Évolution des conceptions de l'Univers (Phys137)

TD 7

Exercice 1 : Constante de Hubble

On va supposer la constante de Hubble connue : $H_0 = 22$ km/s/Mal où Mal signifie méga-année-lumière. Il s'agit ici surtout de bien manipuler les unités.

Dit autrement, cela signifie que si une galaxie est située à 1 million d'années-lumière, sa vitesse de récession est de 22 km/s.

1. Si on sait qu'une galaxie est à une distance $d = 500$ Mal, quelle est sa vitesse de récession ?

$v = H_0 d = 22$ [km/s/Mal] x 500 Mal = 11000 km/s.

2. Si on observe une galaxie ayant une vitesse de récession $v = 18000$ km/s, donner une estimation de sa distance d.

Sachant que $v = H_0 d$ on obtient $d = v/H_0 =$ 18000 [km/s] / 22 [km/s/Mal] = 818,2 Mal. En effet, les unités km/s se simplifient entre numérateur et dénominateur, et il reste Mal^{-1} au dénominateur, ce qui équivaut finalement à des Mal.

3. Selon la théorie du Big Bang, toute la matière (qui compose maintenant les galaxies) était concentrée en un point à un instant $t = 0$. Si une galaxie est maintenant à une distance d, et en supposant que l'expansion s'est faite à vitesse constante selon la valeur de la constante H_0, comment estimer l'âge de l'univers T ?

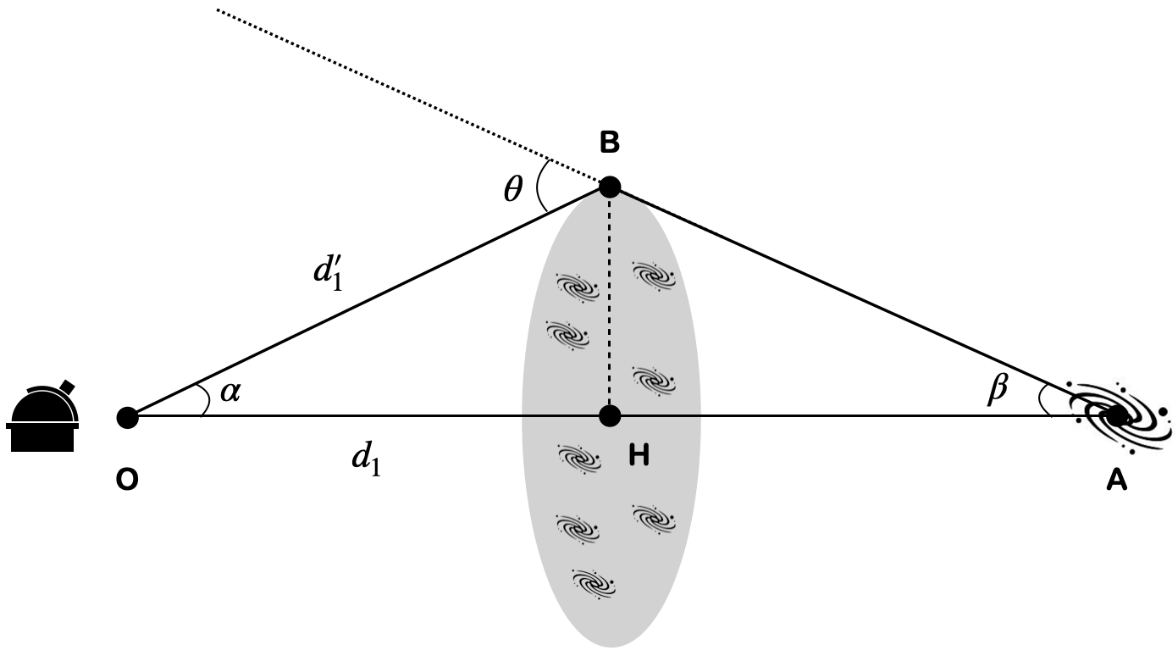
Si la galaxie est à un distance d, elle l'a parcourue en un temps T à la vitesse v : $T = d/v$. Et on sait que $v = H_0 d$, donc $T = d/(H_0 d) = 1/H_0$. Ici aussi, il faut bien manipuler les unités : si H_0 s'exprime en km/s/Mal, on mélange 2 unités de longueur, km et al ou pc. Si on exprime d en km, on retrouve bien T en secondes.

1 Mal = 10^6 x 365.25 x 24 x 60 x 60 x 300000 km = $9{,}46.10^{18}$ km.

Donc $T = 1/H_0 =$ $1/(22/9{,}46.10^{18}) = 9{,}46.10^{18}/22 = 4{,}3.10^{17}$ s = $13{,}6.10^9$ ans.

Exercice 2 : Lentille gravitationnelle, masse galactique et retard

On considère un ensemble formé d'une galaxie lointaine G_2 (située en A sur la figure) et d'un énorme amas de galaxies massive G_1, de distribution approximativement sphérique, centré en H et s'étendant jusqu'à B (voir figure).



1. En prenant la valeur de la constante de Hubble H_0 = 70 km/s/Mpc, et sachant que G1 et G2 s'éloignent du point d'observation à respectivement v_1 = 7,0.10⁴ km/s et v_2 = 1,4.10⁵ km/s, à quelle distance OH = d_1 et OA = d_2 se situent G1 et G2 ?

$v = H_0 d$ donc d_1 = 1000 Mpc et d_2=2000 Mpc

2. Connaissant la taille de G2, BH = R2 = 1 Mpc, déterminer l'angle BOH = α. En comparant d1 et d2, en déduire la valeur de θ, l'angle de déviation des rayons lumineux causée par la masse de G2.

tan(α) $\simeq \alpha$ = R2/d_1 = 1/1000 = 10^{-3} rad. On a OH = HA, donc $\alpha = \beta$, donc $\theta = 2\beta = 2\alpha$.

3. Sachant que la relativité générale prévoit une déviation des rayons lumineux

$$\theta = \frac{4GM}{Rc^2} \text{ (en radians)}$$

déduire la masse de G2 en $M_\odot$.

$M = \dfrac{\theta R c^2}{4G}$ = $2{,}02.10^{46}$ kg = $1{,}01.10^{16}$ $M_\odot$

4. Calculer la différence $\Delta d = d_1' - d_1$ où d_1' = OB, en tenant compte de l'approximation :

$$\frac{1}{\cos(\alpha)} \simeq 1 + \frac{\alpha^2}{2}$$

$d_1' = d_1/\cos(\alpha)$ $d_1' = \dfrac{d_1}{\cos(\alpha)} \simeq d_1(1+\dfrac{\alpha^2}{2}) \Rightarrow \Delta d = d_1' - d_1 \simeq \dfrac{d_1\alpha^2}{2}$ = 1,5.10^{19} m.

5. Si une supernova explose dans la galaxie G_1, quelle différence de temps Δt observera-t-on entre le signal de l'explosion vu directement à travers G_2 et celui qui aura été dévie par G_2 ?

$\Delta t = 2\Delta d/c = \dfrac{2d_1\alpha^2}{2c}$ = 10^{11} s = environ 3169 ans

NB : données pas réalistes ! (R_2 trop petit, θ trop grand, M trop grand, Δt trop grand)

Exercice 3 : Déviation de la lumière par le Soleil

Lors de l'éclipse totale de Soleil de 1919, A. Eddington et F. Dyson depuis Principe, et C. Davidson et A. Crommelin depuis Sobral au Brésil ont confirmé la théorie de la relativité générale en mesurant la déviation de la lumière venant d'étoiles dont la position dans le ciel étaient très proche du disque solaire. La déviation théorique θ s'exprime (en radians) comme :

$$\theta \propto \frac{4GM_\odot}{dc^2}$$

où $M_\odot$ est la masse du Soleil, d la distance entre le centre du Soleil et les rayons lumineux venant de l'étoile (que l'on approximera ici au rayon $R_\odot$ du Soleil), G et c les constantes habituelles.

1. Calculer la valeur attendue (on approximera ici la distance d au rayon $R_\odot$ du Soleil) et la comparer à l'erreur de mesure, estimée par Eddington à $\Delta\theta$ = 0.45 arcsec (rappel : 1° = 3600 arcsec).

A.N. : θ = 8,48.10^{-6} rad = 1,75 arcsec (ou ")

C'est donc supérieur à l'erreur de mesure annoncée par Eddington (mais qui reste controversée...).

2. Les instruments actuels atteignent une erreur de mesure $\Delta\theta$ = 0,1 mas (milli-arcsec). Serait-il possible de mesurer la déviation d'une étoile observée au voisinage proche de Jupiter ? de la Lune ?

Cas de Jupiter, A.N. : θ = 7,88.10^{-8} rad = 1,6.10^{-2} arcsec (ou "). Plus grand que $\Delta\theta$ = 10^{-4} arcsec donc mesure valable.

Cas de la Lune, A.N. : θ = 1,25.10^{-10} rad = 2,6.10^{-5} arcsec (ou "). Plus petit que $\Delta\theta$ = 10^{-4} arcsec donc mesure pas valable.

Exercice 4 : Avance du périhélie de Mercure

Les observations montrent que le périhélie de Mercure précesse lentement à la vitesse de 5600.73 ± 0.41 arcsec/siècle. Ce phénomène peut-être expliqué par la présence des autres planètes du système solaire qui perturbent le mouvement de Mercure.

En 1882, Newcomb calcula que la vitesse de précession devait être de 5557.62 ± 0.20 arcsec/siècle si on tenait compte des effets des autres corps du système solaire.

1. Ce calcul est-il compatible avec les observations ?

Non, car la valeur observée minimale vaut 5600.32 arcsec/siècle alors que la valeur théorique maximale vaut 5557.82 arcsec/siècle. Soit une différence de 42,5 arcsec/siècle, largement (100 fois) supérieure aux incertitudes.

Pour expliquer ce désaccord, des astronomes proposèrent la présence d'une nouvelle planète, qu'ils baptisèrent Vulcain, située entre Mercure et le Soleil. Toutefois, cette planète n'a jamais été observée.
En 1915, Einstein appliqua sa récente théorie de la relativité générale au cas de Mercure et montra que l'orbite de Mercure devait précesser d'un angle ϕ à chaque révolution avec :

$$\phi = \frac{6\pi G M_S}{c^2 a(1 - e^2)}$$

où M_S est la masse du Soleil, a = 5,8 10^{10} m le demi grand axe de Mercure et e = 0,2 l'excentricité de son orbite, dont la période de révolution est T = 88 jours.

2. Vérifier que ϕ est bien homogène à un angle.

Il faut d'abord déterminer la dimension de G. On reprend la formule de la force gravitationnelle (sachant qu'une force a pour dimension MLT^{-2} car F = ma):

$F_g = \frac{GMm}{r^2}$ => $[MLT^{-2}] = [G][M^2L^{-2}]$ => $[G] = [M^{-1}L^3T^{-2}]$

Ensuite, on a $[\phi] = [(M^{-1}L^3T^{-2}M)/L^2T^{-2}L] = [1]$. ϕ est sans dimension, ce qui correspond bien à un angle.

3. Vérifier que cette valeur de ϕ est bien compatible avec les observations.

$\phi = \frac{6\pi \times 6{,}67.10^{-11} \times 2.10^{30}}{(3.10^8)^2 \times 5{,}8.10^{10} \times (1 - 0{,}2^2)}$ => ϕ = 5,02.10^{-7} radian par révolution.

Il y a N = 100 x 365,25 / 88 révolutions par siècle, donc Nϕ = 2,08.10^{-4} radian/siècle.

Soit Nϕ x 180°/π x 3600 = 43 arcsec.

****

Données utiles :

G = 6,67.10^{-11} en unité du Système International

1 pc = 3,08.10^{16} m

1' = 4.85.10^{-6} rad

c = 3.10^{8} m/s

$M_{\odot}$ = 2.10^{30} kg

$R_{\odot}$ = 7.10^{8} m

M_{Lune} = 7,34.10^{22} kg

R_{Lune} = 1,74.10^{6} m

M_{Jup} = 1,90.10^{27} kg

R_{Jup} = 7,15.10^{7} m