Série Techniques de la musique et de la danse

Document d'accompagnement des programmes

Document de travail

Sommaire

Lexique

retour au sommaire

Le son

« La musique est l'art des sons » Adolphe Danhauser (1835 – 1896).

Qu'est-ce qu'un son ? Ce mot désigne tout mouvement vibratoire de l'air, lorsqu'il est perçu par l'oreille. En tant que phénomène vibratoire, nous pouvons appliquer au son le théorème de Fourier : « Tout mouvement périodique de fréquence f peut être décomposé en la somme de mouvements sinusoïdaux de fréquences f, $2f$, $3f$… ».

Un son déterminé par un mouvement sinusoïdal s'appelle un son pur.

Un son musical est caractérisé par :

- **sa hauteur** : elle est liée à la fréquence. Pour être audible un son doit avoir une fréquence comprise entre 20 et 20 000 hertz (1hertz = 1 vibration par seconde). Elle est mesurée par la fréquence de son fondamental.
- **la fréquence** du fondamental d'un son est égale à la hauteur f du son ; celles des harmoniques à $n\,f$ (n entier supérieur ou égal à 2).
- **son intensité** $\boldsymbol{I}$: elle est liée à l'amplitude maximale du mouvement vibratoire. Elle est égale au rapport P/S de la puissance sonore P transférée à travers une surface d'aire égale à S. Elle s'exprime en $W.m^{-2}$.
- **son niveau sonore** $\boldsymbol{L}$ s'exprime en dB_A ; il est égal à $10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ où log désigne le logarithme décimal et $I_0 = 10^{-12}$ $W.m^{-2}$ l'intensité sonore de référence.
- **son timbre** : il est lié à la décomposition du son en « série de Fourier » de sons purs. Ces sons purs sont appelés les *harmoniques* du son considéré (le son de fréquence nf est le n^{e} harmonique, le premier harmonique s'appelle le *fondamental*.

Gammes tempérées

• Définition de la gamme

C'est au début du XI^{e} siècle, en recherchant à la fois un système de notation (qui est à l'origine de la portée) et un système de codification des intervalles musicaux, que Guy d'Arezzo aurait imaginé ce que l'on désigne aujourd'hui par le mot « gamme ». Partant des « tétracordes » des Grecs, qui s'en servaient pour diviser l'octave en deux parties (par exemple, dans le mode dorien : *mi, ré, ut, si/la, sol, fa, mi*), Guy d'Arezzo ajouta une note supplémentaire, plus basse que la dernière, et qu'il désigne par la lettre grec *gamma*, d'où vint le mot « gamme ».Enfin, alors que les notes étaient jusqu'à Guy d'Arezzo, choisies dans les premières lettres de l'alphabet, c'est à lui qu'on attribue le procédé mnémotechnique par lequel on les nomme maintenant dans les pays latins à partir des syllabes initiales d'un hymne à Saint Jean-Baptiste :

UT queant laxis
REsonare fibris
MIra gestorum
Famuli tuorum
SOLve polluti
Labii reatum
Sancte **I**oannes

Les pays anglo-saxons ayant conservé la notation des notes de la gamme par des lettres, la correspondance, de nos jours, s'établit ainsi:

la	*si^{b}*	*ut*	*ré*	*mi*	*fa*	*sol*	*la*	*si*
A	B	C	D	E	F	G	A	H

• Unités de mesure

Unités de comparaison des hauteurs musicales

Deux unités logarithmiques permettent d'exprimer et de traiter les rapports de fréquences par soustraction ou addition.

Le savart

Si $x = \frac{F_1}{F_2}$, la valeur y en savart, du rapport x est y = 1 000 log x. Inversement, le rapport x correspond à y savarts est

$x = 10^{\frac{y}{1000}}$.

1 savart = $10^{\frac{1}{1000}}$ = 1,002 305 238

Pour x = 2 (rapport d'octave), y = 301, 029 9 savarts et 1 savart = $\sqrt[301,03]{2}$. En valeurs approximatives on arrondit l'octave à 300 savarts, le demi-ton et le ton de tempérament égal valent alors respectivement 25 et 50 savarts (σ)

Le cent
Unité quatre fois plus petite que le savart.
Pour la rendre pratique, la valeur de l'octave qui serait de 4 × 301,03 = 1 204,12 cents, a été arrondie à 1 200 cents.
1 cent = $\sqrt[1200]{2}$ = 1,000 577 79
La valeur y en cents du rapports x est y = 1 200 $\log_2 x$, ou encore, si l'on dispose que des logarithmes décimaux y = 3 986 logx.
Inversement, le rapport x correspondant à y cents est x = $2^{\frac{y}{1200}}$ ou x = $10^{\frac{y}{3\,986,314}}$.

Exprimé, en cents, les intervalles du tempérament égal sont, en valeur exacte, des nombres entiers :
1 demi-ton = 100 cents
1 ton = 200 cents
tierce majeure (= 4 demi-tons) = 400 cents
quarte(= 5 demi-tons) = 500 cents
quinte (= 7 demi-tons) = 700 cents
1 cent = $\frac{1}{100}$ de demi-ton de tempérament égal.

Unités anciennes caractérisant certains rapports importants
Il s'agit de rapports correspondants à des intervalles faibles appelés presque tous *comma*.

Comma pythagoricien
C'est l'excédent relatif de 12 quintes pures sur 7 octaves :

1 comma (P) = $\frac{12Qp}{7oct} = \frac{3^{12}}{2^{19}}$ = 1,013 643 2 = 5,885 savarts ≈ 5,9 σ.

Comma zarlinien ou syntonique
- C'est l'excédent relatif d'un ton majeur sur un ton mineur dans la gamme de Zarlin.
- C'est également le rapport entre une tierce pythagoricienne et une tierce majeure pure.
- C'est aussi l'excédent relatif de 4 quintes pures sur une tierce majeure pure augmentée de 2 octaves.

1 comma (Z) ou (S) = $\frac{81}{80}$ = 1,012 50 = 5,395 savarts ≈ 5,4 σ.

Comma enharmonique ou diésis
- C'est l'intervalle qui sépare le dièse d'une note du bémol de la note supérieure dans un ton mineur de la gamme de Zarlin.
- C'est également l'excédent relatif de 1 octave sur 3 tierces majeures pures.

1 diésis = $\frac{2^7}{5^3} = \frac{128}{125}$ = 1,024 0 = 10, 299 9 savarts ≈ 10,3 σ.

Schisma
- C'est le rapport entre 1 comma (P) et 1 comma (Z)

  1 schisma = 5 × $\frac{3^8}{2^{15}}$ = 1, 001 129 15 = 0,490 107 savart ≈ 0,5 σ.

- C'est aussi, très sensiblement, le rapport d'une quinte pure à une quinte du tempérament égal :

  $\frac{3}{2} \times \frac{1}{2^{\frac{7}{12}}}$ = 1,001 129 891 = 0,490 428 savart ≈ 0,5 σ.

Comma holdérien
C'est l'intervalle élémentaire de la gamme théorique comportant 53 niveaux égaux par octave.
$2^{\frac{1}{53}}$ = 1,013 164 = 5,679 8 savarts ≈ 5,68 σ.

Il peut être utilisé comme unité approximative dans les gammes de Pythagore et de Zarlin.

• La gamme dite de Pythagore

Les conceptions pythagoriciennes sont essentiellement arithmétique. La perfection des apports de consonance des sons entre eux serait liée à la simplicité des rapports numériques des longueurs de corde vibrante. Une corde de longueur donnant une note dont la hauteur est prise comme référence, les rapports les plus simples sont donnés par la corde de longueur 2 (octave inférieurs) et 3 (douzième inférieure). Le rapport 2 est considéré comme « infécond » puisque n'étant capable que de reproduire toujours la même note à des octaves différents. Il n'est donc utilisé que pour ramener les notes à l'intérieur d'une même octave, en divisant par deux les longueurs de corde. En revanche, le rapport 3, étant à l'origine de ce qu'on appelle maintenant le cycle des quintes, permet d'obtenir toutes les notes de la gamme soit, par quintes successives : *si, mi, la, ré, sol, ut, fa*. Ce qui, converti dans une même octave (c'est à dire entre les longueurs de corde l et 2l), donne des longueurs de cordes suivantes représentatives du mode dorien :

1	**9/8**	**81/64**	**4/3**	**3/2**	**27/16**	**243/128**	**2**
mi	***ré***	***ut***	***si***	***la***	***sol***	***fa***	***mi***

On remarque que les intervalles de ce mode, pris en descendant, sont les mêmes que ceux de la gamme diatonique majeure pris en montant, d'où cette forme moderne, connue aussi sous le nom de gamme de Pythagore, dans laquelle les nombres désignent cette fois – ci, des rapports de fréquence (do a remplacé ut au 17e siècle):

1	**9/8**	**81/64**	**4/3**	**3/2**	**27/16**	**243/128**	**2**
ut	***ré***	***mi***	***fa***	***sol***	***la***	***si***	***ut***

Si l'on mesure les intervalles séparant deux notes voisines, on constate qu'il n'en existe que deux : le ton (rapport 9/8) et le demi-ton (rapport 256/243).

• Les systèmes d'Aristoxène et de Zarlino

Opposés aux pythagoriciens en ce qu'ils n'attribuaient aucune valeur souveraine à la perfection des nombres, les disciples d'Aristote de Tarente (IVe siècle avant J.C) étaient cependant attachés à la théorie des divisions de la corde vibrante dans des rapports « harmoniques » ; ils attribuaient à cette théorie une valeur à la fois physique et esthétique. Il semble que deux divisions différentes des longueurs de cordes aient été connues d'eux. La première correspond à ce que, aujourd'hui, l'on sait être la suite des « harmoniques naturels ». C'est la série :

1	**1/2**	**1/3**	**1/4**	**1/5**	**1/6**	**1/7**	**1/8**	**etc**
ut_1	ut_2	sol_2	ut_3	mi_3	sol_3	si^{b}_3	ut_4	**etc**

correspondant aux fréquences f, $2f$, $3f$, $4f$, $5f$, $6f$, $7f$, $8f$, etc., et dont les cinq premières constituent l'accord parfait majeur (*ut – mi – sol*). La deuxième utilisait une division

• Werckmeister et la gamme tempérée

La gamme tempérée qui est la gamme musicale que nous utilisons de nos jours, a été élaborée à la fin du XVIIe siècle par A. Werckmeister (1645 – 1706). Quelques années plus tard, elle s'est imposée à l'ensemble de la musique européenne, en particulier sous l'impulsion de J-S Bach et J-P Rameau.
En appuyant la corde d'une guitare contre le manche au niveau d'une case, on réduit la longueur sur laquelle elle vibre lorsqu'elle est pincée. Depuis longtemps, les musiciens avaient remarqué que pour des longueurs égales à, par exemple, ℓ , $4\ell/5$, $2\ell/3$, $\ell/2$, les sons étaient produits ensemble ou à la suite les uns des autres.
On appelle f la hauteur de la note obtenue avec la longueur ℓ; pour la longueur $\ell/2$, la hauteur de la note est alors égale à $2f$.

L'oreille est donc sensible au rapport des hauteurs de deux notes. Ce rapport est appelé **intervalle.** Une **octave** désigne l'intervalle particulier de valeur égale à 2. A partir de ces rapports rationnels entre les fréquences des sons consonants, on peut construire une gamme musicale dite **naturelle**. Celle-ci présente néanmoins un inconvénient majeur : l'intervalle entre deux notes de hauteurs voisines n'est pas constant. On ne peut donc pas modifier d'un même intervalle la hauteur de toutes les notes d'une œuvre pour la transposer dans une tonalité différente. Pour cette raison, une gamme se rapprochant de la gamme naturelle a été construite : il s'agit de la **gamme tempérée.**
La gamme tempérée est construite en divisant l'octave en 12 intervalles égaux de valeur $t_{1/2}$ appelés demi-ton.

Soit f_1, f_2, …., f_{12}, les hauteurs successives séparées par un intervalle d'un demi-ton. Nous avons donc :
$f_{12} / f_1 = (f_{12}/ f_{11}) \times (f_{11}/ f_{10}) \times\ldots\times(f_2/ f_1)$, soit $2 = (t_{1/2})^{12}$.

Ainsi, la valeur du demi-ton est égale à $2^{1/12}$. Le ton est un intervalle de 2 demi-tons ; il vaut $2^{1/12} \times 2^{1/12} = 2^{1/6}$.

Ainsi, pour la gamme de Do majeur, les fréquences se calculent à partir de celle du Do en sachant que les intervalles successifs ont pour valeurs : 1 ton,1 ton, ½ ton, 1 ton, 1 ton, 1 ton, ½ ton. On obtient alors la gamme :

Do	**Ré**	**Mi**	**Fa**	**Sol**	**La**	**Si**	**Do**
f_1	$2^{2/12} f_1 = 2^{1/6} f_1$	$2^{4/12} f_1 = 2^{1/3} f_1$	$2^{5/12} f_1$	$2^{7/12} f_1$	$2^{9/12} f_1 = 2^{3/4} f_1$	$2^{11/12} f_1$	$2 f_1$

On distingue deux notes séparées par une octave en les affectant d'un indice d'autant plus grand que la hauteur est élevée : ainsi le sol_4 est à l'octave supérieure du sol_3.
Les **notes altérées,** par un dièse ou un bémol, sont obtenues en ajoutant ou en retranchant un demi-ton. Dans la gamme tempérée, la hauteur du ré dièse est égale à celle du mi bémol.

Jean-Sébastien Bach (1685-1750) apporta son appui à l'adoption du système de la gamme tempérée en lui consacrant deux livrets intitulés « Le clavier bien tempéré ».

1	**3/2**	**9/4**	**27/8**	**81/16**	**243/32**	**729/64**	**2187/128**	**6561/256**	**19683/512**	**59049/1024**	**177147/2048**	**531441/4 096**
ut	*sol*	*ré*	*la*	*mi*	*si*	*fa* $^{\#}$	*ut* $^{\#}$	*sol* $^{\#}$	*ré* $^{\#}$	*la* $^{\#}$	*mi* $^{\#}$	*si* $^{\#}$ *ou ut*

étant la suite des quintes, et la suite des puissances de 2 :

1	**2**	**4**	**8**	**16**	**32**	**64**	**128**
ut_0	ut_1	ut_2	ut_3	ut_4	ut_5	ut_6	ut_7

Acoustique

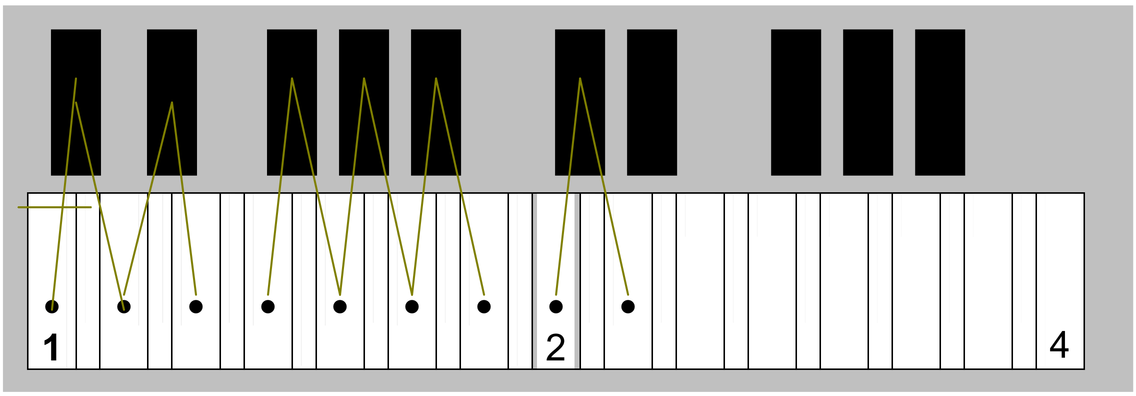
Au début du siècle, l'Acoustique paraissait avoir livré aux savants tous ses résultats essentiels, Helmholtz en avait établi les fondements physiques et physiologiques de façon solide et de manière qui semblait définitive. Rayleigh en avait donné une exposition sont le rigueur mathématique s'appuyait sur un remarquable ensemble expérimental. La lecture du traité d'Auerbach laissait l'impression qu'il n'existait plus en ce domaine que points de détails à élucider. Or, l'Acoustique a repris aujourd'hui une place de premier plan dans les préoccupations scientifiques.
L'acoustique est relative à l'étude des vibrations (production, propagation). Il s'agit d'une science très ancienne. Newton montra le rôle de l'élasticité dans la formation et la transmission des ondes sonores.

Exemples divers

retour au sommaire

La gamme tempérée

Mise à l'honneur par Bach, la gamme tempérée se retrouve dans les instruments à son fixe (piano, orgue, harmonium,…)
1. Déterminer les valeurs à attribuer aux différentes touches du clavier ci – dessous sachant que le quotient entre les valeurs de deux points rouges consécutifs doit être constant et que les nombres 1, 2 et 4 sont déjà placés.
(Cet intervalle fixe est appelé **demi-ton**).



2. On suppose que la 6e note blanche (le **La**) a pour fréquence 440 Hz. Utiliser la question précédente pour calculer les fréquences des notes **Do-Do #- Ré-Ré #-Mi-Fa-Fa #-Sol-Sol #- La-La #-Si.**

La gamme de Zarlin

Une corde vibrante émet une onde acoustique dont l'élongation s'exprime en fonction du temps t par une expression du type $g(t) = A \sin(2\pi f t)$. L'amplitude **A** dépend de l'intensité du son. La fréquence $\boldsymbol{f}$ détermine la note émise. Dans la gamme de Zarlin, les rapports relatifs des fréquences successives sont :

1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2

Quelques noms	
Rapport	Nom

1	Unisson
2	Octave
3/2	Quinte
4/3	Quarte
5/4	Tierce majeure
6/5	Tierce mineure

La gamme de Do_1							
Do_1	$Ré_1$	Mi_1	Fa_1	Sol_1	La_1	Si_1	Do_2
1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2

1. On suppose que le La_1 a la fréquence $f = 440$ Hz, déterminer les fréquences des autres notes de l'octave.
2. Déterminer les périodes T correspondantes.
3. Calculer les intervalles des sons successifs Do_1-$Ré_1$, $Ré_1$-Mi_1,… et vérifier qu'il n'y a que 3 espèces d'intervalles (Appeler respectivement *ton majeur, ton mineur* et *demi – ton*).
4. **Harmoniques d'un son** : on appelle *harmoniques* d'un son, considéré comme son fondamental et ayant une fréquence f fixée, des sons dont les fréquences sont respectivement $2f$, $3f$,$4f$...
   Déterminer les six premières harmoniques de Do_1 puis de Fa_1.
5. Enumérer les rapports de *tierces majeures* et *mineures* contenus dans l'octave Do_1- Do_2.
6. En écrivant la Gamme de Fa_1, montrer qu'il est nécessaire d'introduire une nouvelle note entre le La_1 et le Si_1 (On appelle *La dièse ou Si bémol* cette nouvelle note).

Timbre et analyse de Fourier

1. Une corde de clavecin de longueur L = 1 m est abandonnée sans vitesse initiale en forme de triangle. Ce triangle a été formé en écartant de $h = 2$ cm, de sa position d'équilibre, le point situé à l'abscisse $a = 0{,}25$ m par rapport à l'extrémité gauche de la corde.
Suite à des réflexions multiples à chaque extrémité de la corde, il s'établit un système d'ondes stationnaires de fréquences multiples. Le son complexe obtenu résulte de la superposition de plusieurs harmoniques dont les amplitudes sont données par la formule :

$$A_n = \frac{2hL^2}{\pi^2 a(L-a)} \times \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right).$$

a. Quelle est la tension de la corde du clavecin permettant d'obtenir un son fondamental de 440 Hz ? la masse linéique de la corde est $\mu = 3$ g.m^{-1}.
b. Calculer les amplitudes des 5 premières harmoniques lorsque $a = 25$ cm.
c. Tracer le spectre en fréquence en traçant le rapport des harmoniques $\frac{A_n}{A_1}$ en fonction du rang n de chaque harmonique.
d. En quel point faut –il pincer la corde pour faire disparaître le septième harmonique ?

2. Une corde de piano de longueur L = 1,5 m, est excitée par un marteau situé à l'abscisse a, donnant une vitesse initiale v_0 à une petite partie de la corde autour de l'abscisse a.
L'excitation qui s'ensuit peut être modélisée par une somme de fonctions sinusoïdales d'amplitudes :

$$A_n = \frac{2v_0 e}{L\omega_0} \times \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right)$$ avec $e = 0{,}5$ cm, $a = 25$ cm, $v_0 = 5$ m.s^{-1}, $\omega_0 = 440 \times 2\pi$ et L = 1,5 m.

a. Calculer les amplitudes des cinq premières harmoniques, puis tracer la courbe représentative le rapport des harmoniques en fonction du rang n des harmoniques.
b. Où faut – il frapper la corde pour faire disparaître le septième harmonique ?
c. Pourquoi le son d'un piano est – il plus riche que celui d'un clavecin ?

ÉCOUTEZ LEUR DIFFÉRENCE ![1]

retour au sommaire

D'OÙ PROVIENNENT- ILS ?

Fréquence des notes selon les époques...

	Pythagore	Physiciens modernes	Mathématiciens du XVI^{e}
DO	256	256	256
RÉ	288	288	287,4
MI	324	320	322,5
FA	341,3	341,3	341,7
SOL	384	384	383,6
LA	432	426,6	430,6
SI	486	480	483,3
DO	512	512	512

Ces chiffres ne sont pas le fruit de l'expérience...

Le but de cette activité est l'étude des notes de musique et de leurs rapports; comment l'homme a été amené à inventer des «gammes», comment ces «gammes» ont été modifiées au fur et à mesure que les connaissances scientifiques s'étendaient.

NOTION DE FRÉQUENCE

Parmi les premiers instruments utilisés figurent les instruments à cordes, dont un représentant actuel est la guitare on pince une corde, la corde émet un son.

Si on pose le doigt au milieu de la corde, et si on pince une des parties de celle-ci, on obtient un son, différent du premier : il est plus aigu. Tout se passe comme si on avait une corde deux fois plus petite on peut comparer les deux sons si on a deux cordes, l'une de longueur l et l'autre de longueur l/2.
On dit que le deuxième son est deux fois plus aigu que le premier, car il provient d'une corde deux fois plus petite.

Si on pose le doigt ailleurs qu'au milieu de la corde de longueur l, on obtient d'autres sons, intermédiaires entre les deux ci-dessus.
En d'autres termes la hauteur d'un son (c'est-à-dire sa qualité d'être plus aigu ou plus grave) varie avec la longueur de la corde qui le produit.
C'est d'ailleurs comme cela qu'on va mesurer la hauteur d'un son, ou comparer les hauteurs de deux sons, en comparant les longueurs des cordes correspondantes.
Pour ceux qui sont plus familiers avec une guitare ou tout instrument à cordes, je précise que d'autres facteurs que la longueur interviennent dans la hauteur d'un son, en particulier la grosseur et la tension (ce qui permet d' «accorder» l'instrument).
Donc pour mesurer scientifiquement un son, on va mesurer la longueur de la corde qui le produit. Mais il se trouve que, pour des raisons pratiques, l'oreille humaine sait comparer deux sons entre eux, et ceci avec une grande finesse, mais ne sait pas juger précisément la hauteur d'un son seul : si on nous fait écouter deux sons ensemble, ou l'un après l'autre, vous distinguez facilement le plus grave et le plus aigu. Mais si vous entendez une note seule, vous aurez du mal à dire si c'est un do, un ré ou une autre note.
C'est pourquoi tout au long de cette activité, on va supposer qu'on dispose d'un son de base, d'une note fondamentale, qu'on peut écouter quand on veut pour la comparer à un autre son.
Par exemple, on pourrait prendre la tonalité du téléphone, qu'on décrocherait dès qu'on voudrait une note de référence.
Or il se trouve que, dans l'ancien temps, le téléphone n'était pas aussi courant que de nos jours : les hommes ont donc commencé, non pas par mesurer les hauteurs des sons produits par leurs instruments, mais par les comparer entre elles.

[1] Tiré de l'ouvrage « Les maths au jour le jour » de Jacques Lubczanski paru en octobre 1985 aux éditions Cédic/Nathan et retranscrit avec l'aimable autorisation de l'auteur.

Par exemple Si leur note de référence était produite par une corde de longueur l celle produite par la corde longueur de $\frac{l}{2}$ était (et est encore) dite UNE OCTAVE au-dessus de la première.

L'octave, c'est un intervalle entre les deux notes, ou plutôt un rapport de longueurs : peu importe que la note de référence soit plus grave ou plus aiguë, le son produit avec une corde deux fois plus courte est une octave au-dessus de l'autre.

Le rapport des longueurs est $\frac{1}{2}$; le rapport des FRÉQUENCES est $\frac{2}{1}$ car les fréquences vont être des grandeurs variant à l'inverse des longueurs : si la longueur est trois fois plus petite, la fréquence sera trois fois plus grande.

Plus un son est aigu, plus la longueur est petite et plus la fréquence est grande. Plus un son est grave, plus sa fréquence est petite.

La fréquence, c'est la grandeur qui mesure la hauteur des sons (comme par exemple la longueur est la grandeur qui mesure l'éloignement des points).

Définition

Un son S_1 est dit une octave au-dessus d'un son S_2 si le rapport $\frac{\text{fréquence de } S_1}{\text{frequence de } S_2}$ vaut 2 c'est-à-dire si la fréquence de S_1 est deux fois la fréquence de S_2.

En résumé:

Il va y avoir une famille de sons qui vibrent à l'unisson d'un son de fréquence f : ce sont les sons de fréquence $2^n \times f$ *où n est un entier positif ou négatif.*

A toute cette famille, on a donné un seul nom : par exemple la famille des sons à l'unisson de la tonalité du téléphone s'appelle LA. Ses membres sont des notes qui sont toutes des la :
la tonalité du téléphone est la note la_3
une octave au-dessus on a la note la_4
une octave en dessous on a la note $1a_2$, etc.
On pourrait en théorie dire qu'il y a une infinité de la de plus en plus aigus et une infinité de la de plus en plus graves. Mais l'oreille humaine a ses limites et ne peut guère entendre plus de 7 ou 8 octaves.
Au-dessus ou en dessous, les sons sont inaudibles (infrasons et ultrasons).
Si vous avez déjà prêté attention aux publicités pour les chaînes haute fidélité, vous avez peut-être remarqué dans les caractéristiques :
«Bande passante : 20 à 20000 Hz» par exemple; cela signifie que l'appareil produit des sons dont la fréquence va de 20 à 20000 hertz. Le hertz (en abrégé Hz) est l'unité de fréquence.
Par exemple le la_3 (tonalité du téléphone) a une fréquence d'à peu près 435 Hz. Il s'ensuit que la fréquence du la_4 est 870 Hz, celle du la_2 :217,5 Hz...
L'étendue des hauteurs de sons que l'oreille humaine peut percevoir varie selon les individus : cela peut varier de 15 Hz à 38000 Hz, pour un individu vivant dans un milieu calme à... beaucoup moins pour un citadin!

Première question

a) Calculer la fréquence du la_8 ; est-il audible ?
b) Calculer la fréquence du la_o ; est-il audible ?
c) Combien y a-t-il d'octaves entières entre 15 et38000Hz ?
d) Quel est le la dont la fréquence est entre 7,5 et 15 Hz ?

Des notes qui ont du tempérament

retour au sommaire

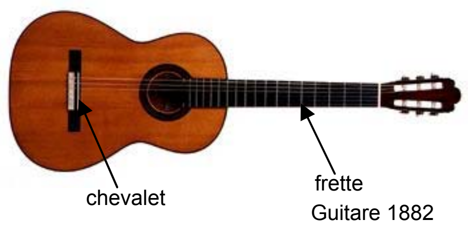
Pour simplifier la tâche des musiciens et des luthiers, fut inventé en XVII^e siècle le tempérament égal qui définit les hauteurs des notes de la façon suivante :
on numérote les notes et on associe à la note i la fréquence du son correspondant $f_i = a^i f_0$ où a est le nombre positif tel que $a^{12}=2$ et f_0 la fréquence d'une note de référence (il faut que f_i vérifie $20<f_i<20000$ pour que le son soit audible).
On dit alors que les 12 intervalles do-do#, do#-ré, re-re#, … de l'octave sont égaux.
Si on pose par exemple $f_0=100$ Hz on peut alors calculer à l'aide d'un tableur $f_1, \ldots ,f_{12},\ldots$
Il est clair que les intervalles $[f_i\ ;\ f_{i+1}]$ ne sont pas « égaux » (de longueurs égales) au sens où on l'entend en mathématiques. Cependant on peut remarquer que la suite (f_i) est géométrique et vérifie $f_{i+12} / f_i = 2$. On peut donc parler d'intervalles égaux si on fait référence à $(\ln f_i)$.

do do# re re# mi fa fa# sol sol# la la# si do
reb mib solb lab sib

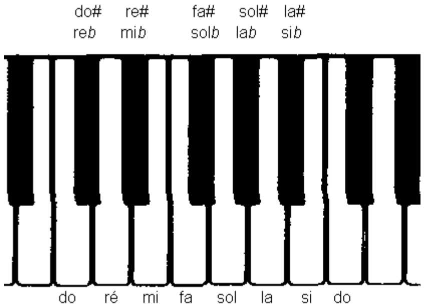
L'intérêt d'une telle échelle est que toute mélodie peut facilement être translatée, on dit en musique transposée. Ainsi la gamme do, re mi fa, sol, la si, do donne après transposition de 2 demi-tons : re, mi, fa#, sol, la, si, do#, re. Les écarts des logarithmes des fréquences entre les notes sont bien les mêmes dans les deux cas.
Cependant cette échelle pose problème avec les accords (notes jouées en même temps) : parce que toute fonction périodique de fréquence f se décompose en fonctions trigonométriques de fréquences f, 2f, 3f, 4f, … (le savait-on avant Fourier ?) on a essayé de retrouver des notes correspondantes aux sons de fréquences nf.
Pour 2f cela marche, c'est la fréquence de la note de l'octave suivante (les octaves étant numérotées, on dira par exemple que si f est la fréquence du do3, 2f est la fréquence du do4). 3f est alors presque égal à la fréquence du sol4, d'où l'idée d'associer une fréquence de 3 / 2 f au sol3. C'est ainsi, par quintes successives, que se construit la gamme de Pythagore : do-sol-re-la-mi-si-fa#-re#-la#-fa-si#... Cette échelle a été inventée bien avant le système précédent. Les fréquences étaient toutes de la forme $3^n / 2^p$ f, où f est la fréquence du do de départ. Mais il y avait un problème : la fréquence du si# n'est pas égale à celle du do (petite erreur) et de toute façon on ne pouvait trouver n>1 et p>1 tel que $3^n / 2^p=1$. Donc difficile de conserver les écarts entre notes lors des transpositions (les quintes descendantes do-fa-si*b*-mi*b*-… posent le même problème), mais c'était le prix à payer pour avoir une quinte qui sonne très juste. Gamme Pythagoricienne :

Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do
f	9 / 8 f	81 / 64 f	4 / 3 f	3 / 2 f	27 / 16 f	243 / 128 f	2 f

D'autres échelles ont vu le jour, celle de Zarlino (1517-1590) pour rendre « juste » l'accord do-mi-sol, échelle en fait inexploitable et celle de Werckmeister encore en vigueur aujourd'hui qui offre un bon compromis entre le tempérament égal et le système pythagoricien.



Guitare 1882



Pour finir : quand on met le doigt sur une case du manche d'une guitare, la partie de la corde qui vibre est entre le chevalet et la barrette (frette) immédiatement à gauche du doigt. On peut donc en mesurer facilement la longueur. Le fréquence du son est normalement inversement proportionnelle à la longueur de la corde. On peut le vérifier ici : n'ayant pas de guitare sous la main j'ai mesuré les longueurs en pixels en mettant l'image ci-dessus dans un logiciel de dessin approprié et j'ai trouvé 224, 212, 200, 188, 178, 168, 159, 150, 141, 133, 126, 119, 113, 106, 100, 94, 90, 85 et 79 avec beaucoup d'imprécisions sur les dernières valeurs. On peut faire la même chose avec un xylophone.
En fait, par convention le « la3 » (c'est à dire le « la » de la troisième octave) a une fréquence de vibration égale à 440 Hz. Cette fréquence est plus élevée que dans le passé (et peut poser des problèmes avec certains instruments anciens). C'est à partir de cette fréquence de référence qu'on peut facilement calculer les fréquences de toutes les autres notes.

Exercices

retour au sommaire

Approche arithmétique du cycle des quintes

1) JUSTIFIER QUE L'ÉQUATION $\left(\frac{3}{2}\right)^N = 2^P$ N'A PAS DE SOLUTION DANS $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

2) MONTRER QUE L'ÉGALITÉ $\left(\frac{3}{2}\right)^N = 2^P$ ÉQUIVAUT À LOG$_2\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{P}{N}$.

$\log_2(x)$ désigne le logarithme de base 2 de x, c'est à dire : $\log_2(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$, avec $\ln(x)$ désignant le logarithme népérien de x.

Comme on a vu que cette équation n'a pas de solution $(n\ ;\ p)$ dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on va approximer $\log_2\left(\frac{3}{2}\right)$ par une fraction du type : $\log_2\left(\frac{3}{2}\right) = r_1 + \cfrac{1}{r_2 + \cfrac{1}{r_3 + \cfrac{1}{r_4 + \cfrac{1}{r_5 + \cfrac{1}{\ldots}}}}}$, où r_1, r_2, … sont des entiers.

Une telle écriture s'appelle *développement en fraction continue*. Montrer que $r_1 = 0$ et que $r_2 = 1$.

a) Montrer que déterminer r_3 revient à approximer $\frac{\log\left(\frac{3}{2}\right)}{\log\left(\frac{4}{3}\right)}$ par r_3. En déduire que $r_3 = 1$.

b) Montrer de même que $r_4 = 2$.

c) En déduire que l'on peut approximer $\log_2\left(\frac{3}{2}\right)$ par les fractions successives $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{7}{12}, \frac{24}{41}$.

3) INTERPRÉTER LES FRACTIONS $\frac{3}{5}$ ET $\frac{7}{12}$.

Acoustique : niveau sonore

Le niveau sonore en décibels (dB) d'un son de pression acoustique P est donné par la relation :
$L = 20\log\left(\frac{P}{P_0}\right)$ où $P_0 = 2 \times 10^{-5}$ pascals est la plus petite pression perceptible par une oreille humaine.

1) Calculer les niveaux sonores correspondant à :

   $P = P_0$ (seuil d'audibilité)
   $P = 10^3 P_0$ (conversation courante)
   $P = 10^9 P_0$ (décollage d'une fusée)

2) Un baladeur (à sa puissance maximale) atteint 105 dB, un orchestre de rock peut atteindre jusqu'à 130 dB.

   Calculer les rapports $\frac{P}{P_0}$ correspondants.

(N.B. *Un niveau sonore supérieur à 90 dB est dangereux pour l'oreille)*

Un exercice de probabilité

Profession du père des élèves entrés au Conservatoire National Supérieur de Musique à Paris entre 1950 et 1975

	Cordes n = 373	Bois n = 157	Cuivre n = 221	Percussion n = 42	Ensemble n = 793
Agriculteurs	0,8 %	1,3 %	4,5 %	0,0 %	1,9 %
Artisans, commerçants, chefs d'entreprise	14,5 %	12,1 %	12,7 %	9,5 %	13,2%
Cadres et professions intellectuelles	41,6 %	28,0 %	14,5 %	50,0 %	31,8 %
Intermédiaires	10,2 %	14,6 %	10,9 %	7,1 %	11,1 %
Employés	16,6 %	17,8 %	22,6 %	16,7 %	18,5 %
Ouvriers	10,2 %	21,0 %	27,1 %	14,3 %	17,3 %
Non-réponses	6,1 %	5,1 %	7,7 %	2,4 %	6,2 %
Total	100 %	100 %	100 %	100 %	100 %

[NB. Le tableau se lit : 28 % des bois ont un père cadre]
Source : B. Lehmann, *L'orchestre dans tous ses états*, La Découverte, 2002.

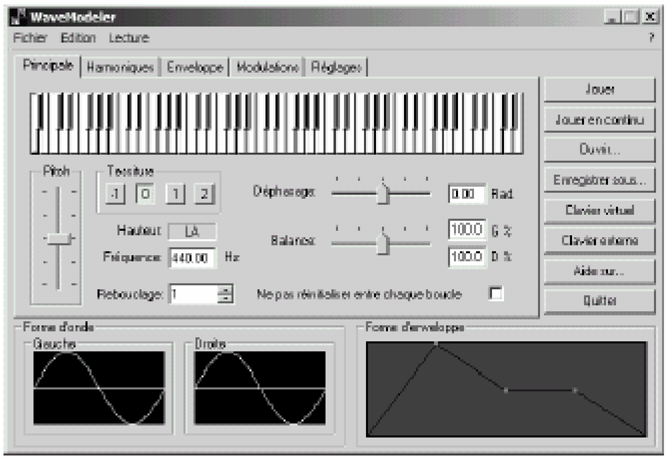
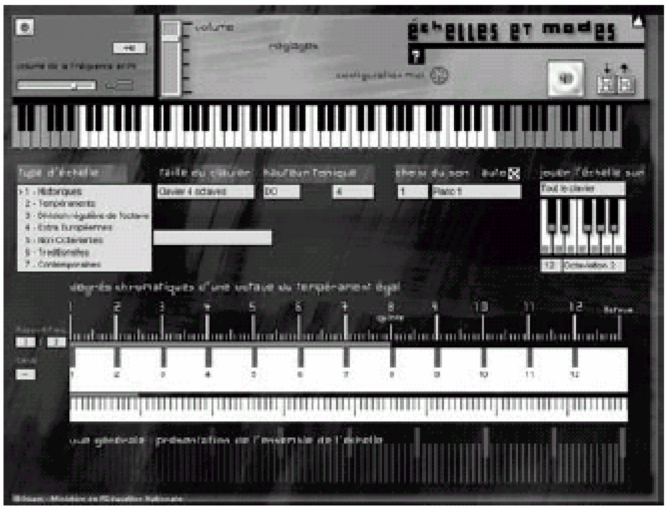
On considère le tableau de répartition des élèves du CNSM entre 1950 et 1975, en fonction de la profession de leur père.

1) Un élève étant choisi au hasard, quelle est la probabilité qu'il joue d'un instrument à cordes et que son père soit artisan, commerçant ou chef d'entreprise ?
2) Un élève étant choisi au hasard, quelle est la probabilité que son père soit ouvrier ?
3) Un élève étant choisi d'un milieu ouvrier, quelle est la probabilité qu'il joue d'un cuivre ?

Dominique Haller
Lycée Marie de Champagne
Troyes

Quelques outils pour des activités maths/physique/musique

[retour au sommaire](#)

Spectogram : il s’agit d’un logiciel qui permet de visualiser en temps réel le spectre d’un son. Celui-ci peut-être un fichier (*.wav) présent sur le disque dur, ou bien émis en direct et transmis par le biais du micro et de la carte son. En anglais. Il est très peu gourmand en ressource et il en existe une version gratuite, téléchargeable à l’adresse suivante : http://www.hitsquad.com/smm/programs/spectrogram/	
Wave Modeller : ce logiciel permet de construire un son en paramétrant ses caractéristiques (fréquence fondamentale, nombre et intensité des harmoniques, déphasages, etc.). L’image de la courbe est visible et on peut entendre le son. Gratuit et en français. Accessible à l’adresse suivante : http://perso.wanadoo.fr/herve.roche	
Échelles et modes : logiciel permettant de construire et d’entendre des échelles musicales très variées (sons MIDI de la carte son). Les plus connues sont déjà paramétrées. On peut entendre des fichiers MIDI préexistants ou jouer à partir d’un clavier-maître relié à la carte son. Logiciel développé par l’IRCAM et le MEN, gratuit pour les professeurs et les élèves. Renseignements pour obtenir un licence et un code d’accès : http://www.educnet.education.fr/musique/tice/application/musiclab/index.htm	

Bibliographie

[retour au sommaire]

Textes Historiques

♦ D'ALEMBERT : *Eléments de musique théorique et pratique suivant les principes de M. Rameau*, Paris 1779.

♦ M. BRENET : « *Deux Traductions inédites des Institutions harmoniques de Zarlino* », in année musicale, tome I, Paris 1911.

♦ J. CHALLEY, R. DUSSAULT : *Acoustique musicale* , Actes. Congrès Acoustique musicale de Marseille, Paris 1959.

♦ M. COURANT, J. GROSSET et M. EMMANUEL : « *Musique de Chine, Corée, Japon, Inde et Grèce* » in Encyclopédie musicale et dictionnaire du conservatoire Tome I, Paris 1913.

♦ M. GANDILLOT : *Essai de la gamme*, Paris 1906.

♦ L. LALOY : *Aristoxène de Tarente, disciple d'Aristote, et la musique dans l'Antiquité*, Paris 1904.

♦ J.P. RAMEAU : *Traité de l'harmonie réduite à ses principes naturels,* Paris 1722
Extrait d'une réponse de M. Rameau à M. Euler sur l'identité des octaves, Paris 1753.

♦ H. RIEMANN : *Katechismus der Akustik,* Leipzig 1891.

♦ A. WERCKMEISTER: *Musikalische Temperatur*, Francfort – Leipzig 1691.

♦ A. FOCH: *Acoustique*, Armand Colin 1947.

♦ L. ROBIN: *La pensée grecque et les origines de l'esprit scientifique,* La Renaissance du livre 1932.

Documents récents

♦ G. BERKTOLD : *Le monde comme image musicale*, article Dossier Pour La Science octobre / janvier 2003.

♦ Revue Tangente Hors Série n° 11, *Maths et Musique.*

♦ B. PARZYSZ : *Musique et mathématique,* Ed. APMEP, Paris 1983.

♦ J. LATTARD : *Gammes et tempéraments musicaux,* Ed Masson 1988.

♦ J. F. MATTEI : *Pythagore et les pythagoriciens,* Presses Universitaires de France 1993.

♦ ROLAND de CANDE : *Histoire universelle de la musique,* Ed du Seuil, Paris 1978.

♦ S. CORDIER : *Piano bien tempéré et justesse orchestrale,* Ed Buchet – Chastel, Paris 1982.

♦ L. ETIENNE : *Le tempérament décimal,* Bulletin du GAM n°6 bis Université Paris 7, 1972.

♦ M. HONNEGER : *Science de la musique,* Ed. Bordas Paris 1976.

♦ O. MESSIAEN : *Technique de mon langage musical,* Ed. Leduc Paris 1944.

♦ U. RAMSEYER : *L'art populaire à Bali,* Ed. Office du Livre, Fribourg 1973.

♦ N. DUFOURCQ : *Petite Histoire de la musique,* Ed. Larousse 1988.

♦ I. STEWART : *L'Univers des nombres,* articles « Calculs bien tempérés » et « Les volées de cloches », Ed. Belin 2000.

♦ J. R. PIERCE : *Le son musical,* Ed. Belin / Pour la Science
Les instruments de l'orchestre, Ed. Belin / Pour la Science

♦ Pour la science : dossier hors série juillet – octobre 2001.

Sitographie

♦ Centre d'étude et de Recherche Pierre Schaeffer : http://www.univ-paris13.fr/centrepierreschaeffer.html

♦ IRCAM Institut de recherche et de coordination acoustique/musique : http://www.ircam.fr

♦ LAM – Laboratoire d'Acoustique Musicale, Unité Mixte (Paris VI/CNRS/ Ministère de la Culture) de recherche n°7604
http://www.lam.jussieu.fr

♦ THELEME CONTEMPORAIN : création et promotion de la musique contemporaine, page annuaire des organismes français d'informatique musicale, http://altern.org/tc/

♦ SFIM Société française d'informatique musicale http://www.sfim.org/

♦ AUDIORAMA Studio de création musicale et sonore http://www.agat.net/audiorama/somfr.html