Université Paris-Saclay **Intégration LDD3 MBEIP**
L3 DD **2024–2025**

Feuille d'exercices 4 : Théorème de Convergence Dominée

Exercice 1. Vrai ou Faux (justifier à l'aide d'une preuve ou d'un contre-exemple) ?

1. $\mathbb{Q}$ est une partie négligeable de $\mathbb{R}$.
2. Si A est négligeable et si $B \subset A$ est mesurable alors B est négligeable.
3. Soit $f : \mathbb{R} \to]0, \infty[$ une fonction mesurable. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $A_n = \{x \in \mathbb{R}, |f(x)| < 1/n\}$. Alors A_n est négligeable pour tout n assez grand.
4. Soit $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ mesurable. Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie mesurable. Si $\int_A f \mathrm{d}\lambda = 0$ alors A est négligeable.
5. Soit $f : \mathbb{R} \to]0, \infty]$ mesurable. Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie mesurable. Si $\int_A f \mathrm{d}\lambda = 0$ alors A est négligeable.
   Indication. On rappelle que $\int_A f \mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}} f \mathbb{1}_A \mathrm{d}\lambda$.
6. Soit A une partie négligeable alors $\mathbb{R} \setminus A$ est dense dans $\mathbb{R}$.
7. Soit A une partie mesurable de $\mathbb{R}$. Si $\mathbb{R} \setminus A$ est dense alors A est négligeable.
8. On a $\mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} = 1$ presque partout.
9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si f est continue presque partout alors f est continue.
10. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Si $f = g$ presque partout alors $f = g$.
    Indication. On pourra utiliser 6.

Exercice 2. (Convergence dominée)
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $f_n : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(t) = \frac{1}{t^2 + \cos^2\left(\frac{t}{n}\right)}.$$

1. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers une fonction $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ que l'on déterminera.
2. Montrer que $0 \leq f_n(t) \leq \frac{1}{t^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \geq 1$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_{[1,+\infty[} f_n d\lambda$. Montrer que (I_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 3. (Convergence dominée)

1. La suite (I_n) définie par $I_n = \int_{[1,+\infty[} e^{-t^n} d\lambda(t)$ admet-elle une limite ? Si oui la déterminer.
2. La suite (K_n) définie par $K_n = \int_{[1,+\infty[} \frac{t^2}{t^4+nt} d\lambda(t)$ admet-elle une limite ? Si oui la déterminer.

Exercice 4. Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $0 < |x| < 1$ par $f_n(x) = (\sin(\frac{1}{x}))^n$, et par $f_n(x) = 0$ sinon.

1. Montrer que chacune des fonctions f_n (pour $n \in \mathbb{N}$) est intégrable.
2. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers 0 en dehors d'un ensemble négligeable $N \subset \mathbb{R}$ que l'on explicitera.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda$. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge lorsque $n \to \infty$, et identifier sa limite.

Exercice 5. (Convergence dominée) Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. On suppose que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$. Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \int_{[0,n]} f(t) d\lambda(t).$$

2. On suppose que f est bornée et que $f \geq 0$. Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,+\infty[} n f(t) e^{-nt} d\lambda(t).$$

Exercice 6. (Convergence dominée presque partout) Soit $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-nx^2} f(x)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est intégrable sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier la convergence de la suite de terme général

$$u_n := \int_{[0,1]} g_n d\lambda.$$

Exercice 7. (Convergence dominée pour les séries de fonctions)
Soient a et b deux réels strictement positifs.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer

$$I_k = \int_{]0,1[} x^{a-1} x^{bk} \mathrm{d}\lambda(x).$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère $f_n :]0,1[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{a-1} x^{bk}.$$

   (a) Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $]0,1[$ vers la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x^{a-1}}{1 + x^b}$$

   pour tout $x \in]0,1[$.

   (b) Montrer que pour tout $x \in]0,1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|f_n(x)| \leq x^{a-1}$.
   On pourra remarquer que la série est alternée.

   (c) La fonction $x \mapsto x^{a-1}$ est-elle intégrable sur $]0,1[$?

3. Montrer que

$$\int_{]0,1[} \frac{x^{a-1}}{1+x^b} \mathrm{d}\lambda(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{kb+a} \cdot$$

EXERCICES BONUS

Exercice 8. (Avec, ou sans le théorème de convergence dominée)
Retrouver le résultat de l'exercice 4 en utilisant intégration par parties.

Exercice 9. (Contre-exemple au théorème de convergence dominée). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-nx} - 2e^{-2nx}$.

1. Calculer
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{[0,\infty[} f_n(x) d\lambda(x)$$
et
$$\int_{[0,+\infty[} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right) d\lambda(x).$$

2. Expliquer le résultat obtenu.