. Sur l'axe des abscisses on lit le temps, sur l'axe des ordonnées la hauteur des notes. Même si cette notion n'existe pas à l'époque, une ligne de musique est déjà le graphe d'une fonction (voir Fig. 4.7).

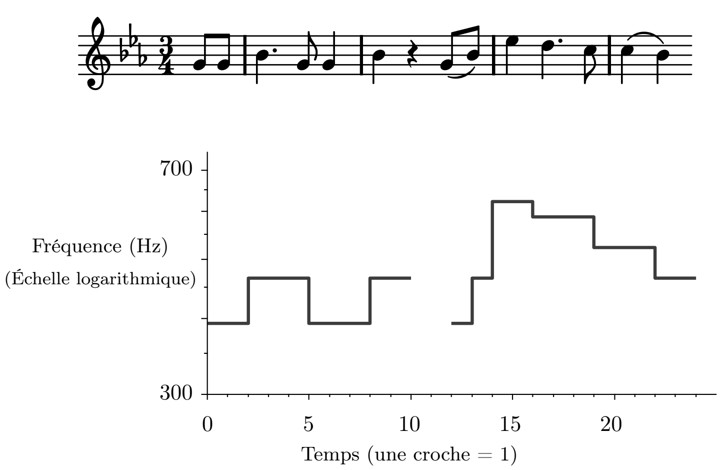


FIG. 4.7: Comparaison entre une ligne de musique, et le tracé de la fréquence du signal correspondant au cours du temps

Les premiers graphes de fonctions verront le jour avec le développement de la *géométrie analytique* par René Descartes (1596 - 1650) et Pierre de Fermat (ca 1600 - 1665) au XVII^{e} siècle. Ce parallèle entre la musique et la géométrie permet aussi d'analyser les compositions de nombreux auteurs en termes de symétries, translations, etc.

3 Composition et groupes de transformations

Avec l'apparition de la polyphonie, les imitations sont devenues une figure de style très courante. Durant la Renaissance et l'époque Baroque les compositeurs, très friands de ce procédé, en ont fait un usage fréquent et subtil. Ces imitations peuvent s'interpréter comme des « transformations géométriques ».

3.1 Présentation des imitations

FIG. 4.8: *Vent frais, vent du matin*

La comptine *Vent frais, vent du matin* (cf Fig. 4.8) permet de présenter le principe du canon. Toutes les voix chantent rigoureusement la même mélodie, mais avec quelques mesures de décalages. Le premier chanteur commence seul puis au bout de deux mesures est rejoint par un second chantant la même partie, puis par un troisième. Tout l'art du compositeur est de veiller à ce que les parties se superposent harmonieusement. A ce titre, le célèbre canon en *ré* majeur de Johann Pachelbel (1653 - 1706) est un magnifique exemple. Il se compose d'une basse continue au dessus de laquelle trois violons entrent respectivement à la cinquième, neuvième et treizième mesure. La pièce peut durer entre quatre et sept minutes, tout dépend de l'agilité des violonistes !

L'imitation est un procédé d'écriture qui consiste à reprendre dans une voix, un motif déjà entendu auparavant dans une autre voix. Toutefois, rien n'oblige de reprendre le motif à l'identique. Toutes les fantaisies sont possibles. Guillaume de Machaut (ca 1300 - 1377), un compositeur qui a beaucoup contribué au développement de la polyphonie, a écrit un rondeau dont le titre est évocateur. *Ma fin est mon commencement et mon commencement ma fin* (voir Fig. 4.9).

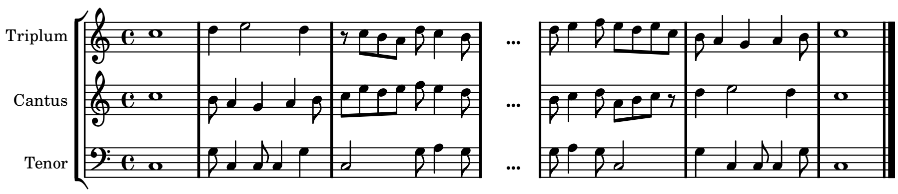


FIG. 4.9: *Ma fin est mon commencement et mon commencement ma fin*

En lisant la partie du *Cantus* en partant de la fin on obtient exactement celle du *Triplium*. La partition est donc un parfait palindrome. Ce type de procédé s'appelle *imitation rétrograde*, *cancrizan* ou encore *en écrevisse*. Géométriquement la partition possède une symétrie interne d'axe vertical. Une autre symétrie est possible, par rapport à un axe horizontal. Le procédé consiste à renverser tous les intervalles du motif de base. Ainsi si la mélodie monte d'une tierce, son imitation descendra d'un tierce. On parle d'imitation *renversée* ou *par mouvement contraire*. Dans le contrepoint 3 de l'*Offrande musicale* BWV1079, J. S. Bach écrit un canon par mouvement contraire pour trois instruments et pourtant la partition ne comporte que deux lignes (voir Fig. 4.10). En effet le troisième instrument doit lire sa partie dans un miroir. Ce qui revient exactement à faire une symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

N'oublions pas que grâce au tempérament, il est aussi possible de transposer à loisir, ce qui offre encore un procédé de transformation. Ces imitations sont l'ingrédient principal de nombreuses formes musicales : canon, fugue, strette, riccercar,... Ces compositions permettaient de mesurer la virtuosité de l'auteur. Certaines œuvres sont d'ailleurs si complexes, qu'il est presque impossible d'entendre toutes les imitations. Le maître incontesté en la matière reste J. S. Bach. Dans l'*Art de la fugue*, l'*Offrande musicale* ou encore *Le clavier bien tempéré*,

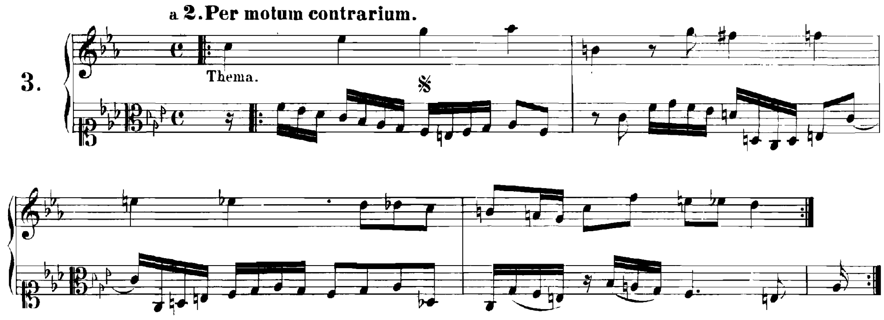


FIG. 4.10: Le contrepoint 3 de *l'Offrande musicale* de J. S. Bach

il explore toutes les formes d'imitations possibles en écrivant des fugues à trois, quatre, cinq, même six voix, où plusieurs motifs s'entremêlent. Un véritable tour de force.

3.2 Analyse mathématique

Au delà du simple jeu, ces imitations possèdent une structure mathématique intéressante. Tous les cas présentés ci dessus ont un aspect commun. Le motif de base correspond à une figure géométrique à laquelle le compositeur applique une transformation qui préserve sa forme. Ces transformations sont appelé *isométries.* Nous en avons vu trois types : les translations - la transposition - et deux symétries - imitations à l'écrevisse et renversée. Concentrons nous d'abord sur les deux dernières. Avec ces deux transformations on peut construire quatre variations d'un même thème et passer de l'une à l'autre par une symétrie (voir Fig. 4.11).

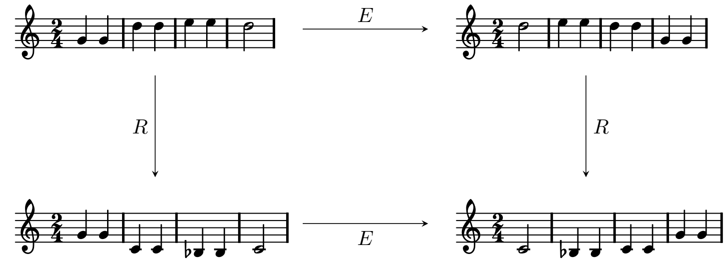


FIG. 4.11: Schéma des symétries

Si on note Id la transformation identique, E l'imitation à l'écrevisse, R le renversement et ER l'enchainement de ces deux dernières, on peut alors construire une table de composition (voir Fig. 4.8).

$\nearrow$	Id	E	R	ER
Id	Id	E	R	ER
E	E	Id	ER	R
R	R	ER	Id	E
ER	ER	R	E	Id

TAB. 4.8: La table de groupe de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$

Ce groupe que l'on peut aussi désigner par $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, est le groupe de Klein, du nom du mathématicien Felix Klein (1849 - 1925) qui le premier fit le lien entre la géométrie et les groupes de symétries. Ce groupe a des propriétés mathématiques intéressantes. C'est le plus petit groupe fini non cyclique.

Qu'est-ce qu'un groupe ?

Un groupe est une structure algébrique courraient utilisée en mathématiques. C'est un cadre très général qui permet d'étudier les propriétés d'une opération, comme l'addition ou la multiplication. Les exemples de groupes sont très nombreux. Pour en comprendre l'intérêt, prenons un exemple géométrique. Considérons un triangle équilatéral ABC (voir Fig. 4.12).

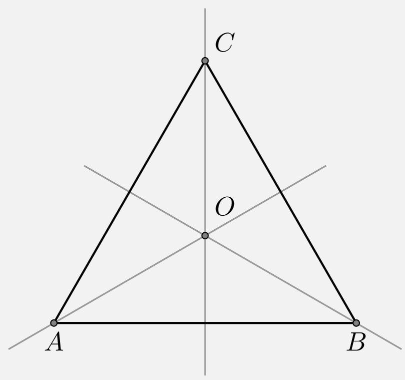


FIG. 4.12: Triangle équilatéral ABC

On s'intéresse aux transformations géométriques du plan qui laissent cette figure invariante. En voici six :

- Trois symétries s_A, s_B, s_C, dont les axes sont respectivement les hauteurs issues de A et B et C du triangle ABC
- Deux rotations r_+ et r_- dont le centre est le centre de gravité O du triangle ABC et les angles respectivement 120 et -120°.
- Une transformation un peu particulière : l'identité, notée Id, qui laisse fixes tous les points du plan.

Ces transformations peuvent se composer. Tout comme on apprend à l'école primaire les tables d'addition on peut représenter dans une table le résultat de la composition de deux transformations (voir Fig. 4.13).

$\nearrow$	Id	s_A	s_B	s_C	r_+	r_-
Id	Id	s_A	s_B	s_C	r_+	r_-
s_A	s_A	Id	r_+	r_-	s_B	s_C
s_B	s_B	r_-	Id	r_+	s_C	s_A
s_C	s_C	r_+	r_-	Id	s_A	s_B
r_+	r_+	s_C	s_A	s_B	r_-	Id
r_-	r_-	s_B	s_C	s_A	Id	r_+

Fig. 4.13: Table de groupe des isométries du triangle équilatéral

Avant d'observer les propriétés de cette table, considérons un autre exemple. Combien existe-t-il de manière de permuter les chiffres 1, 2 et 3 ? On en dénombre six : (123), (132), (213), (231), (312) et (321). Ces permutations peuvent aussi se composer. Si on construit la table de composition correspondante, quitte à changer le nom des transformations on retrouve exactement la même table. Mathématiquement c'est en effet le même objet. Plutôt que de l'étudier autant de fois qu'il apparaît dans une situation concrète, pourquoi ne pas s'en prendre directement au cas général ? C'est l'objectif de la structure de groupe.

Cette table a quelques propriétés remarquables. Dans la ligne correspondant à l'identité, les transformations restent inchangés. De même dans la colonne identité. L'identité est appelé *élément neutre*. Par ailleurs dans chaque ligne et chaque colonne on trouve une case avec l'identité. Ainsi pour chaque transformation t_1 on trouve une transformation t_2 telle que $t_1 \circ t_2 = t_2 \circ t_1 = \mathrm{Id}$. Les mathématiciens disent que chaque transformation admet un inverse.

Formellement, on définit un groupe de la manière suivante. Un groupe est un ensemble G munit d'une opération noté $\circ$ ayant les propriétés suivantes.

1. Elle est associative. C'est à dire que $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$; la place des parenthèses n'a pas d'incidence dans le calcul
2. Elle admet un élément neutre e, c'est à dire un élément tel que $x \circ e = e \circ x = x$

3. Tout élément x admet un inverse, c'est à dire un élément y tel que $x \circ y = y \circ x = e$.

En faisant abstraction de la situation dans laquelle il est apparu. Les mathématiciens sont ainsi capable de montrer des résultats très généraux, qui s'appliquent dans de nombreux cas concrets. Parmi les exemples de groupe, on trouve $\mathbf{Z}$ munit de l'addition, les groupes de permutations, les groupes de symétries, etc. Bref c'est un objet très riche et fréquemment utilisé en mathématique mais aussi en physique, en chimie... et bien sur en musique !

3.3 Formalisation sérielle

Ces procédés de compositions sont très intimement liés à une conception horizontale de la musique. Dans cette écriture, dite contrapuntique[7], toutes les voix ont la même importance et développent des mélodies propres qui s'arrangent harmonieusement. Ce point de vue est caractéristique de la musique de la Renaissance et du début de l'époque baroque. A partir du textscxviii^e siècle cette conception va progressivement évoluer. On conçoit alors la musique comme verticale. C'est une succession d'accords qui accompagne une mélodie. J. S. Bach - encore lui - se situe à la charnière du contrepoint et de l'harmonie et a réalisé la synthèse de ces deux points de vue. L'harmonie est par nature moins propice aux imitations. Même si certains maîtres comme Wolfgang Amadeus Mozart (1756 - 1791) ou César Franck (1822 - 1890) y auront fréquemment recours, aucune innovation n'est réalisée jusqu'au début du textscxx^e siècle.

A partir de la fin du XIX^e siècle la musique savante occidentale connait une véritable révolution. Les artistes de la Seconde école de Vienne comme Arnold Schoenberg, Alban Berg ou Anton Webern, s'élèvent contre le « diktat » de la tonalité. Dans la musique tonale - c'est à dire environ toute la musique classique de Rameau à Wagner mais aussi dans la variété aujourd'hui - chaque pièce est écrite dans une tonalité, par exemple *do* majeur, si bien que l'oreille s'attend à « retomber sur ses pieds » à la fin du morceau qui doit se terminer sur un *do* dans notre exemple. Pour surprendre l'auditeur et créer des effets délicieux les compositeurs ont recours aux modulations. Une modulation consiste à changer de tonalité. Par exemple passer de *do* majeur en *la* mineur. Toutefois, l'oreille s'y retrouve toujours si les modulations sont passagères. D'ailleurs si on analyse les partitions, on remarque que les fréquences d'apparition dans une œuvre des notes de la gamme varient d'une note à l'autre. Certaines notes ont donc un rôle plus important. C'est une caractéristique de la musique tonale. Vers la fin du XIX^e siècle, des compositeurs comme Gustav Mahler vont pousser tellement loin

[7]Le mot contrepoint signifie littéralement point contre point ou plutôt note contre note

l'usage des modulations qu'ils arrivent à perdre l'auditeur. Pour tourner le dos définitivement à la musique tonale Arnold Schoenberg invente le sérialisme. La brique de base d'une pièce est une série (voir Fig. 4.15a), c'est à dire une suite de douze sons ou chaque note de la gamme chromatique est utilisée exactement une et une seule fois, jouant ainsi toutes le même rôle. Grâce au tempérament égal les transformations de cette série peuvent être beaucoup plus riches que le simple groupe de Klein. Iannis Xenakis (1922 - 2001) compositeur grec est l'un des musiciens qui a dégagé la structure algébrique du tempérament.

A chaque note de la gamme tempérée (voir partie 1.5) on a associé un nombre entre 0 et 11, ou plus précisément un élément du groupe $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$ (voir Fig. 4.9).

Note	*do*	*do♯*	*ré*	*ré♯*	*mi*	*fa*	*fa♯*	*sol*	*sol♯*	*la*	*la♯*	*si*
Élément de $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

TAB. 4.9: correspondance entre la gamme chromatique et le groupe $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$.

La série donné figure 4.15a correspond par exemple la suite $S = 0\ 4\ 6\ 7\ 3\ 2\ 11\ 9\ 10\ 1\ 5\ 8$. On peut alors lui appliquer le deux transformations déjà étudiées précédemment. On obtient alors deux nouvelles séries.

1. La série miroir ou inversée est donnée par la suite de nombre. $M = 0\ 8\ 6\ 5\ 9\ 10\ 1\ 3\ 2\ 11\ 7\ 4$ (voir Fig. 4.15c). On remarquera que le i-ème nombre de M est en fait l'inverse du i-ème nombre de S dans le groupe $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$ (leur somme vaut toujours 0 ou 12).
2. La série rétrograde donnée par $R = 8\ 5\ 1\ 10\ 9\ 11\ 2\ 3\ 7\ 6\ 4\ 0$ (voir Fig. 4.15b).

On peut aussi transposer la série de k demi-ton(s). Par exemple la série obtenue en ajoutant 5 demi-tons est $T = 5\ 1\ 11\ 10\ 2\ 3\ 6\ 8\ 7\ 4\ 0\ 9$. En « mélangeant » transpositions et inversions on peut observer une nouvelle structure, très utilisée en géométrie. Pour la comprendre, il est plus facile de voire la gamme chromatique comme un cercle (voir Fig. 4.14). La transposition de k demi-ton(s), correspond à une rotation de $k \times 30^\circ$ alors que l'inversion renvoie à une symétrie d'axe vertical. En composant ces deux transformations on peut obtenir toutes les isométries qui préservent le dodécagone de la figure 4.14.

A nouveau, cet ensemble de transformations a une structure de groupe appelé groupe diédral et noté D_n. Comme en musique, les chimistes ont recours à ce type de groupe pour étudier des symétries, mais concernant la structure des molécules. Les développements de la musique sérielle peuvent ainsi s'analyser avec de multiples points de vue. En tant que symétries internes de la partition comme pour les imitations, en tant que suite finie d'éléments de $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$, ou en-

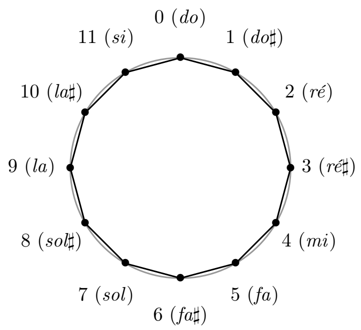
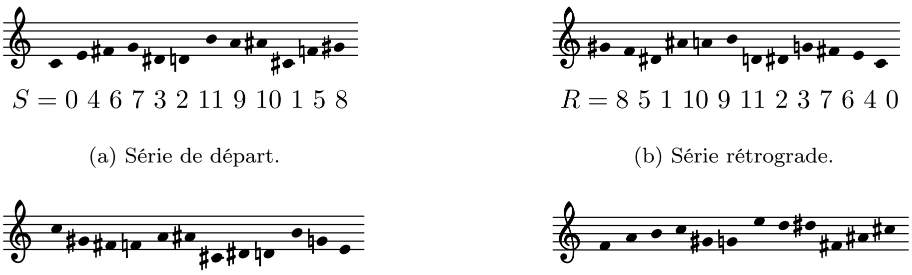


FIG. 4.14: Le cercle chromatique et son dodécagone



$S = 0\ 4\ 6\ 7\ 3\ 2\ 11\ 9\ 10\ 1\ 5\ 8$

(a) Série de départ.

$R = 8\ 5\ 1\ 10\ 9\ 11\ 2\ 3\ 7\ 6\ 4\ 0$

(b) Série rétrograde.

$M = 0\ 8\ 6\ 5\ 9\ 10\ 1\ 3\ 2\ 11\ 7\ 4$

(c) Série miroir.

$T = 5\ 1\ 11\ 10\ 2\ 3\ 6\ 8\ 7\ 4\ 0\ 9$

(d) Série transposée.

FIG. 4.15: Une série et et ses transformations.

core comme des isométries préservant un dodecagone. Mais ce style de musique utilise encore bien d'autres procédés de composition issus de l'algèbre.

Comme l'illustrent les exemples présentés ici, les mathématiques offrent un formidable outil d'analyse pour la musique. Jean-Phillipe Rameau (1683 - 1764) compositeur français, grand fondateur de l'harmonie, exprime cette idée à merveille dans la préface de son traité. « *La Musique est une science qui doit avoir des règles certaines ; ces règles doivent être tirées d'un principe évident, et ce principe ne peut gueres nous être connu sans le secours des Mathématiques.* [...] *ce n'est cependant que par le secours des Mathématiques que mes idées se sont débrouillées et que la lumière y a succédé à une certaine obscurité.* » A l'inverse la musique a aussi contribué à faire évoluer les mathématiques. D'ailleurs pour J.P. Rameau les mathématiques n'étaient qu'une branche de la musique. A ce propos, il ne faut pas croire que les échanges entre musiciens et mathématiciens ont toujours été cordiaux. J. P. Rameau et son ami d'Alembert se sont définitivement brouillés à propos de cette question. De nos jours, le dialogue entre mathématiques et musique est toujours riche. Les compositeurs expérimentent par exemple de nouvelles techniques où interviennent les probabilités, les nombres complexes,... Les deux disciplines ont sûrement encore un long chemin à faire ensemble.

Les groupes cycliques

Les groupes cycliques sont des exemples remarquables de groupes que l'on retrouve en musique. $\mathbf{Z}$ muni de l'addition est un groupe cyclique. On lui donne ce nom, parce que tous les éléments peuvent s'écrire de la manière suivante $n = \pm(1 + 1 + 1 + \cdots + 1)$. Il suffit d'un nombre pour écrire tous les autres. Si $\mathbf{Z}$ comporte un nombre infini d'éléments, voici comment construire des groupes cycliques avec un nombres fini d'éléments.

On fixe tout d'abord un nombre non nul N. On peut alors faire la division euclidienne de n'importe quel nombre entier m par N. On aura $m = q \times N + r$, où r, le reste, est un nombre entier entre 0 et $N-1$. Grâce à la division euclidienne, on définit une nouvelle opération : si r_1 et r_2 sont deux nombres entre 0 et $N-1$, on appelle $r_1 \oplus r_2$ le reste dans la division euclidienne de $r_1 + r_2$ par N. Cette nouvelle loi d'addition munit $\{0, \ldots, N-1\}$ d'une structure de groupe. Ce groupe est noté $\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$. Comme pour $\mathbf{Z}$ tous les éléments peuvent s'écrire sous la forme $1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus \cdots \oplus 1$. Vérifions ici quelques axiomes de la définition :

0 est le neutre de $\oplus$. Si r est un nombre entier entre 0 et $N-1$, $r+0 = 0+r = r$ reste entre 0 et $N-1$. Son reste dans la division par N est donc r. Ainsi $0 \oplus r = 0 \oplus r = r$. 0 est donc le neutre de la loi $\oplus$.

Tout élément admet un inverse. On sait déjà que $0 \oplus 0 = 0$. Ainsi 0 est son propre inverse. Considérons maintenant un nombre r entre 1 et $N-1$. $N-r$ reste entre 1 et $N-r$. On peut donc faire l'opération $r \oplus (N-r)$. Or $r + N - r = N$ aussi le reste de $r + N - r$ dans la division par N est 0. Ainsi $r \oplus (N-r) = 0$, de même $(N-r) \oplus r = 0$. Donc l'inverse de r est $N-r$.

Pour mieux comprendre l'opération $\oplus$ il est commode de représenter le groupe $\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$ par un cercle (voir Fig. 4.16).

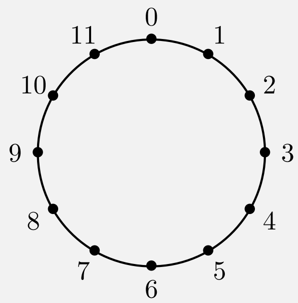
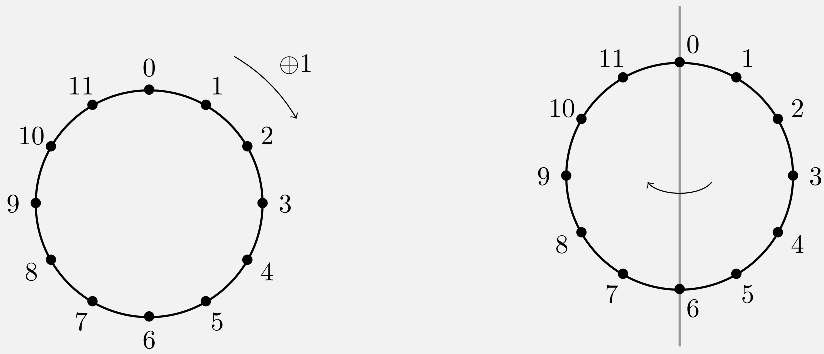


FIG. 4.16: Représentation circulaire du groupe $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$.

Chaque graduation correspond à élément du groupe. Ajouter 1 revient à tourner d'un cran dans le sens des aiguilles d'une montre (voir Fig. 4.17a) Ainsi dans $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$, $11 \oplus 2 = 1$. L'inversion peut aussi se lire sur cette figure. L'inverse d'un nombre est obtenu en prenant son image par la symétrie dont l'axe passe par les points numérotés 0 et $N/2$ (voir Fig. 4.17b). Par exemple dans $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$ l'inverse de 5 est 7.



(a) Dans $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$, ajouter correspond à une rotation de 30°.

(b) Dans $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$, prendre l'inverse se traduit par une symétrie.

FIG. 4.17: Interprétation géométrique des opérations dans $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$.

On peut montrer que les seuls groupes cycliques sont $\mathbf{Z}$ et les $\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$. Ceux-ci ont beaucoup d'applications en arithmétique, mais pas seulement. Le groupe $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$ représente par exemple en musique le groupe des transpositions. Le groupe $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ correspond à un type d'imitation : imitation cranzican ou renversée par exemple.

[1] P. Barbaud. *La musique, discipline scientifique*. Dunod, 1971.

[2] G. Cohen. Maths et musique. *Tangente*, HS N. 11, 2002.

[3] F. Ferrand. *Le guide de la musique du moyen âge*. Fayard, 1999.

[4] J.-F. Mattei. *Pythagore et les pythagoriciens*. Presse Universitaires de France, 1993.

[5] Roland-Manuel. *Histoire de la musique*. Folio Essais, 1960.

[6] H. X. J. Saval. *J.S. Bach - Die Kunst der Fuge*. AliaVox.