Université Paris-Saclay **Intégration MDD302**
L3 DD **2024–2025**

Partiel: 25/10/2024- Corrigé

Durée 2 heures.
Soigner la rédaction et la présentation.
Les documents, y compris sous forme électronique, ne sont pas autorisés.
Les calculatrices, tablettes, ordinateurs, montres connectées, sont interdits. Les téléphones portables, éteints et rangés.

Questions de cours

1. Écrire la définition d'une fonction Lebesgue intégrable f définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[0, +\infty]$, puis à valeurs dans $\mathbb{R}$, et enfin à valeurs dans $\mathbb{C}$, et donner la définition de son intégrale dans les deux derniers cas. (cf cours: la rédaction devait être impeccable pour avoir tous les points.)

2. En admettant les questions de mesurabilité, montrer que si $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sont intégrables, et $a, b \in \mathbb{C}$, alors $af + bg$ est intégrable.

   C'est une partie d'un théorème du cours: On admet la mesurabilité de $af + bg$. On a l'inégalité triangulaire $|af + bg| \leq |a||f| + |b||g|$. Donc par comparaison et linéarité positive $\int_{\mathbb{R}} |af + bg|\, d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}} |a||f| + |b||g|\, d\lambda = |a| \int_{\mathbb{R}} |f|\, d\lambda + |b| \int_{\mathbb{R}} |g|\, d\lambda$. Le membre de droite est fini car f et g sont intégrables. Donc $af + bg$ est intégrable (cf définition).

Exercice 1. Soit $f \colon]0, 1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{t-1}{\ln t}$.

1. Vérifier que f est à valeurs positives et donner ses limites aux bornes de l'intervalle.

   $0 < t < 1$ implique $t - 1 < 0$ et $\ln t < 0$, donc $f(t) > 0$. Si $t \to 0$, $f(t) \to \frac{-1}{-\infty} = 0$. Si $t \to 1$, $f(t) = \frac{t-1}{\ln t - \ln 1} \to \frac{1}{\ln' 1} = 1$.

2. Justifier que f est intégrable sur $]0, 1[$.

   f est continue sur $]0, 1[$ avec des limites finies en 0 et en 1. Donc f est bornée sur $]0, 1[$ (on peut la prolonger en une fonction continue sur le segment $[0, 1]$, donc bornée). Par le cours, on en déduit que f est intégrable sur $]0, 1[$.

Exercice 2. Soit $g \colon [1, +\infty[\to [0, +\infty[$ une fonction continue et bornée. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, on pose $f_n(x) = \dfrac{n^2 g(x)}{n^2 x^2 + 1}$, $x \geq 1$.

1. La fonction $x \mapsto \dfrac{g(x)}{x^2}$ est-elle intégrable sur $[1, +\infty[$? (Justifier)

   Comme g est bornée, il existe $M < +\infty$ tel que $|g(x)| \leq M$ pour tout $x \in [1, +\infty[$. Or g est aussi positive. Donc $0 \leq \dfrac{g(x)}{x^2} \leq \dfrac{M}{x^2}$. Comme $2 > 1$, $x \mapsto \dfrac{M}{x^2}$ intégrable sur $[1, +\infty[$ par le cours. Par comparaison, la fonction $x \mapsto \dfrac{g(x)}{x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

2. Montrer que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement et uniformément sur $[1, +\infty[$. Donner l'expression de la limite.

   Si $x \geq 1$, on a $f_n(x) = \dfrac{g(x)}{x^2 + 1/n^2} \to \dfrac{g(x)}{x^2}$ si $n \to +\infty$. Ensuite $|f_n(x) - \dfrac{g(x)}{x^2}| \leq \dfrac{g(x)/n^2}{x^2(x^2 + 1/n^2)} \leq M/n^2$ car le dénominateur est $\geq x^4 \geq 1$. Donc $\sup_{x \geq 1} |f_n(x) - \dfrac{g(x)}{x^2}| \leq M/n^2$. Comme $M/n^2 \to 0$, cela montre la convergence uniforme de f_n vers $f : x \mapsto \dfrac{g(x)}{x^2}$ sur $[1, +\infty[$.

3. Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 1}$ des intégrales $I_n = \displaystyle\int_{[1,+\infty[} f_n \, d\lambda$ converge (dans $[0,+\infty]$) et donner l'expression de la limite I.

   On ne peut pas utiliser un critère de convergence uniforme sur un intervalle non borné. Le seul résultat qu'on connaît pour l'instant est la convergence monotone. Or f_n mesurable car continue, $f_n \geq 0$ et aussi $f_n \leq f_{n+1}$ (le vérifier sur la copie) pour tout $n \geq 1$ et $f_n \to f$ simplement. Donc on sait que $I_n \to \int_{[1,+\infty[} f \, d\lambda = I$.

4. En déduire $I < +\infty$.

   On a montré dans la question 1 que f est intégrable sur $[1,+\infty[$ donc $I < +\infty$.

Exercice 3. Soit $a \in]0,+\infty[$ et $s \in \mathbb{R}$. On pose $f(x) = x^{s-1}e^{-ax}$ pour $x \in]0,+\infty[$.

1. (Question de cours) Justifier en faisant la démonstration que f est intégrable sur $[1,+\infty[$.

   Voir cours.

2. Montrer que f est intégrable sur $]0,1]$ si $s > 0$.

   Le fonction f est continue sur $]0,1]$ donc mesurable. On a $0 \leq e^{-ax} \leq e^{-0} = 1$ car l'exponentielle $x \mapsto e^{-ax}$ est positive et décroissante. Donc $0 \leq f(x) \leq x^{s-1}$. Comme $x \mapsto x^{s-1}$ est intégrable sur $]0,1]$ car $s-1 > -1$, on a donc f intégrable par comparaison.

3. Est-ce que f est intégrable sur $]0,1]$ si $s \leq 0$? Pourquoi?

   Si $x \in]0,1]$, par croissance de l'exponentielle, $e^{-ax} \geq e^{-a} > 0$ donc $|f(x)| = f(x) \geq x^{s-1}e^{-a}$ qui n'est pas intégrable sur $]0,1]$ puisque $s-1 \geq -1$ (cours). Donc par comparaison f non plus (cf cours).

   Pour $s > 0$ et on pose $\Gamma(s) = \displaystyle\int_{]0,+\infty[} x^{s-1}e^{-x} \, d\lambda(x)$.

4. Montrer, en justifiant les étapes du calcul, que $\displaystyle\int_{]0,+\infty[} f(x) \, d\lambda(x) = \frac{\Gamma(s)}{a^s}$ si $s > 0$.

   Par les questions 1 et 2, on sait que f est intégrable sur $]0,1]$ et $[1,+\infty[$ donc sur $]0,+\infty[$. On a alors par le cours que $\int_{]0,+\infty[} f(x) \, d\lambda(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_{[1/n,n]} f(x) \, d\lambda(x)$ et on fait le changement de variable C^1, $x = y/a = \varphi(y)$. Alors $\int_{[1/n,n]} f(x) \, d\lambda(x) = \int_{[a/n,an]} (y/a)^{s-1}e^{-y} \, (1/a) \, d\lambda(y)$. On fait enfin $n \to +\infty$ et on trouve $\dfrac{1}{a^s} \int_{]0,+\infty[} y^{s-1}e^{-y} \, d\lambda(y) = \dfrac{\Gamma(s)}{a^s}$. (On peut aussi utiliser l'homogénéïté de l'intégrale sur $\mathbb{R}$ en écrivant $f(x) = a^{-s+1}1_{]0,+\infty[}(ax)(ax)^{s-1}e^{-ax}$, positive et intégrable, donc $\int_{\mathbb{R}} f(x) \, d\lambda(x) = a^{-s+1}|a|^{-1} \int_{\mathbb{R}} 1_{]0,+\infty[}(y)y^{s-1}e^{-y} \, d\lambda(y) = a^{-s}\Gamma(s)$.)

5. Montrer la relation pour $s > 1$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_{]0,+\infty[} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} \, d\lambda(x).$$

   En utilisant la question précédente avec $s > 1$ (qui assure que la série converge)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{]0,+\infty[} x^{s-1}(e^{-x})^n \, d\lambda(x).$$

   D'après le cours pour les séries de fonctions mesurables et positives on peut échanger $\sum$ et $\int$. Donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_{]0,+\infty[} x^{s-1} \sum_{n=1}^{+\infty} (e^{-x})^n \, d\lambda(x).$$

On a si $x > 0$, $0 < e^{-x} < 1$ donc la série géométrique converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (e^{-x})^n = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{1}{e^x - 1}.$$

D'où le résultat (remarque, on peut prendre $s > 0$ pour établir ce résultat (fonctions positives). Lorsque $s \leq 1$, la série ne converge pas (elle vaut $+\infty$) et on peut voir par comparaison que la fonction $x \mapsto \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}$ n'est pas intégrable sur $]0, 1]$).