Université Paris-Saclay **MDD201 – Analyse et Convergence**
Année 2024–2025

Feuille 3 : Séries Entières

Exercice 1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}\, x^n$

b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{3^n+1}\, x^{2n+1}$

c) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (2^n - n)\, x^n$

d) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\tan\left(\frac{1}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) x^n$

e) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} e^{-n^2} x^n$

f) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^{2n}$

Exercice 2. On suppose que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 et que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n$ diverge. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

Exercice 3. Soit $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R_1 > 0$.
Déterminer le rayon de convergence R_2 de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n x^{2n}$.

Exercice 4. Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière et le domaine de définition de f.
2. Calculer f' sur l'intervalle $]-R, R[$.
3. En déduire une expression de $f(x)$ pour tout $x \in\,]-R, R[$.

Exercice 5. Déterminer le rayon de convergence R, puis la somme sur $]-R, R[$ des séries entières suivantes :

$$a(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n3^n} x^n \qquad b(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{n+2}{n+1} x^n \qquad c(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{n-1}{n!} x^n.$$

Exercice 6. On considère, pour tout $n \geq 1$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} x^{2n+1}$$

On pose $f = \sum_{n \geq 1} f_n$.

1. Calculer le rayon de convergence R de cette série entière et le domaine de définition de la fonction f.
2. Montrer que pour tout $x \in \left]-R, R\right[$, on a $f'(x) = \ln(1 + x^2)$.
3. En déduire l'égalité

$$f(x) = x \ln(x^2 + 1) + 2 \arctan x - 2x$$

   pour tout $x \in \left]-R, R\right[$.
4. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur $[-1, 1]$.
5. En déduire l'égalité

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} = \lim_{x \to 1^-} f(x)$$

   Puis calculer cette somme.

Exercice 7. Pour chacune des fonctions suivantes, trouver un intervalle $]-a, a[$ sur lequel elle est développable en série entière et donner ce développement.

a) $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x-2)}$ b) $f(x) = \dfrac{1}{(x-7)^3}$ c) $f(x) = \sin^2(x)$

d) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$ e) $f(x) = \arctan(x)$ f) $f(x) = \dfrac{1}{1 + x + x^2}$

Indication pour f) : on pourra voir $1 + x + x^2$ comme la somme de termes d'une suite géométrique.

Exercice 8. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

Montrer que f se prolonge en une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9. On cherche à résoudre l'équation différentielle :

$$(E) \quad xy''(x) + 2y'(x) + xy(x) = 0.$$

avec la condition initiale $y(0) = 1$.
On en cherche une solution sous la forme d'une série entière inconnue $y(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$.

1. Que vaut a_0 ? Montrer que les conditions nécessaires et suffisantes sur les coefficients a_n pour que y soit solution de (E) sur $]-R, R[$ sont

$$a_1 = 0 \quad \text{et} \quad (n+1)(n+2)a_{n+1} + a_{n-1} = 0 \ , \ \text{pour tout} \quad n \geq 1$$

2. Que peut-on dire des coefficients a_{2k+1}, pour tout $k \geq 0$?
   Montrer par récurrence que, pour tout $k \geq 0$, on a $a_{2k} = \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!}$.
3. Calculer R et déterminer la fonction y.

Exercice 10. On considère les polynômes $P_n \ : \ x \to \sum_{k\geq 0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}$. On fixe $A > 0$.
Montrer que pour n suffisamment grand, P_n n'a pas de racine dans $[-A, A\,]$.

Exercice 11. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} \dfrac{x^n}{(2n)!}$.
Calculer sa somme.

Exercice 12. Montrer que la fonction $x \to \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin(x)}$ se prolonge en une fonction C^∞ sur l'intervalle $]-\pi, \pi\,[$.

Programme de travail

Nous consacrerons trois TD à cette feuille, voici un programme à titre indicatif :

- **Séance 1 :** On travaillera sur la notion de rayon de convergence (exercices 1 à 3) et le calcul de sommes de séries entières (exercices 4 et 5).
- **Séance 2 :** On traitera **l'exercice 6**, puis on cherchera le développement en série entière au voisinage de 0 d'une fonction (exercices 7 et 8).
- **Séance 3 :** Après l'incontournable **exercice 9**, on pourra revenir sur les exercices précédents ou bien travailler les suivants...

Vous trouverez au verso quelques exercices supplémentaires.

Exercices supplémentaires

Exercice 13.

A. Soient $f = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et $g = \sum_{n\geq 0} b_n x^n$ deux séries entières.

On appelle produit de Cauchy de f et g la série entière $h = \sum_{n\geq 0} c_n x^n$ donnée par

$$c_n = \sum_{p=0}^{n} a_p b_{n-p}$$

On note R_f (respectivement R_g et R_h) le rayon de f (respectivement g et h).
On suppose $R_f > 0$ et $R_g > 0$.

1. Montrer que $R_h \geq \min(R_f, R_g)$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < \min(R_f, R_g)$, on a

$$h(x) = f(x)g(x).$$

B. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note d_n le nombre de permutations de $\{1, \ldots, n\}$ qui ne possèdent aucun point fixe (on dit que ces permutations sont des dérangements). On pose $d_0 = 1$.

1. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k} = n!$.

   Indication : On pourra dénombrer les permutations de $\{1, \ldots, n\}$ qui possèdent exactement k points fixes où $0 \leq k \leq n$.

2. On introduit la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{d_n}{n!} x^n$.

   Montrer que son rayon de convergence est supérieur ou égale à 1 et que

$$e^x \sum_{n\geq 0} \frac{d_n}{n!} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{pour} \quad |x| < 1$$

3. En déduire une expression de d_n en fonction de n et la limite de $\frac{d_n}{n!}$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 14.

Soit $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ une série entière avec rayon de convergence $R > 0$.

On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $c_k \neq 0$.

Prouver qu'il existe $\delta \in]0, R]$ tel que si $0 < |x| < \delta$ alors $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \neq 0$.