Questions pour le Test 2

1. Déterminer le rayon de convergence des séries entiéres suivantes:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{3^n} \quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n} \quad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n} \quad d)\ \sum_{n=1}^{\infty} (\sin n) x^n$$

2. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Que peut-on dire de R si la série $\sum a_n x_0^n$ converge ?

3. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Que peut-on dire de R si la série $\sum a_n x_0^n$ diverge ?

4. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R. Supposons que (a_n) tend vers zéro. Montrer que $R \geq 1$.

5. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R. Supposons que $\sum (-1)^n a_n$ diverge. Montrer que $R \leq 1$.

6. Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons de convergence R_a et R_b respectivement. Montrer que si $|a_n| \sim |b_n|$ alors $R_a = R_b$.

7. Développer les fonctions suivantes en séries entières, et préciser leur rayon de convergence.

$$a)\ x \to \ln\left((2-x)(3-x)\right) \quad b)\ x \to \int_0^1 t^2 \sin(tx)\, dt \quad c)\ x \to \ln(1+x^2)$$

8. Soit $\sum_{n=1}^{\infty} u_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R = 1$. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ est-elle nécessairement convergente?

9. Soit $\sum_{n=1}^{\infty} u_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R = 1$. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$ est-elle nécessairement convergente?

10. Soit $\sum_{n=1}^{\infty} u_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R = 1$. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} u_n$ est-elle nécessairement convergente?

11. Soit $\sum_{n=1}^{\infty} u_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R = 1$. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} u_n$ est-elle nécessairement convergente?

12. Donner un exemple de série entière de rayon de convergence $R = 0$ et puis un exemple pour $R = +\infty$.

13. Déterminer pour chacune des séries suivantes son rayon de convergence et la valeur de sa somme:

$$a)\ \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n \quad b)\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{4^n} \quad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} \quad d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!}$$

14. Calculer les deux dérivées partielles des fonctions suivantes (quand elles existent):

$$f_1(x,y) = \sqrt{1+xy}, \quad f_2(x,y) = e^{x+y}\sin(x-y), \quad f_3(x,y) = \sin(1-x^2-y^2).$$

15. Pour les fonctions suivantes, calculer les dérivées partielles,

$$f_1(x,y) = x\tan y \qquad f_2(x,y) = \arctan(x+xy) \qquad f_3(x,y) = 1 - x + 9y + xy + x^2 + y^2$$

16. Les fonctions suivantes sont elles continues sur $\mathbb{R}^2$?
a) $f_1(x,t) = \frac{x(x-t^2)+t^2}{x^2+t^2}$ si $(x,t) \neq (0,0)$, et $f_1(0,0) = 1$; b) $f_2(x,t) = \frac{xy^3}{x^4+t^4}$ si $(x,t) \neq (0,0)$, et $f_2(0,0) = 0$.