Sujet B.

L'exercice 2 débute par "le sous-ensemble de R^3..."

Exercice 1.
question 1. B dit à A : si vous livrez votre produit avant Décembre, alors je l'achète , C dit à A : si : B achète votre produit et je réussis mon augmentation de capital alors : j'achète votre produit

A livre le produit avant Décembre est donc une condition suffisante pour que B l'achète. Donc B achète le produit est une condition nécessaire pour affirmer que A livre le produit.

(B achète le produit et C réussit son augmentation de capital) est une condition suffisante pour que C achète le produit.

(1) Correcte. B n'a pas acheté le produit. La condition nécessaire n'est pas réalisée. Cela suffit pour affirmer que l'autre condition n'est pas réalisée.
(2) Incorrecte. B a acheté le produit, une condition nécessaire est satisfaite, mais elle ne suffit pas pour affirmer que l'autre condition l'est aussi.
(3) Incorrecte. C n'a pas acheté le produit la condition nécessaire n'est pas satisfaite, donc la condition suffisante ne l'est pas non plus, mais on ne sait pas si c'est B qui n'a pas acheté le produit ou C qui n'a pas réalisé son augmentation de capital.
(4) Incorrect. La condition suffisante n'est pas satisfaite, on ne peut rien en déduire sur la condition nécessaire.
(5) Correct. Cela exprime que B achète le produit est une condition nécessaire à A livre avant Décembre. C'est ce qu'indique l'énoncé.
(6) Incorrect. Cette phrase indique que A livre avant Décembre serait une condition nécessaire pour que B achète le produit. Cela ne correspond pas à l'énoncé.

Exercice 2.
Question 2. Notons C l'ensemble indiqué par l'énoncé : $C = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3; y - 3z = 0\}$

(1) C n'est pas vide : $0 - 3 \times 0 = 0$ donc $(0;0;0) \in C$ donc C n'est pas vide.
(2) Cest-il stable par la somme ?
Pour tous vecteurs $u = (x;y;z)$, $u' = (x';y';z')$ de C, $u + u' = (x;y;z) + (x';y';z')$
$u + u' = (x + x'; y + y'; z + z')$.
D'autre part $y + y' - 3(z + z') = y + y' - 3z - 3z' = y - 3z\ +\ y' - 3z'$.
Or $y - 3z = 0$ car u appartient à C et $y' - 3z' = 0$ car u' appartient à C .
D'où $y + y' - 3(z + z') = 0$ d'où $u + u'$ appartient à C. Donc C est stable par l'opération $+$.
(3) C est-il stable par le produit ?
Pour tout vecteur $u = (x;y;z)$ de C et tout nombre b de $\mathbb{R}$,
$bu = (bx;\ by;\ bz)$. D'autre part $by - 3bz = b(y - 3z) = b \times 0$ car $y - 3z = 0$ car u appartient à C. D'où $by - 3z$
Donc C est stable par le produit.

D'après (1), (2) et (3), C est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3.
Question 3. Notons B le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$défini ainsi : $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x \times z = 0$.
(1;1;0) appartient à B car $1 \times 0 = 0$, (0;1;1) appartient à B car $1 \times 0 = 0$,
d'autre part (0;1;1) appartient à B car $0 \times 1 = 0$.
Mais (1;1;0)+(0;1;1) = (1;2;1) n'appartient pas à B car $1 \times 1 \neq 0$.
D'où B n'est pas stable par l'addition, donc B n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4.
Question 4. Posons $f(x) = x\sqrt{x}$ pour tout x de $[0; +\infty[$. Alors $\lim_{x \to 1}(\frac{x\sqrt{x} - 1\sqrt{1}}{x-1}) = \lim_{x \to 1}(\frac{f(x) - f(1)}{x-1}) = f'(1)$.

Il reste à évaluer $f'(1)$.

Pour tout x de $]0; +\infty[$ $f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ – Il était possible aussi d'écrire $f(x) = x\sqrt{x} = x^1 \times x^{1/2} = x^{3/2}$, d'où $f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$– .
D'où $f'(1) = \frac{3}{2}\sqrt{1} = \frac{3}{2}$.

Exercice 5.

Question 5. Voici deux réponses possibles à cette question.

(1) Pour tout vecteur v de $\mathbb{R}^3$ combinaison linéaire de (-2;1;1) et (2;2;1) il existe 2 nombres a et b satisfaisant à $v = a(-2;1;1) + b(2;2;1) = (-2a+2b; a+2b; a+b)$. Donc $(-2a+2b) - 4(a+2b) + 6(a+b) = -2a + 2b - 4a - 8b + 6a + -b = 0a + 0b = 0$. Donc v appartient à A. Ce qu'il fallait démontrer.

(2) Il était possible aussi de vérifier que $-2 - 4 \times 1 + 6 \times 1 = 0$ et $2 - 4 \times 2 + 6 \times 1 = 0$, d'où u et v appartiennent à A, et de rappeler que A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$d'après l'énoncé, donc A est stable par combinaison linéaire, donc toute combinaison linéaire de u et v appartient à A .

Question 6. Pour tout vecteur v= $(x;y;z)$ de A, cherchons deux nombres a et b solutions de l'équation (E): $v = a(-2;1;1) + b(2;2;1)$.

$(E) \Leftrightarrow (x;y;z) = (-2a+2b; a+2b; a+b)$, d'où

$(E) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} -2a & + & 2b & = & x & (L1) \\ a & + & 2b & = & y & (L2) \\ a & + & b & = & z & (L3) \end{array}\right.$, système de 3 équations à 2 inconnues a et b.

D'où : $(E) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccc} -2a & + & 2b & = & x & (L'1):(L1) \\ & & 6b & = & 2y+x & (L'2):2(L2)+(L1) \\ & & 4b & = & 2z+x & (L'3):2(L3)+(L1) \end{array}\right.$, on a conservé (L1) et on l'a uitilisé pour éliminer x dans les autres équations.

D'où : $(E) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccc} -2a & + & 2b & = & x & (L1) \\ & & 6b & = & 2y+x & (L'2) \\ & & 0b & = & 12z+2x-8y & 6(L'3)-4(L'2) \end{array}\right.$

Pour que ce système ait des solutions a et b, il est nécessaire que $2x - 8y + 12z = 0$, ce qui est équivalent à $x - 4y + 6z$= 0 – en divisant les deux membres de l'égalité par le même nombre 2 –. Il est donc nécessaire que v appartienne à A.

Exercice 6.

Question 7. Définissons une fonction f ainsi : pour tout x de $\mathbb{R}$ $f(x) = 2 + x^3$. $f$est définie et dérivable sur tout $\mathbb{R}$, avec pour tout x de $\mathbb{R}$:$f'(x)$= $3x^2$. En particulier$f(3) = 2+3^3 = 29$ et $f'(3) = 3\times 3^2 = 27$.

L'équation de la tangente T_3 à la courbe C au point d'abscisse 3 est :

$M(x;y)$ appartient à T_3si et seulement si $y = f'(3) \times (x-3) + f(3) = 27(x-3) + 29 = 27x - 52$.

Question 8. Si $M(x;y)$ est un point de la courbe C alors$y = 2 + x^3$, C admet au point M une droite tangente T de coefficient directeur $f'(x) = 3x^2$. Cette tangente est parallèle à D si et seulement si elle a le même coefficient directeur, d'où:

$T\, parall\grave{e}le\, \grave{a}\, D$ si et seulement si $3x^2 = 12$. D'où

$T\, parall\grave{e}le\, \grave{a}\, D$ si et seulement si $x^2 = 12/3 = 4$. D'où

$T\, parall\grave{e}le\, \grave{a}\, D$ si et seulement si $(x = \sqrt{4} = 2)\, ou\, (x = -\sqrt{4} = -2)$.

Il y a 2 points de la courbe où la tangente à la courbe est parallèle à D. Les points de coordonnées (2;10) et (-2; -6).

Exercice 7.

Question 9. $S \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccc} -x & +2y & +2z & = & 1 & (L1) \\ 2x & -6y & -z & = & 11 & (L2) \\ 3x & +4y & +3z & = & 4 & (L3) \end{array}\right.$ conservons (L1) et utilisons-là pour éliminer x dans les autres équations

$S \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccc} -x & +2y & +2z & = & 1 & (L'1):(L1) \\ & -2y & +3z & = & 13 & (L'2):2(L1)+(L2) \\ & 10y & +9z & = & 7 & (L'3):3(L1)+(L3) \end{array}\right.$ conservons (L1) et (L'2) et utilisons (L'2) pour éliminer y dans l'équation suivante.

$S \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccc} -x & +2y & +2z & = & 1 & (L''1):(L1) \\ & -2y & +3z & = & 13 & (L''2):(L'2) \\ & & 48z & = & 144 & (L''3):10(L1)+2(L3) \end{array}\right.$ il y a donc une, seule, solution :

$S \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccll} x & = & \frac{1-2y-2z}{-1} = \frac{1-2(-2)-2(3)}{-1} = 1 & (L'''1)\, d'apr\grave{e}s\, (L'''2)\, et\, (L1) \\ y & = & \frac{13-3z}{-2} = \frac{4}{-2} = -2 & (L'''2)\, d'apr\grave{e}s\, (L''2)\, et\, (L'''3) \\ z & = & 144/48 = 3 & (L'''3)\, d'apr\grave{e}s\, (L''3) \end{array}\right.$ on a résolu la 3ème équation, puis la 2nde, puis la 1ère.

Question 10. Notons cette équation (E).

$(E) \Leftrightarrow (2a - b + 2c; -3a + 2b - 4c; -a + b - 2c) = (-6; 10; 1)$ d'où

$S \Leftrightarrow \begin{cases} 2a & -b & +2c & = & -6 & (L1) \\ -3a & +2b & -4c & = & 10 & (L2) \\ -a & +b & -2c & = & 1 & (L3) \end{cases}$ conservons (L1) et utilisons la pour éliminer a dans les équations suivantes

$S \Leftrightarrow \begin{cases} 2a & -b & +2c & = & -6 & (L'1) : (L1) \\ & b & -2c & = & 2 & (L'2) : 2(L2) + 3(L1) \\ & b & -2c & = & -4 & (L'3) : 2(L3) + (L1) \end{cases}$ on peut ici s'apercevoir que les lignes (L'2) et (L'3) sont contradictoires. Mais dans le cas où on ne s'en serait pas aperçu, on peut poursuivre la méthode, en conservant (L1) et (L'2) et en utilisant (L'2) pour éliminer b dans l'équation suivante.

$S \Leftrightarrow \begin{cases} 2a & -b & +2c & = & -6 & (L''1) : (L1) \\ & b & -2c & = & 2 & (L''2) : (L'2) \\ & 0b & +0c & = & -6 & (L''3) : (L'3) - (L'2) \end{cases}$ Il apparaît à la ligne (L"3) qu'il n'y a aucune solution.