Licence 3
2024-2025
Analyse 1

Institut Villebon Georges Charpak

Intégrales généralisées : définitions, calculs

1. Rappels : primitives usuelles à connaître. Déterminer les primitives des fonctions f définies par les relations suivantes :

a. $f(t) = \dfrac{1}{t}$;
b. $f(x) = \cos x$;
c. $f(y) = \sin y$;
d. $f(s) = \cos^3 s \ \sin s$;
e. $f(x) = \cos^2 x$;
f. $f(x) = \ln x$;
g. $f(y) = e^y$;
h. $f(a) = \dfrac{1}{\sqrt{a}}$;
i. $f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{Z}$;
j. $f(x) = x^y, \quad y \in \mathbb{R}$;
k. $f(y) = x^y, \quad x > 0$;
l. $f(x) = \dfrac{1}{x+4}$;
m. $f(t) = \dfrac{1}{(t+4)(t-3)}$;
n. $f(y) = \dfrac{1}{1+y^2}$.

Réponses.

a. $F(t) = \ln|t| + C$, $C \in \mathbb{R}$;
b. $F(x) = \sin x + C$, $C \in \mathbb{R}$;
c. $F(y) = -\cos y + C$, $C \in \mathbb{R}$;
d. $F(s) = -\dfrac{\cos^4 s}{4} + C$, $C \in \mathbb{R}$;
e. $F(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{\sin 2x}{4} + C$, $C \in \mathbb{R}$;
Utiliser que $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ et donc : $\cos^2 x = (1+\cos 2x)/2$.
f. $F(x) = x\ln x - x + C$, $C \in \mathbb{R}$;
g. $F(y) = e^y + C$, $C \in \mathbb{R}$;
h. $F(a) = \dfrac{\sqrt{a}}{2} + C$, $C \in \mathbb{R}$;
i. Si $n \neq -1$: $F(x) = x^{n+1}/(n+1) + C$, $C \in \mathbb{R}$;
Si $n = -1$: $F(x) = \ln x + C$, $C \in \mathbb{R}$;
j. Remplacer n par y dans ce qui précède.
k. Noter que $x^y = e^{y\ln x}$.
Si $x \neq 1$: $F(y) = \dfrac{x^y}{\ln x} + C$, $C \in \mathbb{R}$;
Si $x = 1$: $F(y) = y + C$, $C \in \mathbb{R}$;
l. $F(x) = \ln(x+4) + C$, $C \in \mathbb{R}$;
m. $\frac{1}{(t+4)(t-3)} = \frac{1}{7(t-3)} - \frac{1}{7(t+4)}$.
$F(t) = \dfrac{1}{7}\ln\left|\dfrac{t-3}{t+4}\right| + C$, $C \in \mathbb{R}$;
n. $F(y) = \arctan y + C$, $C \in \mathbb{R}$.

2. Rappel : calcul d'intégrales. Calculer les intégrales suivantes.

a. $I = \int_0^3 (x^2+2)\ dx$;

b. $I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin t\ dt$;

c. $I = \int_0^{3/2} \cos(\pi t)\ dt$;

d. $I = \int_{-\pi}^{\pi} x \cos x\ dx$;

e. $I(a) = \int_0^a \frac{t}{t^2+1}\ dt$;

f. $\star\star$ $I(a) = \int_0^a \frac{t^2}{(t^2+1)^2}\ dt$ (IPP) ;

g. $I = \int_0^{\pi} e^x \cos x\ dx$;

h. $I(t) = \int_0^{\pi} 2x\ e^{xt}\ dx$;

i. $I = \int_e^{e^2} \frac{dt}{t(\ln t)^2}$;

j. $I = \int_1^2 \frac{dy}{y(1+2y)}$;

k. $I = \int_0^{\ln 2} \frac{dx}{1+2e^x}$;

l. $\star$ $I = \int_0^3 \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$.

Solutions.

a. $I = 15$;

b. $I_n = 2(-1)^n$;

c. $I = -1/\pi$;

d. $I = 0$;

e. $I(a) = \frac{1}{2}\ln(a^2+1)$;

f. $\frac{t^2}{(t^2+1)^2} = t\ \frac{t}{(t^2+1)^2}$; IPP :
$I(a) = -\frac{a}{2(a^2+1)} + \frac{\arctan a}{2}$

g. Deux ipp successives conduisent à : $I = -e^{\pi} - 1 - I$. Donc : $I = -(\pi+1)/2$;

h. $I(t) = \frac{2}{t^2}\left(1 + (\pi t - 1)e^{\pi t}\right)$;

i. $I = 1/2$;

j. $\frac{1}{y(1+2y)} = \frac{1}{y} - \frac{2}{1+2y}$; $I = \ln(6/5)$;

k. Le changement de variable $y = e^x$ ramène à l'intégrale précédente ;

l. Changement de variable $y = \sqrt{x+1}$ puis décomposition : $\frac{y}{1+y} = \frac{1+y}{1+y} - \frac{1}{1+y} = 1 - \frac{1}{1+y}$.
Finalement : $I = 2 - \ln 3$.

3. Intégrales généralisées : intégrale sur $[a,+\infty[$ d'une fonction continue sur $[a,+\infty[$. Dans chacun des trois cas suivants :

- déterminer l'intervalle (ou les intervalles) où la fonction à intégrer est définie et continue ;
- calculer $I(c)$;
- si la limite existe, calculer $\lim_{c\to+\infty} I(c)$.

a. $I(c) = \int_1^c \frac{dt}{t^{\alpha}}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

b. $I(c) = \int_1^c e^{-\alpha x}dx$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

c. $I(c) = \int_2^c \frac{dx}{x(\ln x)^{\alpha}}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

Solutions.

a. La fonction est définie et continue sur $]0,+\infty[$;

- *Si* $\alpha \neq 1$ *:* $I(c) = \frac{1}{1-\alpha}(c^{1-\alpha} - 1)$. Donc :

- *Si* $\alpha > 1$ *:* $c^{1-\alpha}$ tend vers 0 quand c tend vers l'infini donc : $\lim_{c\to+\infty} I(c) = \frac{1}{\alpha-1}$.
- *Si* $\alpha < 1$ *:* $c^{1-\alpha}$ tend vers $+\infty$ quand c tend vers l'infini donc : $\lim_{c\to+\infty} I(c) = +\infty$.

- *Si* $\alpha = 1$, $I(c) = \ln c$ donc $\lim_{c\to+\infty} I(c) = +\infty$.

La fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b.
- *Si* $\alpha = 0$ *:* $I(c) = c - 1$ donc $\lim_{c\to+\infty} I(c) = +\infty$.
- *Si* $\alpha \neq 0$ *:* $I(c) = (1 - e^{-\alpha c})/\alpha$. Donc :
  - *Si* $\alpha > 0$ *:* $\lim_{c\to+\infty} I(c) = 1/\alpha$.
  - Si $\alpha < 0$: $\lim_{c\to+\infty} I(c) = +\infty$.

c. La fonction est définie et continue sur $]1, +\infty[$; Le changement de variable $y = \ln x$ mène à : $I(c) = \displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln c} \frac{dy}{y^\alpha}$. Comme à la première question, on trouve :
- Si $\alpha = 1$: $I(c) = \ln(\ln c) - \ln(\ln 2)$ et $\lim_{c\to+\infty} I(c) = +\infty$;
- Si $\alpha > 1$: $I(c) = \frac{1}{1-\alpha}(\ln c)^{1-\alpha} - (\ln 2)^{1-\alpha}$ et $\lim_{c\to+\infty} I(c) = \frac{(\ln 2)^{1-\alpha}}{\alpha-1}$;
- Si $\alpha < 1$: $I(c) = \frac{1}{1-\alpha}(\ln c)^{1-\alpha} - (\ln 2)^{1-\alpha}$ et $\lim_{c\to+\infty} I(c) = +\infty$.

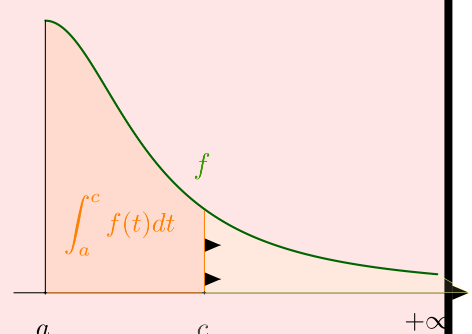
Définition : Intégrale généralisée sur un intervalle $[a, +\infty[$

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, +\infty[$ et soit $I(c) = \int_a^c f(t)\, dt$, pour $c \geq a$.

Si $I(c)$ admet une limite quand c tend vers $+\infty$, on la note : $\int_a^{+\infty} f(t)dt$. Ainsi :

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{c\to+\infty} \int_a^c f(t)dt.$$

Attention : cette limite n'existe pas toujours.



Quand cette limite **existe et est finie**, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est **convergente**. Dans le cas contraire, l'intégrale est dite **divergente**.

4. Exemples

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = 1 \qquad \int_\pi^{+\infty} \cos t\, dt \text{ n'est pas définie} \qquad \int_2^{+\infty} e^{-3x} dx = \frac{1}{3e^6}.$$

5. Intégrales généralisées : intégrale sur un intervalle $]a, b]$ **d'une fonction continue sur** $]a, b]$. Dans chacun des trois cas suivants :

- déterminer l'intervalle (ou les intervalles) où la fonction à intégrer est définie et continue ;
- calculer $I(c)$;
- si la limite existe, calculer $\lim_{c\to 0} I(c)$.

$$(a)\ \ I(c) = \int_c^1 \frac{dt}{t^\alpha}, \quad \text{avec} \ \ \alpha \in \mathbb{R}^+ \qquad\qquad (b)\ \ I(c) = \int_c^1 \ln x \ dx.$$

Solutions.

a. La fonction est définie et continue sur $]0,1[$;

- *Si* $\alpha \neq 1$ *:* $I(c) = \frac{1}{1-\alpha}(1 - c^{1-\alpha})$. Donc :
  - *Si* $\alpha < 1$ *:* $c^{1-\alpha}$ tend vers 0 quand c tend vers 0 donc : $\lim_{c\to+0} I(c) = \frac{1}{1-\alpha}$.
  - *Si* $\alpha > 1$ *:* $c^{1-\alpha}$ tend vers $+\infty$ quand c tend vers 0 donc : $\lim_{c\to 0} I(c) = +\infty$.
- *Si* $\alpha = 1$, $I(c) = -\ln c$ donc $\lim_{c\to 0} I(c) = +\infty$.

b. La fonction est définie et continue sur $]0,1]$.

$$I(c) = [x\ln x - x]_c^1 = -1 - c\ln c + c.$$

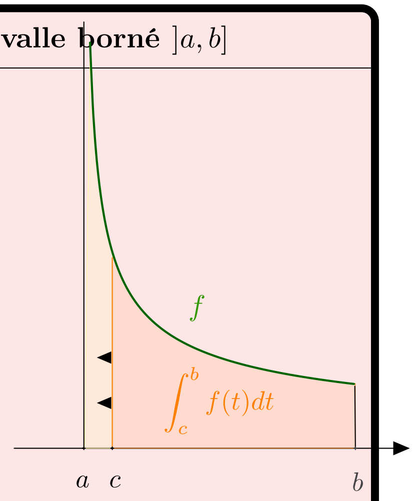
Nous savons que $c \ln c$ tend vers 0 quand c tend vers 0, donc : $\lim_{c\to 0} I(c) = -1$.

Définition : Intégrale généralisée sur un intervalle borné $]a,b]$

Soit f une fonction continue sur un intervalle semi-ouvert $]a,b]$ et soit $I(c) = \int_c^b f(t)\ dt$, pour $c \in]a,b]$. Si $I(c)$ admet une limite quand c tend vers a, on la note : $\int_a^b f(t)dt$. Ainsi :

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{c\to a^+} \int_c^b f(t)dt.$$

Attention : cette limite n'existe pas toujours.



Quand cette limite **existe et est finie**, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est **convergente**. Dans le cas contraire, l'intégrale est dite **divergente**.

Attention : une intégrale généralisée est définie comme une **limite**. Si cette limite n'existe pas, l'intégrale généralisée correspondante n'a pas de sens. Par exemple, l'écriture $\int_0^{+\infty} \cos x \ dx$ n'a aucune signification mathématique.

6. Premiers exemples Les intégrales suivantes sont des intégrales généralisées. Pourquoi ? Quelle est la définition précise de chacune d'entre elles ? Calculer ces intégrales quand c'est possible.

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \quad ? \qquad \int_0^1 \ln t \; dt = \quad ?$$

Réponses. Ces intégrales sont généralisées car les fonctions à intégrer ne sont pas continues sur l'intervalle fermé $[0,1]$ mais seulement sur l'intervalle $]0,1]$. On a :

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \lim_{c \to 0} \int_c^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2$$

et

$$\int_0^1 \ln t \; dt = \lim_{c \to 0} \int_c^1 \ln t \; dt = -1$$

(calculs fait à l'exercice précédent).

7. Mêmes questions que dans l'exercice précédent.

a. $I = \displaystyle\int_0^1 x^2 \ln x \; dx.$;

b. $I(s) = \displaystyle\int_0^1 x^s \ln x \; dx,\; s \in \mathbb{R}$;

c. $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dy}{y^2+1}$;

d. $I(y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+4y^2x^2}$;

e. $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$;

f. $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(2+\sin x)^2} \; dx$;

g. $\star\star$ $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{(1+x)^2} \; dx.$

h. $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dy}{y(1+2y)}$;

i. $I(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x \; e^{-px} \; dx,\; p \in \mathbb{R}$;

j. $I(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin x \; e^{-x} \; dx$

k. $I = \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}}.$

l. $I = \displaystyle\int_1^{e} \frac{dt}{t\sqrt{\ln t}}.$

Réponses.

a. Fonction pas définie en 0.

$I = \lim_{c \to 0} \int_c^1 x^2 \ln x \, dx = -\dfrac{1}{9}$. Faire une ipp et utiliser le fait que $c^3 \ln c \to 0$ quand $c \to 0$ (croissances comparées).

b. Fonction pas définie en 0. Se traite comme l'exemple précédent.

$I(s) = \lim_{c \to 0} \int_c^1 x^s \ln x \, dx = -\dfrac{1}{(1+s)^2}$;

c. Intervalle non borné.

$I = \lim_{c \to +\infty} \int_0^c \dfrac{dy}{1+y^2} = \pi/2$;

d. Intervalle non borné. $I(y) = \lim_{c \to +\infty} \int_0^c \dfrac{dx}{1+4y^2x^2} = \dfrac{\pi}{4y}$ (changement de variable $u = 2xy$).

e. Intervalle non borné.

$I = \lim_{c \to +\infty} \int_0^c \dfrac{dx}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{\pi}{4}$ (changement de variable : $u = e^{-x}$).

f. Intervalle non borné. L'intégrale I n'est pas définie car la quantité $\int_0^c \dfrac{\cos x}{(2+\sin x)^2} dx = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2+\sin c}$ n'a pas de limite quand $c \to +\infty$;

g. Fonction pas définie en 0. $I = \lim_{c \to 0} I_c$ avec $I_c = \int_c^1 \dfrac{\ln x}{(1+x)^2} dx$. IPP. $I_c = \ln(1+c) - \ln 2 - \left(\dfrac{c}{1+c}\right) \ln c$. Croissances comparées : $I = -\ln 2$.

h. Borne infinie. Il faut décomposer la fraction en éléments simples :

$$\frac{1}{y(1+2y)} = \frac{1}{y} - \frac{2}{1+2y}.$$

On obtient : $I = \lim_{c \to +\infty} \int_1^c \dfrac{dy}{y(1+2y)}$

$= \lim_{c \to +\infty} \ln\left(\dfrac{c}{1+2c}\right) - \ln(\dfrac{1}{3}) = \ln 3 - \ln 2$.

i. Borne infinie. IPP :

$I(p) = \lim_{c \to +\infty} \int_0^c x \, e^{-px} \, dx = \dfrac{1}{p^2}$.

j. Borne infinie. Double IPP :

$I(p) = \lim_{c \to +\infty} \int_0^c \sin x \, e^{-x} \, dx = \dfrac{1}{2}$;

k. Borne infinie.

$I = \lim_{c \to +\infty} = \int_2^c \dfrac{dx}{x\sqrt{x}} = \sqrt{2}$.

l. Fonction pas définie en 1.

$I = \lim_{c \to 1} \int_c^e \frac{dt}{t\sqrt{\ln t}} = 2$ (changement de variable : $u = \ln t$) ;

À retenir : Intégrales généralisées de référence

- L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.
- L'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.
- L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\ dt$ est convergente si et seulement si $\alpha > 0$.
- L'intégrale $\int_0^1 \ln t\ dt$ est convergente.

8. $\star$ **Intégrale faussement généralisée**. On considère la fonction f définie par :

$$\forall x > 0 \ \ f(x) = x \ln x.$$

a. Quel est le domaine de définition de la fonction f ?

b. Quelle est la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 ?

c. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

La fonction g est-elle continue en 0 ? L'intégrale $\int_0^1 g(x)\ dx$ est-elle une intégrale généralisée ?

d. Expliquer pourquoi on a : $\forall c \in]0, 1] \quad \int_c^1 f(x)\ dx = \int_c^1 g(x)\ dx.$

e. Expliquer, sans calcul, pourquoi l'intégrale $\int_0^1 f(x)\ dx$ est convergente et pourquoi on a :

$$\int_0^1 f(x)\ dx = \int_0^1 g(x)\ dx.$$

f. Donner la valeur de l'intégrale $\int_0^1 f(x)\ dx$.

Proposition 1 : intégrale faussement généralisée

Soient a et b deux réels et f une fonction continue sur un intervalle $]a, b]$. Si f admet une limite finie l en a, alors l'intégrale généralisée :

$$\int_a^b f(x)\ dx$$

est convergente.

g. ⋆ ⋆ En s'inspirant des questions précédentes, rédiger une démonstration de cette proposition.

Solutions

a. La fonction est définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ (c'est l'ensemble de définition de ln).

b. Par croissances comparées, la limite est 0.

c. Oui la fonction est continue en 0 car d'après la question précédente la limite de $g(x)$ quand x tend vers 0 est $g(0) = 0$. Il ne s'agit donc pas d'une intégrale généralisée car g est continue sur $[0, 1]$.

d. Sur $]c, 1]$, $f = g$ par définition de g donc les intégrales sont égales.

e. Cette intégrale est convergente si elle admet une limite finie quand c tend vers 0. Or

$$\forall c \in]0,1] \quad \int_c^1 f(x)\ dx = \int_c^1 g(x)\ dx.$$

Donc

$$\lim_{c \to 0} \int_c^1 f(x)\ dx = \lim_{c \to 0} \int_c^1 g(x)\ dx = \int_0^1 g(x) dx$$

Par ailleurs, $\int_0^1 g(x)dx$ est un réel fini donc $\int_0^1 f(x)dx$ converge et est égale à $\int_0^1 g(x)dx$.

f. Intégration par parties : on pose $u'(x) = x$ et $v(x) = \ln x$. Alors : $u(x) = x^2/2$ et $v'(x) = 1/x$. L'intégrale devient :

$$\int_0^1 x \ln x\ dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{2}\ dx.$$

En utilisant la propriété des croissances comparées revue auparavant, on voit que la fonction

$$h : x \mapsto \begin{cases} x^2 \ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est bien définie et continue sur l'intervalle fermé $[0, 1]$. Le crochet d'intégration vaut :

$$\left[\frac{x^2}{2} \ln x\right]_0^1 = \frac{h(1) - h(0)}{2} = 0.$$

Donc :

$$\int_0^1 x \ln x\ dx = -\int_0^1 \frac{x}{2}\ dx = -\frac{1}{4}.$$

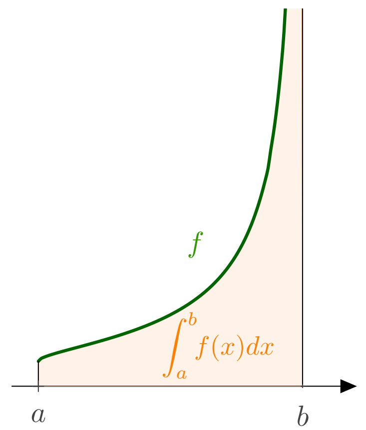
On obtient un résultat négatif, ce qui est cohérent avec le fait que la fonction intégrée, $x \mapsto x \ln x$, prend des valeurs négatives ou nulles sur l'intervalle $[0, 1]$.

9. **a.** La proposition 2 est-elle encore vraie si $b = +\infty$?

b. Soit f une fonction continue sur $[1, +\infty[$. On suppose que $f(x)$ tend vers une limite finie l en $+\infty$. Peut-on en déduire que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x)\ dx$ est convergente ?

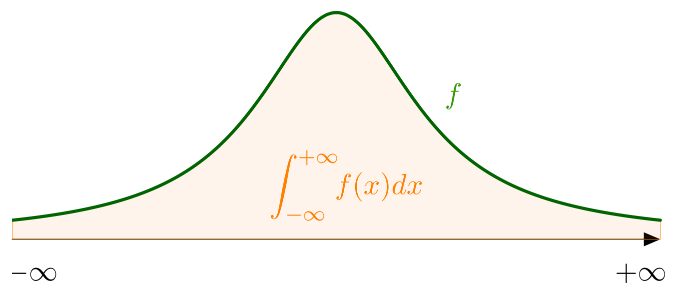
c. ⋆ ⋆ Soit f une fonction continue sur $[1, +\infty[$. Si l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)\ dt$ est convergente, peut-on en déduire que $f(x)$ tend vers 0 à l'infini ?

10. Autres cas : Comment définir l'intégrale généralisée correspondant à chacune des situations suivantes ?



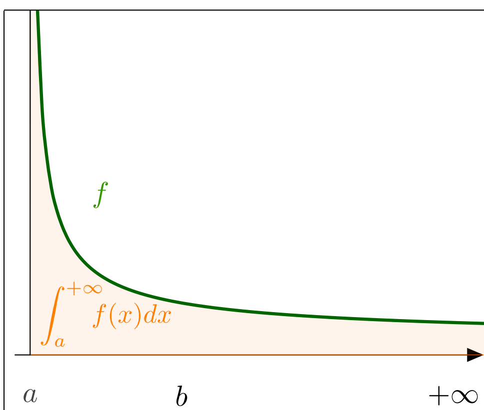
A. f continue sur $[a, b[$

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{c \to b} \int_a^c f(x)\ dx$$



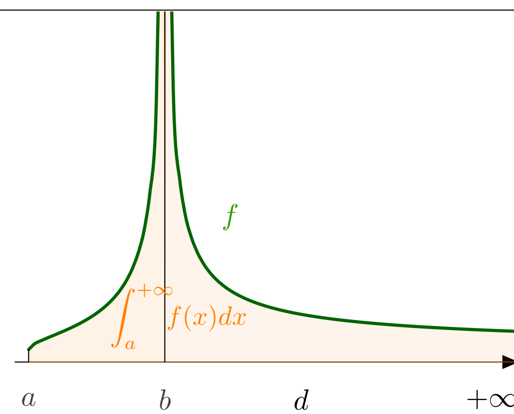
C. f continue sur $\mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx = \lim_{c \to -\infty} \int_c^0 f(x)\ dx + \lim_{c \to +\infty} \int_0^c f(x)\ dx$$



B. f continue sur $]a, +\infty[$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\ dx = ?$$



D. f continue sur $[a, +\infty[\setminus\{b\}$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\ dx = ?$$

Réponse pour **B***:* on choisit un point $b \in]a, +\infty[$ et l'on pose :

$$\int_a^{+\infty} f(x)\ dx = \lim_{c \to a} \int_c^b f(x)\ dx + \lim_{c \to +\infty} \int_b^c f(x)\ dx$$

Réponse pour **D** *:* on choisit un point $d \in]b, +\infty[$ et l'on pose :

$$\int_a^{+\infty} f(x)\ dx = \lim_{c\to b} \int_a^c f(x)\ dx + \lim_{c\to b} \int_c^d f(x)\ dx + \lim_{c\to+\infty} \int_d^c f(x)\ dx$$

11. Exemples Les intégrales suivantes sont-elles des intégrales généralisées ? Où sont situés leurs problèmes de définition ? Comment les calculer ?

a. $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$;

b. $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$;

c. $I = \displaystyle\int_{1/2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{|x-1|}}$; on pourra avoir à utiliser l'exercice 2f.

d. $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t\sqrt{|\ln t|}}$.

Solutions

a. Fonction non définie en 1.
$I = \displaystyle\lim_{c\to 1} \int_0^c \frac{dx}{\sqrt{1-x}}\ dx = 2$. Si on ne voit pas de primitive évidente de la fonction à intégrer, on peut faire le changement de variable $y = 1 - x$.

b. $I = \displaystyle\lim_{c\to-\infty} \int_c^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{c\to+\infty} \int_0^c \frac{dx}{1+x^2} = \pi$; On peut aussi remarquer que la fonction est paire et donc que, si l'intégrale sur $[0, +\infty[$ est convergente, alors celle sur $]-\infty, +\infty[$ l'est aussi et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} = 2\int_0^{+\infty}.$$

c. Intervalle non borné, fonction non définie en 1. Il faut définir l'intégrale I ainsi :

$$I = \lim_{c\to 1^-} \int_{1/2}^c \frac{dx}{x^2\sqrt{|x-1|}} + \lim_{c\to 1^+} \int_c^2 \frac{dx}{x^2\sqrt{|x-1|}} + \lim_{c\to+\infty} \int_2^c \frac{dx}{x^2\sqrt{|x-1|}}.$$

Le choix du point de coupure en 2 est arbitraire. On peut dès lors lever les valeurs absolues puisque, si $x \le 1$, $|x-1| = 1-x$ et si $x \ge 1$: $|x-1| = x-1$. Donc :

$$I = \lim_{c\to 1^-} \int_{1/2}^c \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x}} + \lim_{c\to 1^+} \int_c^2 \frac{dx}{x^2\sqrt{x-1}} + \lim_{c\to+\infty} \int_2^c \frac{dx}{x^2\sqrt{x-1}}.$$

Changements de variables : $u = \sqrt{1-x}$ dans la première intégrale et $u = \sqrt{x-1}$ dans les deux suivantes.

$$I = -2\lim_{c\to 1^-} \int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{1-c}} \frac{du}{(1-u^2)^2} + 2\lim_{c\to 1^+} \int_{\sqrt{c-1}}^1 \frac{du}{(u^2+1)^2} + 2\lim_{c\to+\infty} \int_1^{\sqrt{c-1}} \frac{du}{(u^2+1)^2}.$$

Pour utiliser ensuite l'exercice 2f, on constate que :

$$\frac{1}{(u^2+1)^2} = \frac{u^2+1}{(u^2+1)^2} - \frac{u^2}{(u^2+1)^2} = \frac{1}{u^2+1} - \frac{u^2}{(u^2+1)^2}$$

et l'on trouve : $I = \ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2} + (\pi/2)$.

d. Fonction définie ni en 0 ni en 1 :

$$I = \int_0^{1/2} \frac{dt}{t|\ln t|^{1/2}} + \int_{1/2}^1 \frac{dt}{t|\ln t|^{1/2}}$$

avec :

$$\int_0^{1/2} \frac{dt}{t|\ln t|^{1/2}} = \lim_{c\to 0} \int_c^{1/2} \frac{dt}{t|\ln t|^{1/2}} \text{ et } \int_{1/2}^1 \frac{dt}{t|\ln t|^{1/2}} = \lim_{d\to 1} \int_{1/2}^d \frac{dt}{t|\ln t|^{1/2}}.$$

Remarquons que, pour $t \in]0,1[$, $\ln t \leq 0$ et donc $|\ln t| = -\ln t$. Changement de variable $x = -\ln t$ (et donc $dx = -dt/t$) :

$$\int_c^{1/2} \frac{dt}{t(-\ln t)^{1/2}} = -\int_{-\ln c}^{-\ln(1/2)} \frac{dx}{x^{1/2}} = -2[\sqrt{x}]_{-\ln c}^{-\ln(1/2)} = -2[\sqrt{x}]_{\ln(1/c)}^{\ln 2} = -2\sqrt{\ln 2} + 2\sqrt{\ln(1/c)}.$$

Quand c tend vers 0^+, $1/c$ tend vers l'infini et donc :

$$\lim_{c\to 0} \int_c^{1/2} \frac{dt}{t(-\ln t)^{1/2}} = +\infty.$$

Le même changement de variable montre que :

$$\int_{1/2}^d \frac{dt}{t(-\ln t)^{1/2}} = -2[\sqrt{x}]_{-\ln(1/2)}^{-\ln d} = -2[\sqrt{x}]_{\ln 2}^{\ln(1/d)} = -2\sqrt{\ln(1/d)} + 2\sqrt{\ln 2}.$$

Quand d tend vers 1, $\ln(1/d)$ tend vers $\ln 1 = 0$ et donc :

$$\lim_{d\to 1} \int_{1/2}^d \frac{dt}{t|\ln t|^{1/2}} = 2\sqrt{\ln 2}.$$

Il ne reste plus qu'à additionner les deux limites trouvées pour obtenir :

$$I = +\infty.$$

L'intégrale I est donc divergente.

Intégrales généralisées : étude de la convergence

1. *Intégrales de fonctions à valeurs de signe constant.* Étudier la convergence des intégrales suivantes. On ne demande pas d'en calculer la valeur.

Série 1

a. $I = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$.

b. $I = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sin t}$;

c. $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$;

d. $I = \int_{-1}^{1} \frac{dt}{t}$;

e. $I = \int_1^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2}\, dt$;

Série 2

a. $I = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-\cos t}}$;

b. $I = \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t\sqrt{t}}\, dt$;

c. $I = \int_0^{\pi} \ln(\sin x)\, dx$;

d. $I = \int_2^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t-10}+t}$;

e. $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^{1/2}+5x^2}$.

Correction.

Série 1

a. La fonction à intégrer est continue sur $[1,2]$ donc l'intégrale est de même nature que l'intégrale de référence $\int_1^{+\infty} dx/x^2$ qui est convergente car $2 > 1$.

b. Fonction non définie en 0. À valeurs positives sur l'intervalle $]0,\pi/2]$. En 0, $\sin t \sim t$. Comparaison par équivalents avec intégrale de référence DV : I DV.

c. Pb en $+\infty$. Fct à valeurs positives. Pour $t \geq 1$: $e^{-t^2} \leq e^{-t}$. Comparaison par majoration avec une intégrale de référence CV : I CV.

d. Fct non définie en 0, il faut étudier les deux intégrales $\int_{-1}^{0}$ et $\int_0^1$. Les deux sont DV (on peut les calculer) : I est DV.

e. Pb en $+\infty$. Fct à valeurs positives. Quand $t \to +\infty$, $\cos(1/t) \to 1$ donc $(\cos(1/t))/t^2 \sim 1/t^2$. Comparaison par équivalents avec intégrale de référence convergente $(2 > 1)$: l'intégrale converge.

f. Fonction non définie en 0, à valeurs positives. Quand x tend vers 0, $x^{1/2} + 5x^2 \sim x^{1/2}$. Comparaison par équivalents avec intégrale de référence CV (car $1/2 < 1$) : I CV.

Série 2

a. Fonction à valeurs positives, continue sur $]0,1]$ mais pas en 0. Quand t tend vers 0, $\cos t = 1 - t^2 + o(t^2)$ donc $1-\cos t \sim t^2$ et $\sqrt{1-\cos t} \sim t$. Comparaison par équivalents avec intégrale de référence DV : I DV.

b. Fonction à valeurs positives, continue sur $]0,1]$ mais pas en 0. Quand t tend vers 0, $e^{-t} = 1-t+o(t)$, donc $1-e^{-t} \sim t$. Comparaison par équivalents avec intégrale de référence CV (car $1/2 < 1$) : I CV.

c. Le sinus s'annule en 0 et π, donc la fonction est définie sur $]0,1[$ mais pas en 0 ni en π. Elle est à valeurs de signe constant (≤ 0), donc on peut raisonner par équivalences.

On écrit $\int_0^\pi = \int_0^{\pi/2} + \int_{\pi/2}^\pi$. On se rappelle que $\sin(x) = \sin(\pi - x)$. Le changement de variable $t = \pi - x$ permet de voir que

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin x)\ dx = \int_0^{\pi} \ln(\sin t)\ dt.$$

Il suffit donc d'étudier l'intégrale $\int_0^\pi$. Quand $x \to 0$, $\sin x/x \to 1$. On a :

$$\ln(\sin x) = \ln\left(x\frac{\sin x}{x}\right)$$

et donc :

$$\ln(\sin x) = \ln(x) + \ln(\sin x/x) \sim \ln x$$

L'intégrale $\int_0^{\pi/2} \ln x\ dx$ CV (on peut la calculer). Comparaisons par équivalents : I converge.

d. Fait en cours.

e. Borne infinie et fonction non définie en 0, à valeurs positives.

Etude de l'intégrale $I_1 = I = \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}+5x^2}$: quand x tend vers 0, $x^{1/2}+5x^2 \sim x^{1/2}$. Comparaison par équivalents avec intégrale de référence CV (car $1/2 < 1$) : I_1 CV.

Etude de l'intégrale $I_2 = I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{1/2}+5x^2}$: quand x tend vers $+\infty$, $x^{1/2}+5x^2 \sim 5x^2$. Comparaison par équivalents avec intégrale de référence CV (car $2 > 1$) : I_2 CV.

Conclusion : $I = I_1 + I_2$ est convergente.

2. Quelle est la nature de l'intégrale suivante ?

$$I = \int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt.$$

Proposition : Intégrale faussement généralisée

Soient a et b deux réels et f une fonction continue sur un intervalle $]a,b]$. Si f admet une limite finie l en a, alors l'intégrale généralisée

$$\int_a^b f(x)\ dx$$

est convergente.

3. **a.** La proposition est-elle encore vraie si $b = +\infty$?

b. Soit f une fonction continue sur $[1, +\infty[$. On suppose que $f(x)$ tend vers une limite finie l en $+\infty$. Peut-on en déduire que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ est convergente ?

c. ⋆ ⋆ Soit f une fonction continue sur $[1, +\infty[$. Si l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente, peut-on en déduire que $f(x)$ tend vers 0 à l'infini ?

4. *Convergence absolue.* Étudier la convergence des intégrales suivantes.

a. $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{6/5} dx$;

b. $I = \displaystyle\int_0^{1} \sin\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} x^{-k}\,dx$;

c. $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha(1+t^2)}\,dt$, avec $\alpha > -1$.

Correction.

a. La fonction est continue sur $]0, 1]$ et a pour limite 1 quand x tend vers 0. L'intégrale $\int_0^1$ est donc faussement généralisée et I est de même nature que l'intégrale $I_2 = \int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{6/5} dx$.

Pour tout $x \geq 1$:

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right|^{6/5} \leq \frac{1}{x^{6/5}}.$$

Comparaison avec une intégrale de référence convergente (car $6/5 > 1$) : I_2 est absolument convergente et donc convergente. Donc I est convergente.

b. Fonction continue sur $]0, 1]$ mais pas en 0. Elle n'est pas continue en 0. La fonction n'est pas de signe constant, on étudie la convergence absolue de l'intégrale.

$$\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} x^{-k}\right| \leq e^{-\frac{1}{x}} x^{-k} = u^k e^{-u} \text{ avec } u = 1/x.$$

Croissances comparées : $e^{-u} \leq 1/u^k$ pour tout u suffisamment grand. Et donc, pour tout x suffisamment petit :

$$e^{-\frac{1}{x}} x^{-k} \leq x^k x^{-k} = 1.$$

L'intégrale $\int_0^1 1\,dx$ est bien définie, donc, par comparaison par majoration, l'intégrale I est absolument convergente, donc convergente.

c. La fonction est à valeurs positives. En 0 :

$$\frac{\sin t}{t^\alpha(1+t^2)} \sim \frac{t}{t^\alpha} = \frac{1}{t^{\alpha-1}}.$$

Comparaison par équivalents avec une intégrale de référence : l'intégrale I converge si $\alpha - 1 < 1$, c'est-à-dire si $\alpha < 2$.

5. *Étude de la convergence de l'intégrale :*

$$I = \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$$

a. Soit $c > 1$. Démontrer que :

$$\int_{\pi}^{c} \frac{\sin t}{t} dt = -\frac{\cos c}{c} - \frac{1}{\pi} - \int_{\pi}^{c} \frac{\cos t}{t^2} dt.$$

b. Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt.$

c. En déduire la nature de l'intégrale I.

d. Soit $\alpha > 0$. En procédant de la même manière, étudier la convergence de l'intégrale :

$$I_\alpha = \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt.$$

e. En procédant de la même manière, étudier la convergence de l'intégrale :

$$J = \int_{2}^{+\infty} \frac{\cos 2t}{t(\ln t)^\alpha}\, dt.$$

6. *Free style.* Étudier la convergence des intégrales suivantes.

Série 1

a. $\displaystyle I = \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$

b. $\displaystyle I = \int_{1}^{+\infty} \frac{dt}{t(t^3 + 2\sin t)}$;

c. $\displaystyle I = \int_{0}^{+\infty} \frac{\cos(x^2)}{|\ln x| + x^2} dx$;

d. $\displaystyle I = \int_{0}^{+\infty} \frac{\sqrt{s} + 1}{s^2 + \sqrt{s}} ds$;

e. $\displaystyle I = \int_{0}^{2} \frac{dx}{x + 5\sqrt{x}}$;

f. $\displaystyle I = \int_{1}^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t^2 + 2}}$;

g. $\displaystyle I = \int_{0}^{1} \frac{u\sqrt{u}}{e^{u^2} - 1}\, du$;

h. $\displaystyle I = \int_{2}^{+\infty} \frac{\ln t}{t - 1} dt.$

Série 2

a. $\displaystyle I(s) = \int_{1}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2 + s^2} dt$;

b. $\displaystyle I_n = \int_{0}^{\pi} \frac{\sin nx}{x} dx$;

c. $\displaystyle I(t) = \int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{3 + \cos x} dx$;

d. $\displaystyle I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2x}}{2 - \sin x} dx$;

e. $\displaystyle I(s) = \int_{1}^{+\infty} \frac{\sin st}{t(3 + \sqrt{t})} dt$;

f. $\displaystyle I = \int_{0}^{+\infty} \ln(x) e^{-x} dx$;

g. $\displaystyle I = \int_{0}^{1} \frac{\ln(t)}{t - 1} dt.$

Réponses.

Série 1

a. fait en cours.

b. CV : comparaison avec int. de référence CV car $4 > 1$;

c. La fonction tend vers 0 en 0 donc pas de problème en 0 (intégrale faussement généralisée). L'intégrale $\int_1^{+\infty}$ CV absolument par majoration avec int. de référence CV ($2 > 1$) donc converge.

d. La fct est à valeurs positives. Elle est équivalente en 0 à $1/\sqrt{s}$ et en $+\infty$ à $1/s^2$. I est convergente.

e. La fct est à valeurs positives. Elle est équivalente en 0 à $1/5\sqrt{x}$. I est convergente.

f. La fct est à valeurs positives. Elle est équivalente en $+\infty$ à $1/t^2$. I est convergente.

g. La fct est à valeurs positives. Elle est équivalente en 0 à $u\sqrt{u}/u^2$, c'est-à-dire à $1/\sqrt{u}$. I est convergente.

h. La fonction est positive et minorée par $\ln t/t$ et donc par $1/t$. I est divergente.

Série 2

a. L'intégrale converge absolument par majoration par l'intégrale de référence $\int_1^{+\infty} dt/t^2$ qui converge car $2 > 1$.

b. En 0, la fonction est équivalente à nx/x et donc tend vers une valeur finie n. L'intégrale converge.

c. Fonction à valeurs positives, majorée par $e^{-tx}/2$. Comparaison par majoration avec l'intégrale de référence $\int_0^{+\infty} e^{-tx}dx$: I converge si $t > 0$. D'autre part, la fonction est minorée par $e^{-tx}/4$. Donc, par comparaison par minoration avec l'intégrale de référence $\int_0^{+\infty} e^{-tx}dx$: l'intégrale I diverge si $t \leq 0$.

d. L'intégrale $\int_{-\infty}^{0}$ diverge par comparaison par minoration avec l'intégrale divergente $\int_{-\infty}^{0}(1/3)dx$. Donc I DV.

e. L'intégrale converge absolument par comparaison par majoration avec une intégrale de référence convergente (car $3/2 > 1$).

Série 2, suite

f. Pb en 0 : signe constant sur $]0, 1]$, l'intégrale $\int_0^1$ CV par comparaison par majoration avec l'intégrale $\int_0^1 \ln x \; dx$ qui converge (on la calcule).

Pb en $+\infty$: pour x suffisamment grand, $\ln x \leq x$ et $e^{-x} \leq x^{-3}$ (croissances comparées). Comparaison avec l'int. de référence $\int_1^{+\infty} x^{-2}dx$: l'intégrale $\int_1^{+\infty} \ln x e^{-x}dx$ est CV. Donc I CV.

g. Signe constant ; pb en 0 et 1. L'intégrale $\int_0^{1/2}$ CV par comparaison par équivalence avec l'intégrale convergente $\int_0^{1/2}(-\ln t)\; dt$ (qui se calcule) ; l'intégrale $\int_{1/2}^{1}$ s'étudie en faisant le chgt de variable $x = 1 - t$ puis en raisonnant par équivalents. Elle converge, donc I CV.