Licence 3 2024-2025
Analyse 1
Maths

Institut Villebon Georges Charpak

Fonctions définies par une intégrale à paramètre

1. Exemples

A. Étudier le domaine de définition $\mathcal{D}_I$ de la fonction I définie par chacune des relations suivantes :

1. $I(p) = \displaystyle\int_0^1 x^p \ln x \, dx$;
2. $I(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} p^2 \sin x \; e^{-px} \; dx$;
3. $I(p) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+4p^2x^2}$;
4. $I(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-px}}{3+\cos x} dx$;
5. $I(p) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin pt}{t(3+\sqrt{t})} dt$;
6. $I(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2+p^2} dt$;
7. $I(p) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln t}{t^2+p^2} dt$;
8. $I(p) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^p \ln(t)}{t-1} \, dt.$

B. Dans les exemples **1**, **2**, **3** et **7**, calculer $I(p)$ pour tout $p \in \mathcal{D}_I$.

Indication pour l'exemple **7** *:* Exprimer $I(p)$ en fonction de $I(1)$ (changement de variable $u = ?$), puis calculer $I(1)$ (changement de variable $u = 1/t$) .

2. Peut-on passer à la limite sous l'intégrale ?

Reprenons l'exemple **2** ci-dessus. Soit $x \in [0, +\infty[$. Alors (expliquer pourquoi) :

$$p^2 \sin x \; e^{-px} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Peut-on "intégrer" ce passage à la limite et dire que :

$$\int_0^{+\infty} p^2 \sin x \; e^{-px} \; dx \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} 0 \; dx = 0 \quad ?$$

Réponse : **NON.**

En effet, nous avons calculé $I(p)$ et trouvé : $I(p) = p^2/(1+p^2)$. Et donc :

$$\int_0^{+\infty} p^2 \sin x \; e^{-px} \; dx \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Toutefois, dans certains cas, le passage à la limite sous l'intégrale est possible. C'est le sujet des résultats suivants.

Passage à la limite sous l'intégrale : propriété de convergence dominée

Soit $A \in \mathbb{R}$. On suppose que, pour tout $p \in [A, +\infty[$, l'intégrale :

$$I(p) = \int_a^b f(t, p)\ dt$$

est absolument convergente, avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. On suppose également que la fonction de deux variables f est telle que :

- **H1.** Pour tout $t \in]a, b[$, on a :

$$f(t, p) \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} f_\infty(t)$$

- **H2.** *Hypothèse de* **domination** : il existe une fonction g telle que :

  1. l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(t)\ dt$ est absolument convergente ;

  2. pour tout $p \geq A$ et pour tout $t \in]a, b[$: $|f(t, p)| \leq g(t)$.

Alors :

$$\boxed{I(p) \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f_\infty(t)\ dt.}$$

Exemples d'utilisation de la propriété de convergence dominée Essayons d'appliquer la propriété ci-dessus pour déterminer $\lim_{p \to +\infty} I(p)$ dans les exemples vus ci-dessus.

Il faut bien voir que le point important à vérifier est **l'hypothèse de domination**, qui **consiste à majorer** $|f(t, p)|$ **par une quantité** $g(t)$ **qui ne dépend pas de** p **et qui correspond à une intégrale** $\int_a^b g(t)\ dt$ **convergente**.

1. **H1.** Pour tout $x > 0$, on a :

$$x^p \ln x \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

   Nous pouvons donc poser : $f_\infty(x) = 0$.

   H2. Pour tout $p > 0$ et tout $x \in]0, 1[$: $|x^p \ln x| \leq |\ln x|$. On pose donc : $g(x) = |\ln x|$. Nous savons que l'intégrale $\int_0^1 g(x)\ dx$ est absolument convergente.

   Les deux hypothèses **H1** et **H2** sont satisfaites, on peut donc en conclure que :

$$I(p) \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f_\infty(x)\ dx = 0.$$

   Dans le cas particulier de cet exemple, nous pouvons aussi vérifier ce résultat directement car nous avons calculé la valeur de $I(p)$ pour tout p : $I(p) = -1/(p+1)^2$. Mais il n'en est pas toujours ainsi, comme nous pouvons le voir ensuite.

4. Nous n'avons pas calculé l'intégrale $I(p)$, mais nous pouvons calculer $\lim_{p\to+\infty} I(p)$ en utilisant la propriété de convergence dominée :

H1. Pour tout $x > 0$, on a :

$$\frac{e^{-px}}{3+\cos x} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Nous pouvons donc poser : $f_\infty(x) = 0$.

H2. La majoration requise doit être vraie pour tout p supérieur à un certain $A \in \mathbb{R}$. Choisissons par exemple $A = 1$. Pour tout $p > 1$, on a :

$$\forall x \in]0,+\infty[\quad \left|\frac{e^{-px}}{3+\cos x}\right| \le \frac{e^{-x}}{2}.$$

On pose donc : $g(x) = e^{-x}/2$. Nous savons que l'intégrale $\int_0^{+\infty} g(x)\,dx$ est absolument convergente.

Les deux hypothèses **H1** et **H2** sont satisfaites, on peut donc en conclure que :

$$I(p) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} f_\infty(x)\,dx = 0.$$

Exercice Utiliser la propriété de convergence dominée pour étudier la limite de $I(p)$ quand p tend vers $+\infty$, dans les exemples **3**, **6**, **7** et **8**.

Remarque L'utilisation de la propriété de convergence dominée n'est pas toujours utile pour effectuer un passage à la limite comme ceux des exemples précédents. Parfois, le **théorème de l'encadrement** est suffisant.

Par exemple, pour l'exemple **4**, on peut écrire, pour tout $p > 0$ et tout $x \in]0,+\infty[$:

$$\frac{e^{-px}}{4} \le \frac{e^{-px}}{3+\cos x} \le \frac{e^{-px}}{2},$$

et donc :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-px}}{4} dx \le I(p) \le \int_0^{+\infty} \frac{e^{-px}}{2} dx.$$

Les deux intégrales se calculent et l'on obtient :

$$\frac{1}{4p} \le I(p) \le \frac{1}{2p}.$$

La limite de $I(p)$ à l'infini s'en déduit immédiatement.

Pour l'exemple **6**, on peut écrire :

$$-\frac{1}{t^2+p^2} \le \frac{\sin t}{t^2+p^2} \le \frac{1}{t^2+p^2}$$

et donc :

$$-\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+p^2}\,dt \le I(p) \le \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+p^2}\,dt.$$

L'intégrale se calcule, elle vaut $\pi/2p$. Donc :

$$-\frac{\pi}{2p} \le I(p) \le \frac{\pi}{2p}.$$

On en déduit immédiatement la limite de $I(p)$ à l'infini.

3. Continuité d'une fonction définie par une intérale à paramètre

Le résultat suivant permet d'étudier la continuité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre.

Continuité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre

Soit $\mathcal{D}$ un intervalle ou une union d'intervalles de $\mathbb{R}$. On suppose que, pour tout $p \in \mathcal{D}$, l'intégrale :

$$I(p) = \int_a^b f(t,p)\ dt$$

est absolument convergente, avec $-\infty \le a < b \le +\infty$. On suppose également que la fonction de deux variables f est telle que :

- **H1.** Pour tout $t \in]a,b[$, la fonction de la variable p : $p \longmapsto f(t,p)$ est continue sur $\mathcal{D}$;
- **H2.** *Hypothèse de* **domination** : il existe une fonction g telle que :
  1. l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(t)\ dt$ est absolument convergente ;
  2. pour tout $p \in \mathcal{D}$ et pour tout $t \in]a,b[$: $|f(t,p)| \le g(t)$.

alors la fonction I est continue sur $\mathcal{D}$.

Exemples Démontrons que les deux fonctions $p \mapsto I(p)$ définies dans les exemples **5.** et **6.** ci-dessus sont continues sur leur domaine de définition $\mathcal{D}_I$.

5. Ici, $f(t,p) = \dfrac{\sin pt}{t(3+\sqrt{t})}$, $\mathcal{D}_I = \mathbb{R}$ et l'intervalle d'intégration est : $]a,b[=]1,+\infty[$. Vérifions les deux hypothèses requises :

- **H1.** Pour chaque t dans l'intervalle $]1,+\infty[$, la fonction $p \mapsto f(t,p)$ est continue sur $\mathbb{R}$: en effet, le dénominateur $t(3+\sqrt{t})$ est constant (il ne dépend pas de p) et la fonction au numérateur est la composée de la fonction sinus par la fonction $p \mapsto pt$ qui est affine, donc continue.
- **H2.** Il faut majorer $|f(t,p)|$ par une quantité $g(t)$ qui ne dépende pas de p et dont l'intégrale $\int_1^{+\infty} g(t)\ dt$ soit convergente. Écrivons, pour $t \in]1,+\infty[$ et $p \in \mathbb{R}$:

$$|f(t,p)| = \left|\frac{\sin pt}{t(3+\sqrt{t})}\right| \le \frac{1}{t(3+\sqrt{t})}.$$

Posons :

$$g(t) = \frac{1}{t(3+\sqrt{t})}.$$

L'intégrale $\int_1^{+\infty} g(t)\,dt$ est convergente (pourquoi ?) et donc l'hypothèse de domination est satisfaite.

Les deux hypothèses **H1.** et **H2.** sont satisfaites, donc la fonction I est continue sur $\mathbb{R}$.

6. Ici, $f(t,p) = \dfrac{\sin t}{t^2+p^2}$, $\mathcal{D}_I = \mathbb{R}^*$ et l'intervalle d'intégration est : $]a,b[=]0,+\infty[$. Essayons de vérifier les deux hypothèses **H1.** et **H2.** :

- **H1.** Pour chaque t dans l'intervalle $]0,+\infty[$, la fonction $p \mapsto f(t,p)$ est continue : il s'agit d'un quotient de deux fonctions continues : la première, $p \mapsto \sin t$, est constante et la deuxième, $p \mapsto t^2+p^2$, est polynomiale et ne s'annule pas.
- **H2.** La situation est plus délicate ici car, pour majorer $|f(t,p)|$ par une quantité $g(t)$ qui ne dépende pas de $p \in \mathbb{R}^*$, on n'a pas d'autre choix que d'écrire :

$$\forall t \in]0,+\infty[\quad \forall p \in \mathbb{R}^* \quad |f(t,p)| = \frac{|\sin t|}{t^2+p^2} \leq \frac{|\sin t|}{t^2}.$$

Mais voilà : l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t^2}\,dt$ est divergente (pourquoi ?).

Pour rattraper la situation, nous réduisons dans un premier temps nos ambitions et nous étudions la continuité de la fonction I sur un domaine plus réduit : $\mathcal{D}'_I =]-\infty,-A] \cup [A,+\infty[$, où $A > 0$. Dans ce domaine $\mathcal{D}'_I$, l'hypothèse de domination est satisfaite. En effet :

$$\forall t \in]0,+\infty[\quad \forall p \in]-\infty,-A] \cup [A,+\infty[\quad |f(t,p)| = \frac{|\sin t|}{t^2+p^2} \leq \frac{|\sin t|}{t^2+A^2}.$$

Posons alors :

$$g(t) = \frac{|\sin t|}{t^2+A^2}.$$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$ est convergente (pourquoi ?). Cela nous permet ainsi de démontrer que la fonction f est continue dans le domaine $]-\infty,-A] \cup [A,+\infty[$. **Or nous pouvons déduire de cela que la fonction I est continue sur $\mathbb{R}^*$.** Pourquoi ?

4. Dérivabilité d'une fonction définie par une intérale à paramètre

Le résultat suivant permet de savoir si une fonction définie par une intégrale à paramètre est dérivable. Il donne également des hypothèses sous lesquelles sa dérivée s'obtient en "dérivant sous l'intégrale".

Dérivabilité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre

Soit $\mathcal{D}$ un intervalle ou une union d'intervalles de $\mathbb{R}$. On suppose que, pour tout $p \in \mathcal{D}$, l'intégrale :

$$I(p) = \int_a^b f(t,p)\ dt$$

est absolument convergente, avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. On suppose également que la fonction de deux variables f est telle que :

- **H1.** Pour tout $t \in]a,b[$, la fonction de la variable p : $p \longmapsto f(t,p)$ est dérivable sur $\mathcal{D}$;
- **H2.** *Hypothèse de* **domination** : il existe une fonction g telle que :
  1. l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(t)\ dt$ est absolument convergente ;
  2. pour tout $p \in \mathcal{D}$ et pour tout $t \in]a,b[$:
  $$\left|\frac{\partial f}{\partial p}(t,p)\right| \leq g(t).$$

alors la fonction I est dérivable sur $\mathcal{D}$ et, pour tout $p \in \mathcal{D}$, sa dérivée en p vaut :

$$I'(p) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial p}(t,p)\ dt.$$

Exemple À titre d'exemple, étudions la dérivabilité de la fonction I définie par :

$$I(p) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-pt}}{3+\cos t} dt.$$

Nous voyons simplement que l'intégrale qui définit $I(p)$ est absolument convergente si $p > 0$. Nous allons démontrer que la fonction I est dérivable, et calculer sa dérivée, dans tout intervalle $\mathcal{D} =]A, +\infty[$ avec $A > 0$.

- **H1.** Pour tout $t \in]0, +\infty[$, la fonction de la variable p :
  $$p \longmapsto f(t,p) = \frac{e^{-pt}}{3+\cos t}$$
  est dérivable sur $\mathcal{D}$ et sa dérivée est :
  $$p \longmapsto \frac{\partial f}{\partial p}(t,p) = -\frac{te^{-pt}}{3+\cos t}.$$

- **H2.** Il nous faut obtenir une majoration de la forme :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial p}(t,p)\right| \leq g(t),$$

valable pour tout $p \in]A,+\infty[$ et tout $t \in]0,+\infty[$. Par exemple :

$$\forall p > A \quad \forall t \in]0,+\infty[\quad \left|\frac{\partial f}{\partial p}(t,p)\right| \leq \frac{1}{2} t e^{-At}.$$

Nous posons $g(t) = te^{-At}/2$. Comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$ est convergente (pourquoi ?), l'hypothèse **H2** est satistaite.

Ainsi, nous pouvons affirmer que la fonction I est dérivable en tout point de l'intervalle $]A,+\infty[$ et que, pour tout $p \in]A,+\infty[$:

$$I'(p) = -\int_0^{+\infty} \frac{te^{-pt}}{3+\cos t}\,dt. \tag{1}$$

Remarque importante Nous avons en fait démontré que la fonction I est dérivable en tout $p > 0$ et que $I'(p)$ est donné par la relation (1) pour tout $p > 0$. Pourquoi ?

5. Exercices et problèmes

Exercice 1 *E3A 2016.* Démontrer que la fonction I définie par :

$$I(p) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^{2pt} - 1}\, dt$$

est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$; démontrer qu'elle est continue sur tout intervalle $[A, +\infty[$ et donc qu'elle est continue sur $]0, +\infty[$.

Exercice 2 Vérifier que la fonction I définie par :

$$\forall p > 0 \quad I(p) = \int_0^1 \frac{\ln t}{t + p}\, dt$$

est bien définie sur $]0, +\infty[$, puis étudier sa dérivabilité et, le cas échéant, calculer sa dérivée (sous la forme d'une intégrale à paramètre).

Exercice 3 Vérifier que la fonction h définie par :

$$\forall x > 0 \quad h(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t + x}\, dt$$

est bien définie sur $]0, +\infty[$, puis étudier sa dérivabilité et, le cas échéant, calculer sa dérivée (sous la forme d'une intégrale à paramètre). On pourra commencer à étudier la dérivabilité de h sur un intervalle $]A, +\infty[$, avec $A > 0$.

Exercice 4

1. Rappeler pourquoi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a : $|\sin t| \leq |t|$.

2. Vérifier que la fonction h définie par :

$$\forall x > 0 \quad h(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-xt}\, dt$$

est bien définie sur $]0, +\infty[$.

3. Calculer la limite de h en $+\infty$.

4. Démontrer que h est dérivable sur tout intervalle $]A, +\infty[$ et donc sur $]0, +\infty[$.

5. Calculer $h'(x)$ pour tout $x > 0$.

6. En déduire une expression simple de la valeur de $h(x)$, pour tout $x > 0$. Il sera utile d'utiliser le résultat de la question 3.

Exercice 5

1. Démontrer que la fonction I définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall p \in \mathbb{R} \quad I(p) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(pt)\ dt$$

est dérivable et exprimer $I'(p)$ en fonction de $I(p)$ pour chaque réel p.

2. Déterminer toutes les fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad y'(x) = -\frac{x}{2}\ y(x).$$

3. En déduire une relation simple entre $I(p)$ et $I(0)$, pour tout réel p.

Exercice 6 On définit sur $\mathbb{R}$ les deux fonctions f et g par les relations suivantes :

$$\forall p \in \mathbb{R} \quad f(p) = \int_0^p e^{-t^2} dt \quad g(p) = \int_0^1 \frac{e^{-p^2(1+t^2)}}{1+t^2}\ dt.$$

1. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

2. Démontrer que g est dérivable sur tout intervalle $[-A, A]$, et donc sur $\mathbb{R}$. Pour chaque $p \in \mathbb{R}$, exprimer $g'(p)$ en fonction de $f(p)$.

3. Calculer la dérivée de la fonction $f^2 + g$. Que pouvez-vous en déduire ? Calculer $(f^2 + g)(0)$, puis en déduire la valeur de $(f^2 + g)(p)$ pour tout réel p.

4. Déterminer $\lim_{p \to +\infty} g(p)$. En déduire la valeur de $\lim_{p \to +\infty} f^2(p)$.

5. Déduire de ce qui précède la valeur de l'intégrale :

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\ dt$$

puis celle de l'intégrale de Gauss :

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\ dt.$$

(Pour caluler J, on pourra constater que la fonction intégrée est paire.)

6. Déduire de ce qui précède et de l'exercice 5 la valeur de l'intégrale :

$$I(p) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(pt)\ dt$$

pour tout $p \in \mathbb{R}$.

Exercice 7 *E3A 2015.*

1. Rappeler la définition de la fonction arctan, ainsi que son tableau de variation et sa dérivée. Justifier que pour tout réel x, on a : $|\arctan(x)| \leq |x|$.

   Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose :
   $$\phi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{t(t^2+1)}\, dt.$$

2. Démontrer que ϕ est définie sur $\mathbb{R}$ et impaire.

3. Montrer que ϕ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

4. Déterminer $\phi'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+$ (avec une expression sans intégrale), si $x \neq 1$ puis $x = 1$. *Pour cela on pourra commencer par vérifier la relation :*
   $$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} = \frac{1}{1-x^2}\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{x^2}{1+x^2t^2}\right).$$

5. En déduire la valeur de $\phi(x)$ pour tout réel x.

Exercice 8 Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on pose
$$h_1(x) = \int_0^1 \frac{1-\cos t}{t^2} e^{-xt} dt, \quad h_2(x) = \int_1^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} e^{-xt} dt$$
et
$$h(x) = h_1(x) + h_2(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} e^{-xt} dt.$$
et, pour $t > 0$, on note :
$$f(t,x) = \frac{1-\cos t}{t^2} e^{-xt}.$$

1. Vérifier l'inégalité :
   $$\forall t \in \mathbb{R} \quad 1 - \cos t \leq \frac{t^2}{2}.$$

2. Montrer que les fonctions h_1 et h_2 sont définies et continues sur $[0, +\infty[$.

3. Calculer les limites de h_1, h_2 et h en $+\infty$.

4. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, justifier les majorations suivantes, pour tout $x \geq \varepsilon$ et tout $t > 0$:
   $$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| \leq \frac{te^{-\varepsilon t}}{2} \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)\right| \leq \frac{t^2 e^{-\varepsilon t}}{2}.$$
   En déduire que h est et deux fois dérivable sur $]\varepsilon, +\infty[$, puis sur $]0, +\infty[$.

5. Déterminer la limite de h' en $+\infty$.

6. Démontrer que, pour tout $x > 0$, on a :
   $$h''(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}.$$

7. En utilisant les deux questions précédentes, calculer $h'(x)$, pour tout $x > 0$.

8. Montrer

$$\forall x > 0 \quad h(x) = x\ln(x) - \frac{1}{2}x\ln(x^2+1) - \arctan(x) + h(0).$$

9. Démontrer que :

$$\forall x > 0 \quad h(x) = -\frac{x}{2}\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \arctan(x) + h(0).$$

En déduire une relation entre $\lim_{x\to+\infty} h(x)$ et $h(0)$.

10. En utilisant les questions 3 et 9, donner la valeur de $h(0)$.

11. En effectuant une intégration par parties, démontrer que : $h(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$. En déduire la valeur de l'intégrale : $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$.