Sujet A.

L'exercice 2 débute par "on se place dans le plan..."

Exercice 1.

question 1. B dit à A : si vous livrez votre produit avant Décembre, alors je l'achète , C dit à A : si : B achète votre produit et je réussis mon augmentation de capital alors : j'achète votre produit

A livre le produit avant Décembre est donc une condition suffisante pour que B l'achète. Donc B achète le produit est une condition nécessaire pour affirmer que A livre le produit.

(B achète le produit et C réussit son augmentation de capital) est une condition suffisante pour que C achète le produit.

(1) Incorrecte. B a acheté le produit. La condition nécessaire est réalisée. Mais elle n'est pas suffisante pour affirmer que l'autre condition est réalisée.
(2) Correcte. B n'a pas acheté le produit, une condition nécessaire n'est pas satisfaite, donc la condition suffisante ne l'est pas non plus.
(3) Incorrect. La condition suffisante n'est pas satisfaite, on ne peut rien en déduire sur la condition nécessaire.
(4) Incorrecte. C n'a pas acheté le produit, la condition nécessaire à (B achète le produit à A et C réussit son augmentation de capital) n'est pas satisfaite, on ne sait pas si la condition suffisante est, ou n'est pas, satisfaite.
(5) Incorrect. Cela exprime que A livre avant Décembre est une condition nécessaire à B achète le produit. On ne peut pas l'affirmer, on sait seulement que c'est une condition suffisante.
(6) Correct. B achète le produit est une condition nécessaire pour affirmer que A livre le produit avant Décembre.

Exercice 2.

Question 2. Définissons une fonction f ainsi : pour tout x de $\mathbb{R}$ $f(x) = 2 + x^3$. $f$est définie et dérivable sur tout $\mathbb{R}$, avec pour tout x de $\mathbb{R}$:$f'(x)$= $3x^2$. En particulier$f(-1) = 2 + (-1)^3 = 1$ et $f'(-1) = 3 \times (-1)^2 = 3$.

L'équation de la tangente T_{-1} à la courbe C au point d'abscisse -1 est :

$M(x; y)$ appartient à T_{-1}si et seulement si $y = f'(-1) \times (x - (-1)) + f(-1) = 3(x + 1) + 3 = 3x + 4$
.

Question 3. Si $M(x; y)$ est un point de la courbe C alors$y = 2 + x^3$, C admet au point M une droite tangente T de coefficient directeur $f'(x) = 3x^2$. Cette tangente est parallèle à D si et seulement si elle a le même coefficient directeur, d'où:

$T\, parall\grave{e}le\, \grave{a}\, D$ si et seulement si $3x^2 = 6$. D'où

$T\, parall\grave{e}le\, \grave{a}\, D$ si et seulement si $x^2 = 6/3 = 2$. D'où

$T\, parall\grave{e}le\, \grave{a}\, D$ si et seulement si $(x = \sqrt{2})\, ou\, (x = -\sqrt{2})$.

Il y a 2 points de la courbe où la tangente à la courbe est parallèle à D. Les points de coordonnées ($\sqrt{2}$; 2+2$\sqrt{2}$) et ($-\sqrt{2}$; 2-2$\sqrt{2}$).

Exercice 3.

Question 4. Notons C l'ensemble indiqué par l'énoncé : $C = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3; x - 3y = 0\}$

(1) C n'est pas vide : $0 - 3 \times 0 = 0$ donc $(0; 0; 0) \in C$ donc C n'est pas vide.
(2) Cest-il stable par la somme ?
Pour tous vecteurs $u = (x; y; z)$, $u' = (x'; y'; z')$ de C, $u + u' = (x; y; z) + (x'; y'; z')$
$u + u' = (x + x'; y + y'; z + z')$.
D'autre part $x + x' - 3(y + y') = x + x' - 3y - 3y' = x - 3y\ +\ x' - 3y'$.
Or $x - 3y = 0$ car u appartient à C et $x' - 3y' = 0$ car u' appartient à C .
D'où $x + x' - 3(y + y') = 0$ d'où $u + u'$ appartient à C. Donc C est stable par l'opération +.
(3) C est-il stable par le produit ?
Pour tout vecteur $u = (x; y; z)$ de C et tout nombre b de $\mathbb{R}$,
$bu = (bx;\ by;\ bz)$. D'autre part $bx - 3by = b(x - 3y) = b \times 0$ car $x - 3y = 0$ car u appartient à C. D'où $bx - 3b$
Donc C est stable par le produit.

D'après (1), (2) et (3), C est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4.

Question 5. Notons B le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$défini ainsi : $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; xy = 0$.
(1;0) appartient à B car $1 \times 0 = 0$ et (0;1) appartient à B car $1 \times 0 = 0$,

Mais (1;0)+(0;1) = (1;1) n'appartient pas à B car $1 \times 1 \neq 0$.

D'où B n'est pas stable par l'addition, donc B n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5.
Question 6. Posons $f(x) = x\sqrt{x}$ pour tout x de $[0; +\infty[$. Alors $\underset{x\to 4}{lim}(\frac{x\sqrt{x}-4\sqrt{4}}{x-4}) = \underset{x\to 1}{lim}(\frac{f(x)-f(4)}{x-4}) = f'(4)$
.

Il reste à évaluer $f'(4)$.

Pour tout x de $]0; +\infty[$ $f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ – Il était possible aussi d'écrire $f(x) = x\sqrt{x} = x^1 \times x^{1/2} = x^{3/2}$, d'où $f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$– .
D'où $f'(4) = \frac{3}{2}\sqrt{4} = 3$.

Exercice 6.
Question 7. Voici deux réponses possibles à cette question.

(1) Pour tout vecteur v de $\mathbb{R}^3$ combinaison linéaire de (1;1;1) et (1;2;3) il existe 2 nombres a et b satisfaisant à $v = a(1;1;1) + b(1;2;3) = (a+b; a+2b; a+3b)$. Donc $(a+b) - 2(a+2b) + (a+3b) = a + b - 2a - 4b + a + 3b = 0a + 0b = 0$. Donc v appartient à A. Ce qu'il fallait démontrer.
(2) Il était possible aussi de vérifier que $1 - 2 \times 1 + 1 = 0$ et $1 - 2 \times 2 + 3 = 0$, d'où u et v appartiennent à A, et de rappeler que A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$d'après l'énoncé, donc A est stable par combinaison linéaire, donc toute combinaison linéaire de u et v appartient à A .

Question 8. **Pour tout vecteur** v= $(x; y; z)$ **de** A, cherchons deux nombres a et b solutions de l'équation (E): $v = a(1;1;1) + b(1;2;3)$.

$(E) \Leftrightarrow (x; y; z) = (a + b; a + 2b; a + 3b)$, d'où

$(E) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lllll} a & + & b & = & x \quad (L1) \\ a & + & 2b & = & y \quad (L2) \\ a & + & 3b & = & z \quad (L3) \end{array}\right.$, système de 3 équations à 2 inconnues a et b.

D'où : $(E) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lllll} a & + & b & = & x \qquad (L'1) : (L1) \\ & & b & = & y - x \quad (L'2) : (L2) - (L1) \\ & & 2b & = & z - x \quad (L'3) : (L3) - (L1) \end{array}\right.$, on a conservé (L1) et on l'a uitilisé pour éliminer x dans les autres équations.

D'où : $(E) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lllll} a & + & b & = & x \qquad (L1) \\ & & b & = & y - x \qquad (L'2) \\ & & 0b & = & z - 2y + x \quad (L''3) : (L'3) - 2(L'2) \end{array}\right.$:

Or v appartient à A, donc $x - 2y + z = 0$. Le système est :

$(E) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lllll} a & + & b & = & x \quad (L1) \\ & & b & = & y - x \quad (L'2) \\ & & 0 & = & 0 \quad (L''3) \end{array}\right.$ $: d'où$

$(E) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lll} a & = & x - b = x - (y - x) = 2x - y \quad d'après\, (L1)\, et\, (L'2) \\ b & = & y - x \quad (L''2)\, d'après\, (L'2) \end{array}\right.$:

Il y a donc une solution a, b. Donc v **est une combinaison linéaire de (1;1;1) et (1;2;3)**.

Exercice 7.
Question 9. $S \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{llllll} -x & +2y & +2z & = & 2 & (L1) \\ 2x & -6y & -z & = & 1 & (L2) \\ 3x & +4y & -3z & = & 5 & (L3) \end{array}\right.$ conservons (L1) et utilisons-là pour éliminer x dans les autres équations

$S \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{llllll} -x & +2y & +2z & = & 2 & (L'1) : (L1) \\ & -2y & +3z & = & 5 & (L'2) : 2(L1) + (L2) \\ & 10y & +3z & = & 11 & (L'3) : 3(L1) + (L3) \end{array}\right.$ conservons (L1) et (L'2) et utilisons (L'2) pour éliminer y dans l'équation suivante.

$S \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{llllll} -x & +2y & +2z & = & 2 & (L''1) : (L1) \\ & -2y & +3z & = & 5 & (L''2) : (L'2) \\ & & 36z & = & 72 & (L''3) : 10(L2) + 2(L3) \end{array}\right.$ il y a donc une, seule, solution :

$S \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lll} x & = & \frac{2-2y-2z}{-1} = \frac{2-2(1/2)-2(2)}{-1} = 3 \quad (L'''1)\, d'après\, (L'''2)\, et\, (L1) \\ \quad y & = & \frac{5-3z}{-2} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} \quad (L'''2)\, d'après\, (L''2)\, et\, (L'''3) \\ \quad\quad z & = & 72/36 = 2 \quad (L'''3)\, d'après\, (L''3) \end{array}\right.$ on a résolu la 3ème équation, puis la 2nde, puis la 1ère. Il y a une, seule, solution.

Question 10. Notons cette équation (E).

$(E) \Leftrightarrow (2a - b + 2c; -3a + 2b - 4c; -a + b - 2c) = (-6; 10; 4)$ d'où

$S \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} 2a & -b & +2c & = & -6 \quad (L1) \\ -3a & +2b & -4c & = & 10 \quad (L2) \\ -a & +b & -2c & = & 4 \quad (L3) \end{array}\right.$ conservons (L1) et utilisons la pour éliminer a dans les équations suivantes

$S \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} 2a & -b & +2c & = & -6 \quad (L'1) : (L1) \\ & b & -2c & = & 2 \quad (L'2) : 2(L2) + 3(L1) \\ & b & -2c & = & 2 \quad (L'3) : 2(L3) + (L1) \end{array}\right.$ Les lignes (L'2) et (L'3) sont identiques.D'où

$S \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} 2a & -b & +2c & = & -6 \quad (L''1) : (L1) \\ & b & -2c & = & 2 \quad (L''2) : (L'2) \end{array}\right.$ d'où

$S \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lll} 2a & = & -6 + b - 2c = -6 + 2 + 2c - 2c = -4 \quad (L''1) : (L1) \\ \quad b & = & 2 + 2c \quad (L''2) : (L'2) \\ \quad\quad c \in \mathbb{R} & & \end{array}\right.$

Il y a une infinité de solutions : pour n'importe quel nombre c de $\mathbb{R}$, $b = 2 + 2c$ et a=-2 fournissent une solution.