Feuille d'exercices 4

Théorème de Convergence Dominée

Correction 1.

1. **Vrai**. $\mathbb{Q}$ est dénombrable et les parties dénombrables sont négligeables.
2. **Vrai**. Par monotonie de l'intégrale, $0 \leq \int_B 1 \mathrm{d}\lambda \leq \int_A 1 \mathrm{d}\lambda = 0$ donc B est négligeable.
3. **Faux**. Par exemple pour la fonction f définie par $f(x) = e^{-x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a que $A_n = \left]-\infty, -\sqrt{\ln(n)}\right[\cup \left]\sqrt{\ln(n)}, +\infty\right[$ et aucune de ces parties n'est négligeable.
4. **Faux**. Contre exemple : $A = \mathbb{R}$ et f la fonction nulle.
5. **Vrai**. Comme f est positive et $\int_A f \mathrm{d}\lambda = 0$ alors, d'après un résultat du cours, $f\mathbb{1}_A = 0$ presque partout. Donc A est négligeable (car $f > 0$ sur A).
6. **Vrai**. Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $\epsilon > 0$. On montre que $(\mathbb{R} \setminus A) \cap]x-\epsilon, x+\epsilon[\neq \emptyset$. On a $\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{]x-\epsilon,x+\epsilon[} \mathrm{d}\lambda = 2\epsilon > 0$. Donc $]x-\epsilon, x+\epsilon[$ n'est pas contenu dans A. Donc $(\mathbb{R} \setminus A) \cap]x-\epsilon, x+\epsilon[\neq \emptyset$ et $\mathbb{R} \setminus A$ est dense dans $\mathbb{R}$.
7. **Faux**. Contre-exemple : $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. On a alors $\mathbb{R} \setminus A = \mathbb{Q}$ qui est dense dans $\mathbb{R}$ mais A n'est pas négligeable.
8. **Vrai**. En effet, $\{x \in \mathbb{R}, \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x) \neq 1\} = \mathbb{Q}$ est négligeable.
9. **Faux**. Contre exemple : $\mathbb{1}_{[0,1]}$, cette fonction est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ mais non continue en 0 et 1.
10. **Vrai**. Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $N = \{x \in \mathbb{R}, f(x) \neq g(x)\}$. Comme $\mathbb{R} \setminus N$ est dense dans $\mathbb{R}$ (voir 6), il existe (x_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R} \setminus N$ convergeant vers x. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(x_n) = g(x_n)$. En outre, par continuité de f et g, $(f(x_n))$ converge vers $f(x)$ et $(g(x_n))$ converge vers $g(x)$. Ainsi $f(x) = g(x)$. Donc $f = g$.

Correction 2.

1. Fixons $t \in [1, +\infty[$. La suite $\left(\frac{t}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$, donc, par continuité de la fonction $\cos^2$, on a que la limite de la suite $\left(\cos^2\left(\frac{t}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est égale à 1. D'où on a
$$\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{t^2 + \cos^2\left(\frac{t}{n}\right)} = \frac{1}{t^2+1} =: f(t)$$
Ainsi, la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $t \mapsto \frac{1}{t^2+1}$.
2. On a
$$0 \leq \cos^2\left(\frac{t}{n}\right)$$
pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [1, +\infty[$. Par conséquent,
$$0 \leq f_n(t) = \frac{1}{t^2 + \cos^2\left(\frac{t}{n}\right)} \leq \frac{1}{t^2}$$
pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [1, +\infty[$.

3. La suite (f_n) converge simplement vers f. De plus, les fonctions f_n sont dominées par $\frac{1}{t^2}$ qui est une fonction positive intégrable sur $[1,+\infty[$ (fonction de réference). Le théorème de convergence dominée s'applique donc à (f_n). On obtient que f est integrable, $I_n = \left(\int_{[1,+\infty[} f_n \mathrm{d}\lambda\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_{[1,+\infty[} f_n \mathrm{d}\lambda\right) = \int_{[1,+\infty[} f \mathrm{d}\lambda.$$

Par le théorème de convergence monotone (applicable car f est positive), on a

$$\int_{[1,+\infty[} f \mathrm{d}\lambda = \lim_{k\to+\infty} \int_{[1,k]} f \mathrm{d}\lambda.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_{[1,k]} f d\lambda = \int_{[1,k]} \frac{1}{t^2+1} \mathrm{d}(\lambda)t = \arctan(k) - \arctan(1) = \arctan(k) - \frac{\pi}{4}.$$

Comme $\lim_{k\to+\infty} \arctan(k) = \frac{\pi}{2}$, on déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_{[1,+\infty[} f_n \mathrm{d}\lambda\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Correction 3.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : [1,\infty[\to \mathbb{R}$ par $f_n(t) = e^{-t^n}$. Ces fonctions sont mesurables.

   Soit $t \in [1,\infty[$. Si $t > 1$, alors la suite $(t^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ a pour limite $+\infty$, et si $t = 1$ alors $t^n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On déduit que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers $e^{-1}\mathbb{1}_{\{1\}}$.

   On a, pour tout $t \in [1,+\infty[$, $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$t^n \geq t.$$
   Comme la fonction exponentielle est croissante, on obtient
   $$|e^{-t^n}| = e^{-t^n} \leq e^{-t}.$$
   La fonction $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (c'est une fonction de référence). Donc le théorème de convergence dominée s'applique à la suite (f_n). On en déduit que $e^{-1}\mathbb{1}_{\{1\}}$ est intégrable, que (I_n) converge et
   $$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_{[1,+\infty[} e^{-1}\mathbb{1}_{\{1\}} \mathrm{d}\lambda = e^{-1} \int_{[1,+\infty[} \mathbb{1}_{\{1\}} \mathrm{d}\lambda.$$
   Comme l'ensemble $\{1\}$ est negligable, l'intégrale $\int_{[1,+\infty[} \mathbb{1}_{\{1\}} \mathrm{d}\lambda = 0$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : [1,\infty[\to \mathbb{R}$ par $f_n(t) = \frac{t^2}{t^4+nt}$. Ces fonctions sont mesurables.

   Si $t \in [1,+\infty[$, alors, quand $n \to +\infty$, la suite $\left(\frac{t^2}{t^4+nt}\right)$ a pour limite 0. Donc la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.

   Comme, pour tout $t \geq 1$ et $n \in \mathbb{N}$, on a
   $$t^4 + nt \geq t^4$$
   on obtient
   $$0 \leq \frac{t^2}{t^4+nt} \leq \frac{t^2}{t^4} = \frac{1}{t^2}.$$
   La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est une fonction intégrable sur $[1,+\infty[$ (c'est une fonction intégrable de référence). Le théorème de convergence dominée donc s'applique à la suite de fonctions (f_n). On en obtient que (K_n) converge et
   $$\lim_{n\to+\infty} K_n = \int_{[1,+\infty[} 0 \, \mathrm{d}\lambda = 0.$$

Correction 4.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour pour $x \in \mathbb{R}$, on a $|f_n(x)| \leq \mathbb{1}_{]-1,1[}$ et $\mathbb{1}_{]-1,1[}$ est intégrable, donc f_n est intégrable.

2. Si $x \notin]-1,1[$, alors $f_n(x) = 0$ pour tout n. Donc $f_n(x)$ converge vers 0. Soit $x \in]-1,1[$. On a $\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| < 1$ si et seulement si $\sin\left(\frac{1}{x}\right) \neq \pm 1$, c'est à dire si et seulement si $\frac{1}{x} \notin \{\frac{2k+1}{2}\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, c'est à dire si et seulement si $x \notin \left\{\frac{2}{(2k+1)\pi}, k \in \mathbb{Z}\right\}$. Donc $N = \left\{\frac{2}{(2k+1)\pi}, k \in \mathbb{Z}\right\}$. Comme $\mathbb{Z}$ est dénombrable, N est également dénombrable et donc négligeable. Si $x \notin N$, alors $|\sin(\frac{1}{x})| < 1$. Donc $f_n(x) \to 0$.

3. On applique le théorème de convergence dominée (version avec presque partout) à la suite (f_n).

   - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n(x)| \leq \mathbb{1}_{]-1,1[}$ avec $\mathbb{1}_{]-1,1[}$ intégrable.
   - La suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle presque partout.

   Par conséquent la suite $\left(\int_{\mathbb{R}} f_n \mathrm{d}\lambda\right)$ converge vers $\int_{\mathbb{R}} 0 \mathrm{d}\lambda = 0$.

Correction 5.

1. On reconnaît ici une moyenne de Cesàro continue. On se doute alors que la limite existe et sera égale à l. On commence par faire un changement de variable. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on fait le changement de variable C^1 : $t = nx$. Alors,
$$\int_{[0,n]} f(t) d\lambda(t) = n \int_{[0,1]} f(nx) d\lambda(x).$$
   Il faut donc montrer que $\int_{[0,1]} f(nx) d\lambda(x)$ converge vers l lorsque $n \to +\infty$. On vérifie les hypothèses du théorème de convergence dominée avec la suite de fonction mesurables $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, où $g_n : x \mapsto f(nx)$.

   - La fonction f est continue et converge vers un réel l en $+\infty$, elle est donc bornée. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \geq 0$, $|g_n(x)| \leq \|f\|_\infty$, et $x \mapsto \|f\|_\infty$ est intégrable sur $[0,1]$.
   - La suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement presque partout sur $[0, +\infty[$ vers la fonction constante égale à l ($f(nx) \to l$ pour tout $x > 0$).

   Ainsi,
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \int_{[0,n]} f(t) d\lambda(t) = \lim_{n \to +\infty} \int_{[0,1]} g_n(x) d\lambda(x) = \int_{[0,1]} l d\lambda(x) = l.$$

2. On note $M < +\infty$ le supremum de f sur $[0, +\infty[$. On ne peut pas utiliser directement le théorème de convergence dominée : il est impossible de majorer $t \mapsto nf(t)e^{-nt}$ par une fonction intégrable indépendante de n. On commence par faire le changement de variable C^1 : $t = x/n$, pour $n \geq 1$. On a alors
$$\int_{[0,+\infty[} nf(t)e^{-nt} d\lambda(t) = \int_{[0,+\infty[} f\left(\frac{x}{n}\right) e^{-x} d\lambda(x).$$
   On note $g_n : x \in [0, +\infty[\mapsto f(x/n)e^{-x}$, g_n est mesurable. On vérifie les hypothèses du théorème de convergence dominée.

   - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, +\infty[$, $|g_n(x)| \leq Me^{-x}$, et $x \mapsto Me^{-x}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ (fonction de référence).
   - La fonction f est continue, donc la suite de fonctions $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement vers $x \mapsto f(0)e^{-x}$.

   On a donc
$$\lim_{n \to +\infty} \int_{[0,+\infty[} nf(t)e^{-nt} d\lambda(t) = \lim_{n \to +\infty} \int_{[0,+\infty[} f\left(\frac{x}{n}\right) e^{-x} d\lambda(x) = \int_{[0,+\infty[} f(0)e^{-x} d\lambda(x) = f(0).$$

Correction 6.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout réel x, on a $|g_n(x)| \leq |f(x)|$. Or la fonction f est par hypothèse intégrable, donc les fonctions g_n sont intégrables.
2. On va utiliser le théorème de convergence dominée. L'hypothèse de domination est immédiate, c'est la question 1. On vérifie l'hypothèse de converge. La fonction f peut prendre pour valeur $\pm\infty$, et par conséquent les fonctions g_n aussi. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \in \mathbb{R}$. Alors, il est clair que $g_n(x) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. Or, f est intégrable, donc on sait que f est finie presque partout, autrement dit l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} : |f(x)| = +\infty\}$ est négligeable. Ainsi, la suite $(g_n)_n$ converge presque partout vers la fonction nulle. Par conséquent,
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

Correction 7.

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. On a $a + bk - 1 > -1$ donc la fonction est intégrable. Le calcul de cette intégrale a été fait de l'exercice 2 de la feuille de TD 3. On obtient
$$I_k = \int_{]0,1[} x^{a-1}x^{bk}\mathrm{d}\lambda(x) = \frac{1}{a+bk}.$$
2. (a) Soit $x \in]0,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a (on reconnait la somme des premiers termes d'une suite géométrique)
$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{a-1}x^{bk} = x^{a-1}\sum_{k=0}^{n}(-x^b)^k = x^{a-1}\frac{1-(-x^b)^{n+1}}{1+x^b}.$$
En passant à la limite, on obtient
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{x^{a-1}}{1+x^b} = f(x).$$
Donc (f_n) converge simplement vers f.

   (b) Soit $x \in]0,1[$. On a
$$f_n(x) = x^{a-1}\sum_{k=0}^{n}(-x^b)^k = x^{a-1} + x^{a-1}\sum_{k=1}^{n}(-x^b)^k.$$
Or, si on regroupe les termes deux par deux, on contrôle les signes, plus précisément
$$-x^{(2k+1)b} + x^{(2k+2)b} = -x^{(2k+1)b}(1-x^b) < 0$$
$$x^{2kb} - x^{(2k+1)b} = x^{2kb}(1-x^b) > 0$$
Par conséquent, si $n = 2l$, on obtient
$$0 \leq x^{a-1}\left(\sum_{k=0}^{l-1} x^{2kb} - x^{(2k+1)b}\right) + x^{a-1}x^{2lb} = f_{2l}(x)$$
$$f_{2l}(x) = x^{a-1} + x^{a-1}\left(\sum_{k=0}^{l-1} -x^{(2k+1)b} + x^{(2k+2)b}\right) \leq x^{a-1}.$$
Si maintenant $n = 2l+1$, on obtient
$$0 \leq x^{a-1}\left(\sum_{k=0}^{l} x^{2kb} - x^{(2k+1)b}\right) = f_{2l+1}(x)$$
$$f_{2l+1}(x) = x^{a-1} + x^{a-1}\left(\sum_{k=0}^{l} -x^{(2k+1)b} + x^{(2k+2)b}\right) - x^{a-1}x^{(2l+1)b} \leq x^{a-1}.$$
Dans tous les cas, on obtient l'inégalité voulue.

(c) Comme $a > 0$, on a $a - 1 > 1$. La fonction $x \mapsto x^{a-1}$ est donc intégrable sur $]0, 1[$ (c'est une fonction intégrable de référence).

3. On applique le théorème de convergence dominée à la suite (f_n).

   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est mesurable. Pour tout $x \in]0, 1[$, on a $|f_n(x)| < x^{a-1}$ et $x \mapsto x^{a-1}$ est intégrable sur $]0, 1[$ (en particulier (f_n) est intégrable sur $]0, 1[$).
   - La suite (f_n) converge simplement vers f sur $]0, 1[$.

   Par conséquent la suite $\left(\int_{]0,1[} f_n \mathrm{d}\lambda\right)$ converge vers $\int_{]0,1[} f \mathrm{d}\lambda$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a (par linéarité de l'intégrale et par la question 1.)

$$\int_{]0,1[} f_n \mathrm{d}\lambda = \sum_{k=0}^{n} \int_{]0,1[} (-1)^k x^{a-1} x^{bk} \mathrm{d}\lambda(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{a + bk}$$

   Ainsi

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a + bk} = \int_{]0,1[} f \mathrm{d}\lambda = \int_{]0,1[} \frac{x^{a-1}}{1 + x^b} \mathrm{d}\lambda(x) = \int_{]0,1]} \frac{x^{a-1}}{1 + x^b} \mathrm{d}\lambda(x).$$