M2 MEEF/CAPES 2017-2018 — Université Paris-Sud
Approfondissement — Mélanie Guenais

Examen Approfondissement disciplinaire.

Nombres.

1 Approximations décimales des nombres réels.

On rappelle que tout nombre réel positif x peut s'écrire sous la forme $x = n + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{10^i}$, oú $n \in \mathbb{N}$ et $(a_i)_{i\geq 1}$ est une suite de $\{0,..9\}$. Alors $n, a_1a_2a_3...$ est une écriture décimale de x.

1. Etude de $0,7799999....$
   (a) Ecrire ce nombre sous une autre forme, en déduire sa nature.
   Première stratégie adaptée au collège :
   Notons $a = 3,13999.... - 3,13 = 0,00999.....$ *Alors* $10a = 0,0999... = 0,09 + a$. *On en déduit que* $10a - a = 0,09$, *donc que* $9a = 0,09$. *On obtient que* $a = 0,01$, *et donc* $3,13999... = 3,13 + 0,01 = 3,14$. *Ce nombre est donc un nombre décimal (il s'écrit comme une somme de fractions décimales : on peut aussi dire que* $3,14 = \dfrac{314}{100}$ *donc ce nombre est décimal.)*
   Seconde stratégie possible en licence (avec du soin) :
   On s'occupe toujours de la valeur de a définit comme précédemment. a est la limite de la somme des termes d'une suite géométrique de raison $1/10$ *et de premier terme* $0,09$. *Cette limite existe car une série des termes d'une suite géométrique de raison positive et strictement inférieure à 1 est convergente, et sa limite est égale à* $0,09 \times \dfrac{1}{1-1/10}$.
   Donc $a = 0,09 \times \frac{10}{9} = 0,01$.
   (b) Généraliser ce résultat et le démontrer.
   <u>Enoncé</u> : Tout nombre dont l'écriture décimale ne contient que des 9 à partir d'un certain rang est décimal.
   <u>Preuve</u> :
   La preuve suit le même schéma que la question précédente : On se donne un nombre a qui s'écrit sous la forme $n + \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{10^i} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{9}{10^i}$, *où* $n \in Z$ *et* $a_1, ..a_k$ *sont des nombres entiers de* $\{0,..9\}$. *On peut supposer que* $a_k \neq 9$.
   Alors on sait que $\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{9}{10^i} = \frac{9}{10^{k+1}} \times \frac{10}{9} = \frac{1}{10^k}$, *donc on a aussi* $a = n + \sum_{i=1}^{k-1} \dfrac{a_i}{10^i} + \dfrac{a_k+1}{10^k}$. *Comme on avait choisi* $a_k \neq 9$, *on a bien* $a_k + 1 \in \{0,..9\}$, *et l'écriture décimale de a est donc finie. On en conclut que* $a = n + \dfrac{\overline{a_1a_2..(a_k+1)}}{10^k}$, *où* $\overline{a_1a_2..a_k}$ *représente l'écriture d'un entier en base 10. a est donc un nombre décimal.*
2. Ecriture décimale de $\dfrac{22}{7}$
   (a) Ce nombre est-il un nombre décimal ?
   Pour qu'un nombre soit décimal, il faut qu'il puisse s'écrire sous la forme d'une fraction décimale. La fraction $\frac{22}{7}$ *est irréductible car 7 est premier et ne divise pas 22. On sait qu'une fraction irréductible est décimale si et seulement si son dénominateur n'admet que 2 ou 5 comme facteurs premiers. Or 7 est premier, donc* $\frac{22}{7}$ *n'est pas un nombre*

décimal.
L'argument consistant à dire que l'écriture décimale est infinie est faux en général (cf question 1). si l'on exclut les cas de la question 1, il n'est pas justifié non plus et ne découle d'aucune propriété vue explicitement. Ce n'est donc pas un argument suffisant, même au collège.

(b) déterminer son écriture décimale en explicitant l'algorithme utilisé et en justifiant la démarche.
Cette question avait été traitée en détail en classe. La trace écrite du tableau aurait pourtant pratiquement suffit à obtenir tous les points. Trop souvent, seule l'écriture est proposée. L'algorithme de la division décimale n'est pas toujours rappelé, l'explicitation de l'algorithme lorsqu'elle est traitée se limite souvent à des couleurs et les flèches : il est important d'être capable d'expliciter clairement et en français un algorithme. Enfin la démarche doit être justifiée, ce qui signifie qu'il faudrait aussi démontrer que l'algorithme conduit bien à l'écriture annoncée.
L'algorithme de la division euclidienne conduit à une suite d'égalités : la première, $22 = 7 \times 3 + 1$, donne le premier quotient, et le premier reste. Il permet d'écrire la première étape de l'écriture décimale : $\frac{22}{7} = 3 + \frac{1}{7}$ .On note $q_0 = 3$ et $r_0 = 1$ les quotients et reste de la première étape.
La seconde étape de la division consiste en la division de $10r_0$ par 7. On obtient $10 = 1 \times 7 + 3$. On note $q_1 = 1$ et $r_1 = 3$. L'écriture de la 2de égalité conduit à la décomposition suivante : $\frac{10}{7} = 1 + \frac{3}{7}$, d'où $\frac{22}{7} = 3 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \times \frac{3}{7} = q_0 + \frac{q_1}{10} + \frac{1}{10^2} \times \frac{10r_1}{7}$.
Nous pouvons continuer l'algorithme par récurrence : si $10r_{n-1} = q_n \times 7 + r_n$ où $r_n \in \{0, .., 6\}$, on obtient alors par récurrence que pour tout n, on a

$$\frac{22}{7} = q_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{10^i} + \frac{1}{10^{n+1}} \times \frac{10r_n}{7}$$

Il reste à vérifier que : pour tout n, $q_n < 10$ (par récurrence, puisque $q_n \leq \frac{10r_{n-1}}{7} < 10$), et que la série converge (il suffit de justifier que $\frac{1}{10^{n+1}} \frac{10r_n}{7}$ converge vers 0, ce qui résulte de la convergence vers 0 de la suite géométrique de raison 1/10 et de la majoration de $\frac{10r_n}{7}$ par 10.).

3. Nature du nombre $3,\overline{14} = 3,14141414\cdots$

(a) Ce nombre est-il un nombre décimal ?
Cette question était plus délicate qu'elle ne le semblait. Beaucoup de copies mentionnent un argument faux (ce n'est pas décimal car l'écriture est illimitée). Il était judicieux de résoudre d'abord la seconde question pour conclure. Les arguments étaient alors les mêmes que ceux de la question 2a. Le nombre trouvé vaut $3 + \frac{14}{99}$

(b) Est-il rationnel ? si oui, l'écrire sous la forme d'une fraction irréductible.
La question reprenait l'une des techniques de la question1a, elle n'a pas posé de difficulté. La rédaction et la clarté de la preuve n'est pas toujours soignée. La justification de la forme irréductible est oubliée ou traitée approximativement. De la rigueur dans la lecture de la question et dans sa justification était attendue.

4. Etude du du nombre $\dfrac{3141592650}{999999999}$

(a) Montrer que ce nombre admet une écriture décimale périodique.
Cette question n'a pratiquement pas été traitée. Quelques copies mentionnent un lien entre les restes de la division euclidienne par le dénominateur et la période maximale. Une seule mentionne l'idée d'écrire le dénominateur $10^9 - 1$, elle n'a pas été approfondie.

Le travail en groupe aurait pu faire fructifier des idées ou des pistes de résolutions. Notons a ce nombre. Alors $(10^9-1)a = 3141592650$. *On en déduit que* $10^9 a = 3141592650 + a$, *ce qui donne :*
$$a = 10 \times (\frac{314159265}{10^9} + \frac{a}{10^{10}}).$$
On peut alors montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, *on a*
$$a = 10 \times \sum_{i=1}^{n} \frac{314159265}{10^{9n}} + \frac{a}{10^{9n+1}}).$$
On en déduit l'écriture décimale périodique de a, sous la forme $3,\overline{141592653}$. *(attention à la multiplication par 10 au départ)*

(b) Comment peut-on calculer sa période ? Proposer plusieurs stratégies si possible.
Ici, la question est plutôt difficile sans avoir fait la question précédente. On aurait aussi pu faire l'analogie avec la question 3b pour en conjecturer une valeur... Quelques copies ont proposé de majorer la période par le dénominateur, ce qui était juste, mais imprécis. On aurait pu remarquer que la fraction n'était pas irréductible...On aurait pu également réinvestir les remarques faites en cours concernant le calcul de la période à l'aide des restes. Il s'agissait d'utiliser les congruences.
En reprenant l'algorithme d'écriture décimale de la question 2b, on pouvait voir, comme il a été vu en classe, et que beaucoup ont indiqué sur les copies, que la période correspondait au premier retour à un reste déjà vu : autrement dit, la période p est le plus petit nombre non nul qui satisfait à la condition : $r_{n+p} = r_n$ *pour un n donné. Mais on sait que* $r_{n+p} = 10 r_{n+p-1} \mod (10^9 - 1)$, *on en déduit donc que p vérifie* $10^p = 1 mod (10^9 - 1)$, *donc que p=9 convient. Ce raisonnement était suffisant pour valider la question. Il n'est pas absolument certain que cette période soit minimale en général..si elle ne l'est pas, elle doit être un diviseur de la période : par conséquent les seuls cas possibles sont 1, 3 ou 9. La période 1 peut facilement être éliminée (car elle correspond à des fractions irréductibles de dénominateur des puissances de 3. La période 3 est plus délicate à traiter. Il n'était pas demandé de justifier au delà.*

(c) Proposer une généralisation de ce résultat.
Cette question demandait de savoir prendre un peu de recul par rapport aux énoncés numériques. L'énoncé ci-dessous permettait de valider cette question.
<u>Enoncé 1</u> : Tout nombre s'écrivant sous la forme d'une fraction de dénominateur de la forme $10^n - 1$ *admet une écriture décimale périodique, de période n au plus.*
On aurait pu se demander quels nombres rationnels pouvaient se mettre sous cette forme...et penser aux congruences de 10^n *modulo p pour voir que l'énoncé pouvait être bien plus général : <u>Enoncé 2</u> : Tout nombre rationnel admet un développement décimal périodique.*
La question de la période n'est pas triviale dans ce cas.. elle est liée aux travaux de Gauss et d'Euler, et dans le cas général il s'agit d'une conjecture (conjecture de Artin)