Nombres et écritures

Mélanie Guenais

5 septembre 2023

La conscience du nombre chez l'enfant

Il s'agit d'un sujet étudié intensivement, depuis longtemps. Quelques auteurs, pédagogues, didacticiens, psychologues, neuroscientifiques de référence : *Baruk, Brissiaud, Brousseau, Charnay, Chevallard, Dehaene, Fayol, Fisher, Piaget, Vergnaud,..*

Les savoirs scientifiques établis :

- l'enfant a une conscience des petites quantités très tôt (jusqu'à 3) : le terme scientifique est le subitizing (capacité à discriminer les petites quantités de manière immédiate).
- l'enfant est capable d'appréhender les mesures de grandeurs spontanément (un peu, beaucoup, grand, petit). Ce sont des grandeurs spatiales (longueur, surfaces, volumes).

L'intérêt de l'utilisation des nombres est de rendre ces estimations ou comparaisons précises et fiables, à l'unité près.

Que disent les programmes ?

Extraits du programme 2015 de Cycle 1

La construction du nombre s'appuie sur

- *la notion de quantité,*
- *sa codification orale et écrite,*
- *l'acquisition de la suite orale des nombres et*
- *l'usage du dénombrement.*

Mises en garde :

- *La connaissance de la suite orale de nombres ne constitue pas l'apprentissage du nombre mais y contribue.*
- *Les activités de dénombrement doivent éviter le comptage-numérotage*

Recommandations :

*La maîtrise de la **décomposition des nombres** est une condition nécessaire à la construction du nombre.*

Le concept : nombre ou numéro ?

Deux grandes fonctions :

Ordinale : organiser, ranger, ordonner, classer, numéroter, trier, compter, repérer ..

Cardinale : estimer, comparer, dénombrer, quantifier, mesurer, calculer

Quel lien ?

On peut ranger sans comparer, mais pour comparer il faut savoir ranger.

Enjeux des premiers apprentissages :

Langage : mémoriser la comptine numérique (ordinale), identifier les mots-nombres, les mettre en relation avec les chiffres. Ecrire les nombres en chiffres.

Coordination gestuelle et perceptive : Comparer et énumérer des collections, observer l'indépendance de l'ordre, des représentations. (stabilité du nombre ordinal et correspondance avec le nombre cardinal)

Comprendre la notion de quantité : stabilité du nombre cardinal et construction des nombres par **accumulation d'unités**.

Compter ou calculer ? Les difficultés

Conflits liés concept :

Nombre ou numéro ? difficultés de la bonne interprétation des consignes et des procédures associées (doit-on compter lorsqu'on demande "combien" ?)

Mot-nombres et écriture chiffrée : difficultés de la langue orale.

Ecriture chiffrée et propriétés des nombres : comprendre le principe de la numération de position, la base dix, le nombre 0, les opérations implicites.

Savoir calculer pour savoir écrire et compter...

Pour comprendre l'écriture décimale de position, on doit comprendre l'addition (et la multiplication). Le travail de décomposition additive est donc essentiel pour comprendre les nombres, leur structure, leur écriture en chiffres. C'est l'enjeu des cycles 1, 2 et 3.

Le concept et ses représentations

Désignation du nombre par le langage :

Concrète : cailloux, doigts, etc..

Orale : comptine numérique, désignation des mot-nombres

Ecrite, 1/2 concrète ou abstraite : encoches, tallis, écritures symboliques (romaines, greques, babyloniennes, égyptiennes, arabes, chinoises, etc..)

Sans langage, pas d'étude possible des nombres.

La désignation efficace des nombres demande d'en comprendre les premières propriétés. Inversement, sans représentation efficace, l'approfondissement du concept est difficile... 2000 ans de travail, au moins !

Différents nombres pour différentes écritures

Comprendre les classes de nombres :

Chaque nouvelle classe de nombres répond à de nouvelles propriétés et donne lieu à une nouvelle forme d'écriture.

Les entiers permettent de dénombrer des collections finies.

Les décimaux permettent d'appréhender les mesures de quantité (en commerce notamment), il prennent un sens à partir des grandeurs continues.

Les rationnels permettent de représenter des rapports de mesures de grandeurs. Ils sont définis par leur écriture en fractions. Pour les grecs, ils n'ont pas d'unité. Bien que...

Les réels donnent un statut à π ou $\sqrt{2}$. Ils peuvent être représentés comme un prolongement de l'écriture décimale.

Les "nombres relatifs" jouent un rôle à part.. Pourquoi ?

Nombres de l'antiquité : statut, écriture.

Nombres entiers : -20 000 Os d'Ishango, premières encoches.

Calculs -3 000 : pour le commerce.

Nombres rationnels, fractions : -1800 (Papyrus de Rhind Egypte, Mésopotamie). -300 Euclide : Rapport de 2 nombres pour les grecs. Ce ne sont pas des nombres. (on attend le Xe s pour formaliser leur statut)

Nombres réels : vers -1800. $\sqrt{2}$, π (nombre d'or)

Le 0 : ...ce n'est pas rien !
vers -800 ? Chine, Inde, Amérique du Sud (fonction ordinale). Statut de nombre plus récent (7e, Brahmagupta, Inde).

Histoire récente des nombres : statut, écriture.

Nombres relatifs : 5e s en Inde utilisés pour le commerce (compatibles avec l'addition/soustraction). Statut de nombre vers le 16e s, compatibilité avec la multiplication. (Faux nombres selon l'Encyclopédie de D'Alembert)

Ecriture décimale de position : 9e s, Perse, Al Khwarizmi (inspiré du système indien)

Nombres et écriture décimale : 12e-16e s en Europe. (Fibonacci en Italie au 12e s à partir des travaux persans du 10e s, puis avec l'imprimerie). (système métrique : 1789)

Formalisme : Apparition des signes $+, -$ au 15e s ; $=$ au 16e s, $<, >$ au 17e s, suivi du signe $*$.
Notations ensemblistes $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ récentes (Bourbaki, 1950)

Constructions rigoureuses des nombres : fin du 19e siècle (Peano, Dedekind, Cantor)

L'écriture des nombres

Une écriture universelle...ou presque

L'écriture décimale de position s'est généralisée au XVe siècle, elle est utilisée dans l'immense majorité du monde actuel.

Variations mineures : cas de l'écriture anglo-saxone (écriture en "rompus", point, virgule, espace).

Un univers récent : l'informatique et l'utilisation de la base binaire.

Comprendre les écritures des nombres.

Un enjeu de la scolarité

Cycle 1 à 4 : 5 grandes étapes, toutes difficiles : numération de position décimale, rôle de la virgule, trait de fraction, les signes, l'écriture scientifique. Toutes sont liées à de nouvelles opérations sur les nombres et à de nouveaux nombres.

Cycle terminal : comprendre les différents ensembles de nombres et leurs liens : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$; approfondir leurs propriétés. Comprendre les différents statuts des lettres (variables, inconnues, paramètres)

Activités : l'écriture et la décomposition additive des nombres

Compter avec des abaques.

Compter en binaire (collège), codes barres, flash-codes.

Nombres entiers naturels :

Axiomes de Peano (fin du XIX^{e}s.)

L'ensemble $\mathbb{N}$ est l'intersection de tous les ensembles E vérifiant :

- $\emptyset \in E$ (qu'on appelle zéro, qu'on écrit 0)
- Principe de récurrence : si $n \in E$, alors $n \cup \{n\} \in E$ (c'est $n+1$). On l'appelle le successeur de n.

Propriétés :

- on définit une relation d'ordre total : $n < m$ signifie que m appartient à l'ensemble des successeurs de n
- on définit l'addition : pour tous entiers n et m, $n+m$ est égal au n^e successeur de m (par récurrence).

Conséquences :
Tout ensemble de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.
L'addition est associative et commutative.

L'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs

Idée de la construction des nombres relatifs :

L'ensemble des nombres relatifs permet de donner un cadre général pour réaliser les soustractions.
Il permet la résolution des équations affines de la forme $x + a = b$, pour tous nombres a et b entiers.

Propriétés :

$\mathbb{Z}$ possède une structure d'anneau ordonné dénombrable : on peut ajouter, soustraire, multiplier, comparer.
Tout nombre admet un unique successeur (tout ensemble fini admet un plus petit élément).

L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels

Idée de la construction des rationnels

L'ensemble des nombres rationnels permet de donner un cadre général pour réaliser les divisions par un nombre entier non nul.
Il permet la résolution des équations affines de la forme $ax = b$, pour tous nombres a et b entiers relatifs non nuls.

Propriétés :

- $\mathbb{Q}$ est un corps ordonné, archimédien, dénombrable :
  on peut ajouter, soustraire, multiplier, diviser, comparer.
- $\mathbb{Q}$ est sans point isolé* ; on peut toujours trouver un rationnel entre deux rationnels distincts. Il n'y a pas de successeur.

Activités :

Décomposition en fractions égyptiennes

**tous les ouverts non vides de $\mathbb{Q}$ contiennent une infinité de rationnels.*

L'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux :

Définition

L'ensemble des nombres décimaux est le sous-ensemble des rationnels associé aux fractions de dénominateurs les puissances de 10.

Propriétés :

- C'est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$: l'addition est stable et simple à réaliser (intérêt majeur pour la manipulation des nombres).
- $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{Q}$: entre deux nombres, on peut toujours trouver un décimal. Il n'y a donc pas de successeur.

Activités :

- Identifier les fractions décimales
- Quels sont les nombres "décimaux" en base 2 ?
- Expliquer les égalités : $1{,}3090909... = 1{,}3 + 9/990$ et $3{,}142857142857... = 3 + 142\,857/999\,999$.

L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels :

Idée de construction de $\mathbb{R}$ (Dedekind, 19e)

On peut le construire en généralisant l'écriture décimale : il “complète” l'ensemble des décimaux ou des rationnels ($\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$).
L'ensemble des nombres réels permet de traiter π et $\sqrt{2}$ comme des nombres.
Conséquence : $\mathbb{R}$ est un corps archimédien complet.

Propriétés :

- $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable (diagonale de Cantor).
- Les nombres décimaux sont les seuls nombres réels admettant 2 écritures décimales distinctes.
- Un nombre est rationnel ssi son développement décimal est ultimement périodique.
- Tout rationnel admet un développement ultimement périodique dans toute base.

Propriétés algébriques de $\mathbb{R}$

Sous-groupes réels

Les sous-groupes de $\mathbb{R}$ sont denses ou de la forme $\beta\mathbb{Z}$, pour $\beta \in \mathbb{R}$.
Conséquence : α est irrationnel ssi $lim_{n\to=\infty}(q_n\alpha - p_n) = 0$ pour une suite non constante de rationnels $(\frac{p_n}{q_n})_{n\geq 0}$.

Activité :

- Lemme de Dirichlet (principe des tiroirs) : $\liminf_{q\in\mathbb{N}} q\|q\alpha\| \leq 1$ pour tout réel α.
- Développement en fractions continues : caractériser les rationnels.
- Montrer que e est irrationnel. Comment le calculer ? avec quelle précision ?

Codages binaires et problèmes liés.

Stockage numérique flottant

Un nombre est stocké dans un espace de 32 ou 64 bits : dans Python, cet espace est décomposé en 3 parties : 1 bit pour le signe, 11 bits pour l'exposant, 52 bits pour la mantisse. Il y a un bit implicite.

Activités

- Taille des nombres représentés ? Quelle est la précision ?
- Cas des virgules "flottantes". Quels nombres décimaux sont stockés sans perte ? Etude du cas 0,2. Comment gérer les erreurs ?
- Comparaison des nombres, comment faire ?
- Opérations sur les entiers : addition des nombres positifs et négatifs ? Compléments à 1, à 2.

Séance 1, activités de groupe :

Analyse de textes et productions d'élèves (nombres entiers, nombres décimaux, rationnels) :

Analyser les copies d'élèves pour comprendre l'origine des difficultés liées au nombre, à son écriture, à ses propriétés.

Analyser les définitions des manuels en lien avec les concepts mis en jeu.

Analyser les extraits des documents didactiques proposés.

Construction d'activités de classe (nombres entiers, décimaux, rationnels)

Mobiliser les décompositions additives des nombres comprendre les nombres (résolution de problèmes de quantité, calcul réfléchi, lien avec le langage oral, etc..).

Introduire le nombre rationnel/et le nombre décimal.

Mettre en évidence les continuités (puis les ruptures) entre entiers et décimaux.

Eclaircir les relations fractions/ rationnels/décimaux.

Séance 2, activités de groupe :

Nombres négatifs

Comment sont introduits les entiers relatifs dans les manuels ? Critiquer les points positifs ou négatifs résultant de ces choix.

Mettre en évidence les ruptures entre entiers naturels et entiers relatifs. En particulier quelles sont les fonctions qui les distinguent ?

Analyser les activités proposées et proposer des stratégies possibles à présenter aux élèves pour surmonter les difficultés dues à l'introduction des nombres négatifs.

Comprendre le développement décimal et les problèmes de flottants.

Ecrire l'algorithme qui permet de déterminer l'écriture décimale de $\frac{1}{7}$. Expliciter la convergence de l'algorithme de la division euclidienne, et la périodicité de l'écriture.

Généraliser les résultats précédents.

Dans une fenêtre python, calculer $0,1 \times 3$. Qu'observe-t-on ? Déterminer le contenu du stockage en flottant du nombre 0,1 en python (64 bits). Comparer avec la valeur exacte donnée par le logiciel.

Bibliographie : Construction du nombre.

Anselmo, B., Rozanes, B., Zucchetta, H. (2017). *Construire des nouveaux nombres au Cycle 3 : fractions et décimaux*, At 15, Colloque des IREM, Poitiers.

Bloch, I. (2013) *Élèves en difficulté à l'entrée au collège : quels repères pour penser l'enseignement des mathématiques*, Petit x, 93, IREM de Grenoble.

Eduscol, Fractions et nombres décimaux au cycle 3 Document ressource MEN, 2016

Stella Baruk 1997. "Comptes pour petits et grands." Magnard

Jean-François Chesné etJean-Paul Fisher Connaissances des élèves dans le domaine du nombre Conférence de consensus sur la numération du CNESCO, novembre 2015

Michel Fayol Nombres et opérations premiers apprentissages à l'école primaire : Conférence de consensus sur la numération du CNESCO, novembre 2015.

Michel Fayol. Note de synthèse [Nombre, numération et dénombrement : que sait-on de leur acquisition ?], Revue française de pédagogie, volume 70, 1985. pp. 59-77

Frédéric Tempier Composer et décomposer : un révélateur de la compréhension de la numération chez les élèves IREM 2016

Bruno Villette, 1994,Des processus de quantification à la cardinalité, L'année Psychologique,1994, Vol 94-1, pp. 25-43.

et aussi Jean Piaget, Fuson (acquisition de la suite verbale), Guy Brousseau (les situations didactiques), Gérard Vergnaud (structures additives), Jean-Paul Fisher (sur l'écriture en miroir), Claire Margolinas (savoirs à la maternelle), etc..

Bibliographie : Histoires de nombres et de machines à calcul.

Les Nombres, secrets d'hier et d'aujourd'hui, Bibliothèque Tangente, HS n^o 33, Editions Pole.

Le zéro et le vide, Tangente sup n^{o}25, 10/2004

Mickaël Launay : Le grand roman des maths, de la préhistoire à nos jours, Flamarion.

Michel Waldschmidt : Mathématiques indiennes

Jean-Paul Delahaye, *Le fascinant nombre* π, Bibliothèque Pour La Science, Diffusion Belin, 1997

Site de Thérèse Eveilleau : Extractions de racines carrées

Sylvie Boldot Pourquoi mon ordinateur calcule-t-il faux ?

site Images des Maths

Perspectives historiques sur les abaques et bouliers. MathémaTICE (revue sésamaths)

Mycène : chiffres en linéaire B, Site CultureMATH.

Arnaud Gazagnes En chine ancienne : l'homme et son nombre (issu de documents IREM)