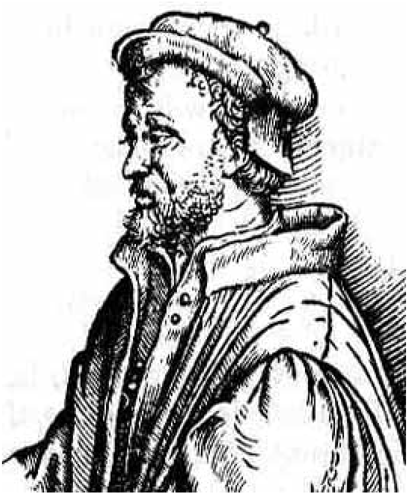
Il était une fois... les nombres complexes, deuxième partie

Pierre Pansu, Université Paris-Saclay

14 septembre 2020

Girolamo Cardano, fils illégitime d'un juriste de Pavie (qui a aussi enseigné les mathématiques), fait des études de médecine. Joueur invétéré, il obtient tout de même son doctorat et exerce à proximité de Padoue. Mais c'est à Milan, la capitale, qu'il souhaite exercer. Grâce à l'appui d'aristocrates, il y devient d'abord professeur de mathématiques, avant d'être enfin admis au collège des médecins en 1539. Sa réputation de médecin grandit et jusqu'à sa mort, il sera sollicité par les grands de ce monde.

Esprit universel, il a publié plus de 200 livres, sur tout les sujets, y compris l'astrologie (qui lui vaudra les foudres de l'Inquisition). Son *Traité des Songes* a inspiré Sigmund Freud. Le nom de Cardan est attaché à de nombreuses inventions !



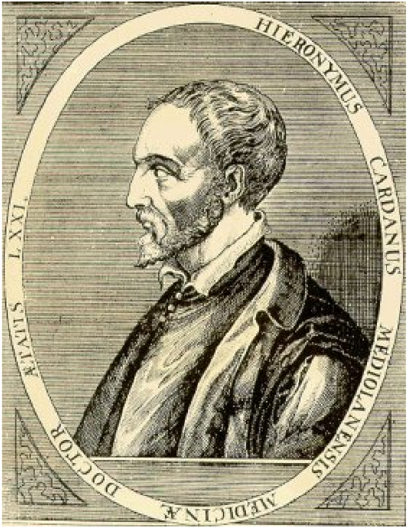
Autoportrait

Le troisième acteur : Girolamo Cardano (1501-1576)

Dès 1530, Cardano entreprend la rédaction d'un traité de mathématiques. Vers 1537, alors que son traité est prêt à être imprimé, il apprend par la rumeur que la solution de l'équation cubique aurait été découverte.

En 1539, par personne interposée, il entre en contact avec Tartaglia, il lui demande de lui donner la solution sous le sceau du secret. Refus. Suit une longue négociation épistolaire. En lui faisant miroiter de l'introduire à la cour de Milan, Cardano parvient à convaincre Tartaglia qui va lui révéler son secret.

Sous la forme d'un poème...



Le poème de Tartaglia

Quando chel cubo con le cose appresso
Se agguaglia à qualche numero discreto
Trouan dui altri differenti in esso.

Dapoi terrai questo per consueto
Che'llor produtto sempre sia eguale
Alterzo cubo delle cose neto,

El residuo poi suo generale
Delli lor lati cubi ben sottratti
Varra la tua cosa principale.

Le poème de Tartaglia

Quando chel cubo con le cose appresso
Se agguaglia à qualche numero discreto
Trouan dui altri differenti in esso.

Dapoi terrai questo per consueto
Che'llor produtto sempre sia eguale
Alterzo cubo delle cose neto,

El residuo poi suo generale
Delli lor lati cubi ben sottratti
Varra la tua cosa principale.

Quand le cube auprès des choses
Est égalé à un quelconque nombre discret
Trouve en lui deux nombres différents

Alors tu prendras pour habitude
Que leur produit soit toujours égal
Au tiers cubé des choses exactement

Ensuite, le reste général
De leurs racines cubiques bien soustraites
Sera égal à ta chose principale.

Le poème de Tartaglia

Quand le cube auprès des choses
Est égalé à un quelconque nombre discret
Trouve en lui deux nombres différents

Alors tu prendras pour habitude
Que leur produit soit toujours égal
Au tiers cubé des choses exactement

Ensuite, le reste général
De leurs racines cubiques bien soustraites
Sera égal à ta chose principale.

Quand le cube auprès des choses	$x^3 + bx$
Est égalé à un quelconque nombre discret	$= c$
Trouve en lui deux nombres différents	$u - v = c$
Alors tu prendras pour habitude	
Que leur produit soit toujours égal	$uv =$
Au tiers cubé des choses exactement	$(b/3)^3$
Ensuite, le reste général	
De leurs racines cubiques bien soustraites	$\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$
Sera égal à ta chose principale.	$= x.$

Quand le cube auprès des choses	$x^3 + bx$
Est égalé à un quelconque nombre discret	$= c$
Trouve en lui deux nombres différents	$u - v = c$
Alors tu prendras pour habitude	
Que leur produit soit toujours égal	$uv =$
Au tiers cubé des choses exactement	$(b/3)^3$
Ensuite, le reste général	
De leurs racines cubiques bien soustraites	$\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$
Sera égal à ta chose principale.	$= x.$

Vérification.

$$\begin{aligned} x^3 &= (\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v})^3 \\ &= u - 3(\sqrt[3]{u})^2\sqrt[3]{v} + 3\sqrt[3]{u}(\sqrt[3]{v})^2 - v \\ &= u - v - 3\sqrt[3]{uv}(\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}) \\ &= c - bx. \end{aligned}$$

Le poème de Tartaglia

Reste à trouver u et v, sachant que

$$u - v = c \quad \text{et} \quad uv = (\frac{b}{3})^3.$$

Reste à trouver u et v, sachant que

$$u - v = c \quad \text{et} \quad uv = (\frac{b}{3})^3.$$

On développe l'expression

$$(X + u)(X - v) = X^2 + (u - v)X - uv = X^2 + cX - (\frac{b}{3})^3.$$

$-u$ et v sont donc les deux racines de l'équation du second degré $X^2 + cX - (\frac{b}{3})^3 = 0$. On trouve

$$\{-u, v\} = \{\frac{-c + \sqrt{c^2 + 4(\frac{b}{3})^3}}{2}, \frac{-c - \sqrt{c^2 + 4(\frac{b}{3})^3}}{2}\}.$$

Reste à trouver u et v, sachant que

$$u - v = c \quad \text{et} \quad uv = (\frac{b}{3})^3.$$

On développe l'expression

$$(X+u)(X-v) = X^2 + (u-v)X - uv = X^2 + cX - (\frac{b}{3})^3.$$

$-u$ et v sont donc les deux racines de l'équation du second degré $X^2 + cX - (\frac{b}{3})^3 = 0$. On trouve

$$\{-u, v\} = \{\frac{-c + \sqrt{c^2 + 4(\frac{b}{3})^3}}{2}, \frac{-c - \sqrt{c^2 + 4(\frac{b}{3})^3}}{2}\}.$$

D'où la formule

$$x = \sqrt[3]{\frac{c - \sqrt{c^2 + 4(\frac{b}{3})^3}}{2}} - \sqrt[3]{\frac{-c - \sqrt{c^2 + 4(\frac{b}{3})^3}}{2}}.$$