Cours de Maths du S1 :
Bloc 3

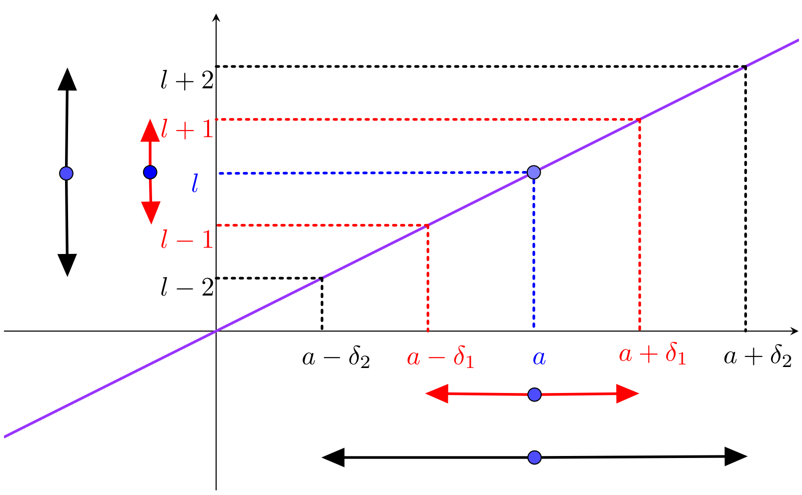


Table des matières

Chapitre 7

AAV 5 : Limites

Liste des Savoir-Faire du chapitre :

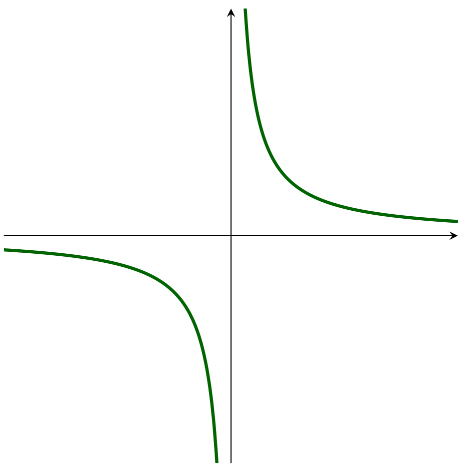
- ☐ SF14 : Connaître les limites de fonctions usuelles
- ☐ SF13 : Savoir calculer une limite par application des règles de calculs, sans FI
- ☐ SF17 : Savoir calculer une limite savoir factoriser/simplifier pour lever une FI
- ☐ SF15 : Savoir calculer une limite à l'aide des croissances comparées
- ☐ SF1266 : Savoir calculer une limite par compositions de limites

7.1 Définitions

7.1.1 Mesurer la distance entre deux réels

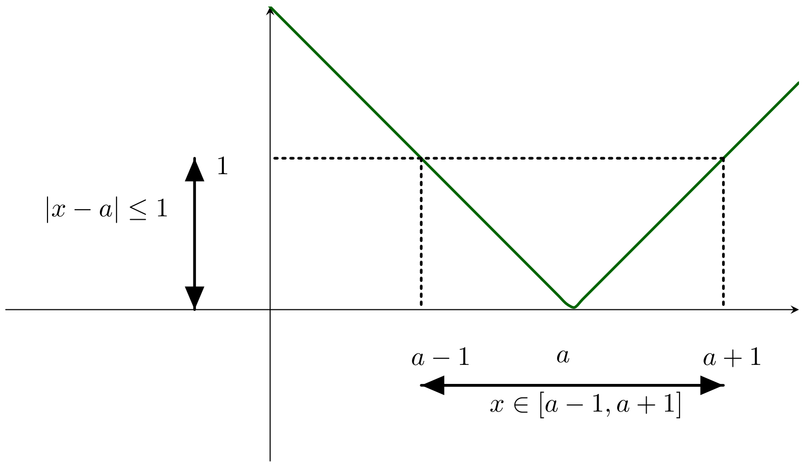
Qu'est-ce que la notion de limite ?

Quand vous étudiez une fonction, on l'étudie dans le domaine de définition et vous tracez son allure sur son domaine de définition. Cependant, on peut se poser la question du comportement de la fonction aux extrémités du domaine. Par exemple, considérons la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$. En regardant le dessin, si on va à l'extrémité droite en x (x se rapproche de $+\infty$), $f(x)$ décroit et semble se rapprocher de la valeur 0. Autrement dit, à la limite droite du domaine, $f(x)$ semble tendre vers 0. De même si x se rapproche de 0 par valeurs positives, il semble clair que $f(x)$ croit et se rapproche de $+\infty$.



Avec quel outil matérialiser le fait que "x se rapproche de quelque chose" ?

Quand on dit que "x se rapproche d'un point a" ou que "$f(x)$ se rapproche de l", il y a une notion de distance derrière. "x se rapproche de a" signifie que la distance entre les réels x et a diminue. La distance entre deux réels x et a est donnée par $|x-a|$. En effet, si $|x-a| \leq 1$ cela signifie que $-1 \leq x-a \leq 1$ c'est-à-dire que $x \in [a-1, a+1]$ comme on peut le voir sur le tracé de $|x-a|$.



Questions :

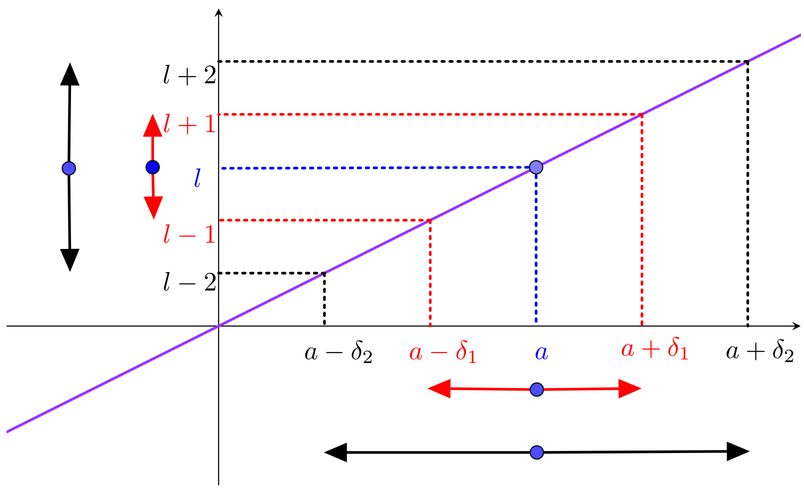
Traduire mathématiquement avec puis sans valeur absolue : "x et y sont éloignés au plus de 2".

Cela peut s'écrire $|x-y| \leq 2$ ou encore $-2 \leq x-y \leq 2$.

7.1.2 Définitions

Comment définir la limite en un réel ?

Prenons l'exemple de cette fonction qui semble tendre vers l quand x tend vers a. Prenons un intervalle de taille 2 autour de l, le fait que f tende vers l se traduit par le fait que dans un voisinage de a, $f(x)$ entre dans cet intervalle. Ici, c'est pour $x \in [a-\delta_2, a+\delta_2]$ que $f(x)$ est dans l'intervalle. Prenons un intervalle de taille 1 autour de l, le fait que f tende vers l se traduit par le fait que dans un voisinage de a, $f(x)$ entre dans cet intervalle. Ici, c'est pour $x \in [a-\delta_1, a+\delta_1]$ que $f(x)$ est dans l'intervalle. En fait, cela marche, quel que soit la taille de l'intervalle autour de l. Si on prend n'importe quel intervalle de taille ϵ, on pourra trouver un voisinage $[a-\delta, a+\delta]$ de a, pour lequel $f(x)$ est dans l'intervalle de taille ϵ.



Traduisons en mathématiques cette phrase en français :

- Si on prend n'importe quel intervalle de taille ϵ : $\forall [l-\epsilon, l+\epsilon]$.
- on pourra trouver un voisinage : $\exists [a-\delta, a+\delta]$.
- pour lequel $f(x)$ est dans l'intervalle de taille ϵ : si $x \in [a-\delta, a+\delta]$, $f(x) \in [l-\epsilon, l+\epsilon]$ ou encore si $|x-a| \leq \delta$ alors $|f(x)-l| \leq \epsilon$.

Les définitions qui suivent sont difficiles : elle ne sont pas à connaître pour ce cours, en revanche, il est important de comprendre d'où elles viennent.

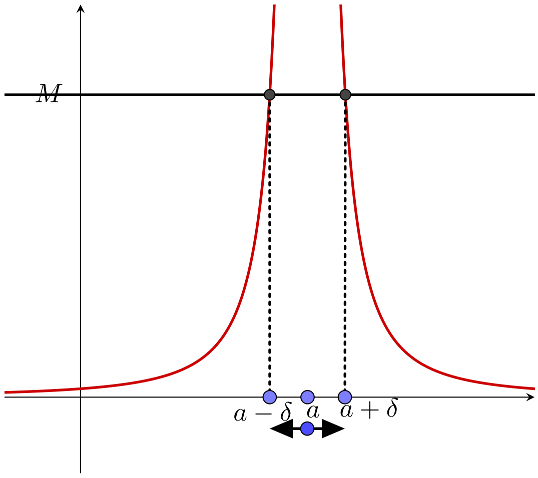
Définition 1: Limite réelle en un réel

Soient a et l deux réels, on dit qu'une fonction f tend vers l quand x tend vers a si :

pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $x \in [a-\delta, a+\delta]$ alors $f(x) \in [l-\epsilon, l+\epsilon]$ ce qui se récrit ainsi avec des quantificateurs :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, |x-a| \leq \delta \Longrightarrow |f(x)-l| \leq \epsilon.$$

De la même manière, on peut définir le fait qu'une fonction tende vers $+\infty$ en un réel a. Cette fois, quand x tend vers a, $f(x)$ ne s'approche pas d'un réel l mais devient arbitrairement grand. Autrement dit, si on prend un réel M quelconque, si on veut que $f(x)$ tende vers $+\infty$, il faut que pour x suffisamment proche de a, $f(x)$ dépasse le réel M. Ce qui donne cette définition.



Définition 2: Limite infinie en un réel

Soient a et l deux réels, on dit qu'une fonction f tend vers $+\infty$ quand x tend vers a si :
pour tout $M > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $x \in [a-\delta, a+\delta]$ alors $f(x) \geq M$ ce qui se récrit ainsi avec des quantificateurs :

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x, |x-a| \leq \delta \Longrightarrow f(x) \geq M.$$

On peut également de manière similaire définir la notion de limite lorsque x tend vers $+\infty$.

Définition 3: Limite réelle en l'infini

Soient a et l deux réels, on dit qu'une fonction f tend vers l quand x tend vers $+\infty$ si :
pour tout $\epsilon > 0$, il existe $M > 0$ tel que si $x \geq M$ alors $f(x) \in [l-\epsilon, l+\epsilon]$ ce qui se récrit ainsi avec des quantificateurs :

$$\forall \epsilon > 0, \exists M > 0, \forall x, x \geq M \Longrightarrow |f(x)-l| \leq \epsilon.$$

Définition 4: Limite infinie en l'infini

Soient a et l deux réels, on dit qu'une fonction f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si :
pour tout $M > 0$, il existe $N > 0$ tel que si $x \geq N$ alors $f(x) \geq M$ ce qui se récrit ainsi avec des quantificateurs :

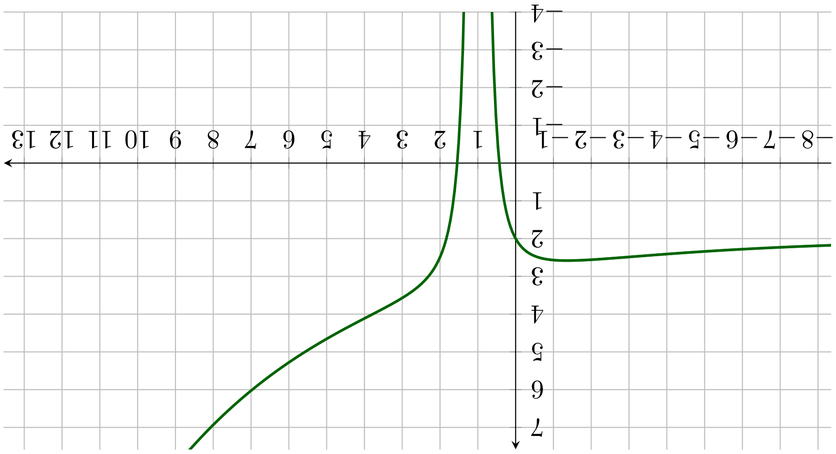
$$\forall M > 0, \exists N > 0, \forall x, x \geq N \Longrightarrow f(x) \geq M.$$

Remarque 1: Unicité de la limite

Une fonction ne peut avoir deux limites différentes en un même point. C'est un exercice (pas facile) que de le démontrer en utilisant les définitions ci-dessus.

Questions :

- Dessinez une fonction f dont la limite en $+\infty$ est $+\infty$, dont la limite en $-\infty$ est 2 et dont la limite en 1 est $-\infty$.
- Expliquez une des définitions de limite sur un graphique.



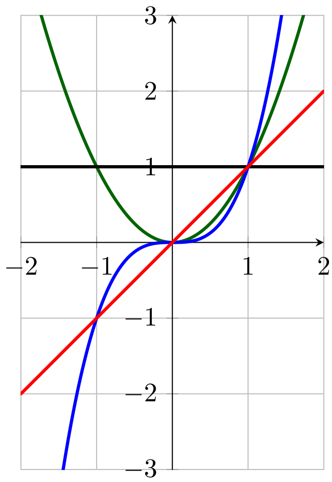
7.2 Limites usuelles

L'objectif de cette section est ici de déterminer les limites des fonctions usuelles. Pour s'en faire une bonne intuition, rien de tel qu'un bon dessin. Pour la démonstration rigoureuse, il faut en revenir aux définitions ci-dessus.

7.2.1 Fonctions polynomiales

Sur le dessin ci-contre vous avez les fonctions :

- en noir : $f_0 : x \mapsto 1$.
- en rouge : $f_1 : x \mapsto x$.
- en vert : $f_2 : x \mapsto x^2$.
- en bleu : $f_3 : x \mapsto x^3$.



Proposition 1:

Soit $k \geq 1$ un entier naturel,

- Si k est pair, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^k = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^k = +\infty$.
- Si k est impair, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^k = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^k = -\infty$.

Preuve pour ceux qui veulent aller plus loin:

Voici la preuve de : Si k est pair, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^k = +\infty$.

Traduction du but : Montrer que pour tout $M > 0$, on peut trouver N tel que $x \geq N$ implique que $x^k \geq M$ (définition 4).

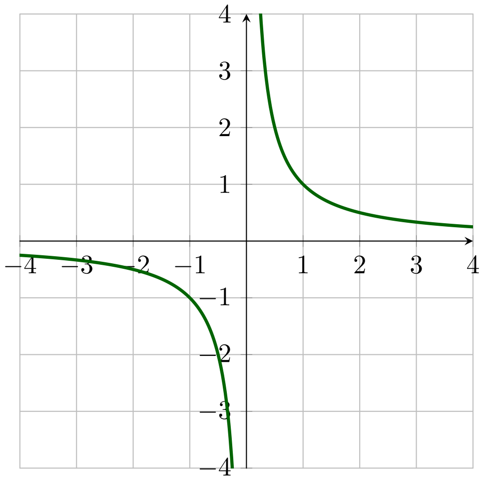
Or $x \geq N$ implique que $x^k \geq N^k$ car la fonction $x \mapsto x^k$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Donc $N = M^{\frac{1}{k}}$ convient.

- Inspirez vous de cette démo pour montrer que : si k est impair, $\lim_{x\to+\infty} x^k = +\infty$.
- Démontrer enfin les limites en $-\infty$: pour cela vous n'utiliserez pas lla définition. Vous exprimerez $(-x)^k$ en fonction de x^k selon que k soit pair ou impair et vous en déduirez les limites.

7.2.2 Fonction inverse

Proposition 2:

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.
- $\lim_{x\to 0_+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x\to 0_-} \frac{1}{x} = -\infty$. La fonction n'a pas de limite en 0.



Preuve :

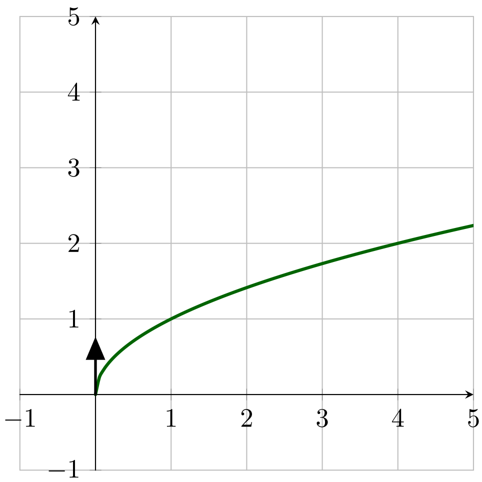
- Prouvez cette proposition à l'aide des opérations sur les limites vues en section 7.3.

- En $+\infty$, la limite du numérateur est 1, celle du dénominateur est $+\infty$ d'après la proposition 1. Donc la limite est 0.
- En 0^+, la limite du numérateur est 1, celle du dénominateur est 0^+. Donc la limite est $+\infty$. En 0^-, de même c'est $-\infty$.

7.2.3 Racine carrée

Proposition 3:

- $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$.



Preuve pour ceux qui veulent aller plus loin:

- A l'aide de la définition 4, prouvez cette limite.

But : $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

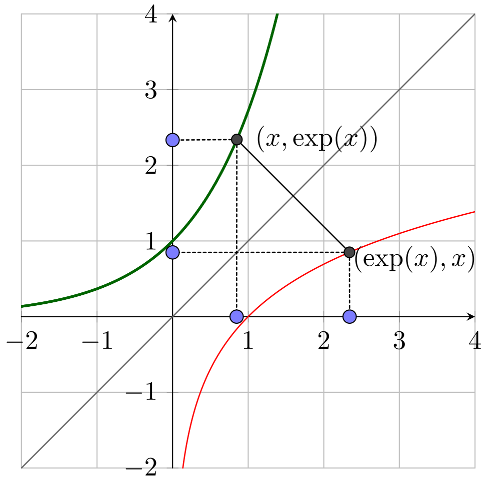
Traduction du but : Montrer que pour tout $M > 0$, on peut trouver N tel que $x \geq N$ implique que $\sqrt{x} \geq M$ (définition 4).

Or $x \geq N$ implique que $\sqrt{x} \geq \sqrt{N}$ car la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Donc $N = M^2$ convient.

7.2.4 Exponentielle, logarithme népérien

Proposition 4:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$.
- $\lim\limits_{x\to 0_+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.



Preuve à faire par tous :

Commençons par admettre que $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$.

- Exprimer $\exp(x)$ en fonction de $\exp(-x)$. En déduire la limite en $-\infty$ de $\exp(x)$.

$\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)}$. Quand x tend vers $-\infty$, $-x$ tend vers $+\infty$ et donc $\exp(-x)$ tend vers $+\infty$ (car on a admis que $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$). Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$ par quotient de limites.

On en déduit les deux limites de ln en exploitant le fait que ln et exp sont symétriques par rapport à $y = x$ comme on peut le voir sur le dessin.

Preuve pour ceux qui veulent aller plus loin:

On démontre ici que $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$.

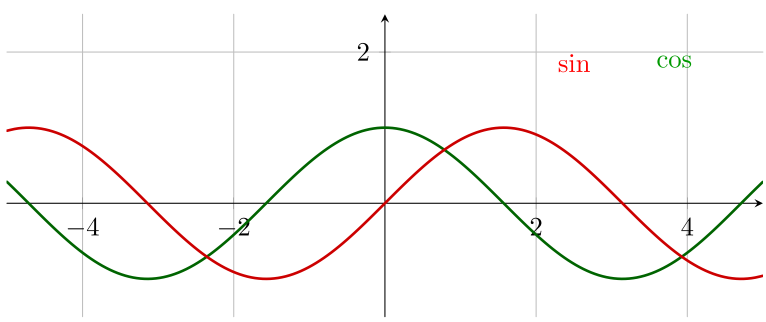
- On admet que la dérivée de l'exponentielle est elle-même. Démontrer que la fonction exp est croissante sur $\mathbb{R}$. On en déduit que $\exp(x)$ a une limite en $+\infty$ qu'on note l.
- Exprimer $\exp(x+1)$ à l'aide de $\exp(x)$. En déduire que $l = +\infty$.

- Comme pour tout x réel, $\exp'(x) = \exp(x)$ et que $\exp(x) > 0$, la fonction est croissante sur $\mathbb{R}$. Elle admet une limite qui est soit réelle soit $+\infty$.
- Pour tout x réel, $\exp(x+1) = \exp(x)\exp(1)$.
  Si la limite est réelle, en faisant tendre vers $+\infty$, on obtient $l = l\exp(1)$ donc $l(1-\exp(1)) = 0$. Or $\exp(1) > 1$ donc $l = 0$. Ceci est absurde car pour $x \geq 1$, $\exp(x) \geq \exp(1) > 1$. Donc $l = +\infty$.

7.2.5 Fonctions trigonométriques

Proposition 5:

- Les fonctions cos et sin n'ont pas de limite en $+\infty$.



Preuve :

Avec les mains : La fonction cos oscille entre -1 et 1 sur $[0, 2\pi]$. Etant $2\pi-$périodique, elle oscillera indéfiniment entre -1 et 1. Si elle convergeait, elle entrerait pour x grand dans un tunnel de taille 1 autour de sa limite. Ceci ne peut être réalisé puisqu'elle oscille avec une amplitude de 2.

Remarque 2: La vidéo associée

Il est temps de consulter la vidéo : *SF14 Connaître les limites de fonctions usuelles.*

Questions :

- Dessinez une fonction qui n'a pas de limite en 2 et qui n'a pas de limite en $-\infty$.

sin n'a pas de limite en $-\infty$.
Pour avoir une fonction qui n'a pas de limite en 2, il vous suffit de dessiner une fonction discontinue en 2 car alors ses limites à gauche et à droite sont différentes.

- Faites les 5 premières questions de l'exercice 2 page 17.
- Faites une feuille blanche pour vous remémorer les définitions/propositions/théorèmes du chapitre jusqu'ici. Ou alors défiez un de vos camarades pour restituer plusieurs définitions/propositions/-théorèmes de la partie.

7.3 Opérations sur les limites

Connaissant les limites usuelles, on peut obtenir des limites de fonctions très variées en faisant des sommes, produits, quotients de limites. Cette section recense les opérations essentielles sur les limites ainsi que les cas de figure où on ne peut conclure : les formes indéterminées.

Les résultats sont rassemblées dans trois tableaux de la forme

Opération	a
b	a Opération b

7.3.1 Somme

$+$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$l' \in \mathbb{R}$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI
$-\infty$	$-\infty$	FI	$-\infty$

Remarque 3: Forme indéterminée "$+\infty - \infty$"

- Calculez la limite de $x - x$ en $+\infty$. En utilisant que $x^2 - x = x(x-1)$, calculez la limite en $+\infty$ de $x^2 - x$. Qu'en concluez-vous ?

- $x - x = 0$ tend vers 0. $x^2 - x = x(x-1)$ tend vers $+\infty$ par produit de limites (x et $x-1$ tendent tous deux vers $+\infty$).

Ces deux limites sont au départ des formes " $+\infty - \infty$" : on voit bien pourquoi c'est indéterminé. Cela peut donner des limites différentes comme le prouvent nos deux exemples.

7.3.2 Produit

$\times$	$l > 0$	$l < 0$	$l = 0$	$+\infty$	$-\infty$
$l' > 0$	ll'	ll'	0	$+\infty$	$-\infty$
$l' < 0$	ll'	ll'	0	$-\infty$	$+\infty$
$l' = 0$	0	0	0	FI	FI
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$	$+\infty$

Remarque 4: Forme indéterminée "$+\infty \times 0$"

- Quelle est la limite en $+\infty$ de $e^x e^{-x}$, $e^{2x} e^{-x}$? Qu'en concluez-vous ?

- $e^x e^{-x} = 1$ tend vers 1. $e^{2x}e^{-x} = e^x$ tend vers $+\infty$.

Ces deux limites sont au départ des formes « $+\infty \times 0$ » : on voit bien pourquoi c'est indéterminé. Cela peut donner des limites différentes comme le prouvent nos deux exemples.

7.3.3 Quotient

/	$l > 0$	$l < 0$	$l = 0^+$	$l = 0^-$	$+\infty$	$-\infty$
$l' > 0$	$\frac{l}{l'}$	$\frac{l}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$
$l' < 0$	$\frac{l}{l'}$	$\frac{l}{l'}$	0	0	$-\infty$	$+\infty$
$l' = 0^+$	$+\infty$	$-\infty$	FI	FI	$+\infty$	$-\infty$
$l' = 0^-$	$-\infty$	$+\infty$	FI	FI	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	0	0	0	0	FI	FI
$-\infty$	0	0	0	0	FI	FI

Remarque 5: Forme indéterminée "$\frac{\infty}{\infty}$ et $\frac{0}{0}$"

- Déterminer la limite en $+\infty$ de $\frac{x}{x}$, $\frac{x^2}{x}$, $\frac{x}{x^2}$. Qu'en concluez-vous ?
- Déterminer la limite en 0 de $\frac{x}{x}$, $\frac{x^2}{x}$, $\frac{x}{x^2}$. Qu'en concluez-vous ?

- $\frac{x}{x} = 1$ tend vers 1, $\frac{x^2}{x} = x$ tend vers $+\infty$ et $\frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$ tend vers 0.

Ces trois limites sont au départ des formes « $\infty \times \infty$ » : on voit bien pourquoi c'est indéterminé. Cela peut donner des limites différentes comme le prouvent nos trois exemples.

- $\frac{x}{x} = 1$ tend vers 1, $\frac{x^2}{x} = x$ tend vers 0 et $\frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$ n'a pas de limite.

Ces trois limites sont au départ des formes « 0×0 » : on voit bien pourquoi c'est indéterminé. Cela peut donner des limites différentes comme le prouvent nos trois exemples.

Remarque 6: La vidéo associée

Il est temps de consulter la vidéo : *SF13 Savoir calculer une limite par application des règles de calculs, sans FI.*

Questions :

- Faites les questions 1, 3, 5, 7 de l'exercice 3 page 17.
- Récapitulez toutes les formes indéterminées et trouvez des fonctions non triviales pour lesquelles une des formes indéterminées apparaissent.

  - $\frac{0}{0}$: $\frac{x^2-4x+3}{x-1}$ en 1.
  - $\frac{\infty}{\infty}$: $\frac{2x^3-x+10}{x^2+1}$ en $-\infty$.
  - $0 \times \infty$: $x\ln(x)$ en 0.
  - $+\infty - \infty$: $x^3 - x$ en $+\infty$.
- Faites une feuille blanche pour vous remémorer les définitions/propositions/théorèmes du chapitre jusqu'ici. Ou alors défiez un de vos camarades pour restituer plusieurs définitions/propositions/-théorèmes de la partie.

7.4 Lever les indéterminations

7.4.1 Factorisation forcée en l'infini

Cherchons la limite de $x^3 - x$ en $+\infty$. On obtient " $+\infty - \infty$" qui est une forme indéterminée. Ce paragraphe traite d'une méthode pour lever ce type d'indétermination en l'infini. L'idée consiste à déterminer les termes "les plus gros" au voisinage de l'infini et de factoriser par eux. Par exemple, $x^3 - x$ a comme terme prépondérant x^3 en $+\infty$: on va donc factoriser par x^3.

Pourquoi "forcée" ?

Usuellement, quand on factorise, c'est qu'on peut déceler des termes communs dans plusieurs termes d'une somme. Pour $x^3 - x$, factoriser par x^3 c'est "forcer" la factorisation puisque x^3 n'est pas un terme commun. Seul x est commun aux deux termes. Cependant, l'objectif étant le calcul de la limite, c'est par x^3 qu'on va factoriser.

Remarque 7: La vidéo associée

Il est temps de consulter les 4 premières minutes de la vidéo : *SF17 Savoir factoriser/simplifier pour lever une FI dans un calcul de limite.*

Questions :

- Faites les questions 1 et 3 de l'exercice 5 18.
- Expliquez pourquoi factoriser par le terme prépondérant fait que la factorisation fait disparaître la forme indéterminée. En clair pourquoi ça peut échouer si on ne factorise pas par le prépondérant ?

-
- Factoriser permet de faire ressortir le terme allait le plus vite vers l'infini. Une fois sorti, il se simplifie et dans les parenthèses il est au dénominateur des différents termes : comme c'est le plus fort, aucun des termes restants ne peut tendre vers l'infini : l'indétermination est levée.

7.4.2 Factorisation en un réel

Cherchons la limite de $\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-6x+5}$ en 1. On obtient "$\dfrac{0}{0}$" qui est une forme indéterminée. Pour lever ce type d'indétermination, l'idée est de factoriser les trinômes via leurs racines.

Remarque 8: La vidéo associée

Il est temps de consulter les 4 dernières minutes de la vidéo : *SF17 Savoir factoriser/simplifier pour lever une FI dans un calcul de limite.*

Questions :

- Calculer la limite de $\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-6x+5}$ en 1.
- Expliquez quel mécanisme fait que la factorisation fait disparaître la forme indéterminée.

- $\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-6x+5} = \dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-5)} = \dfrac{x-3}{x-5}$. (Trouvez les racines et factorisez !).

  Donc quand x tend vers 1, $\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-6x+5}$ tend vers $\dfrac{-2}{-4} = \dfrac{1}{2}$.
- Factoriser permet de faire ressortir le terme qui annulait le numérateur et le dénominateur (ici $x-1$). Une fois sorti, il se simplifie et l'indétermination est levée.

7.4.3 Croissances comparées

Les croissances comparées permettent de comparer les vitesses de convergence des fonctions $x^\alpha, \exp(x), \ln(x)$ en $+\infty$.

Remarque 9: La vidéo associée

Il est temps de consulter la vidéo : *SF15 Savoir calculer une limite à l'aide des croissances comparées.*

Proposition 6: Croissances comparées

Soit $\alpha > 0$

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0.$
- $\lim\limits_{x\to0_+} x^\alpha \ln(x) = 0.$

Preuve :

Nous admettons ici les deux premières propriétés et nous en déduisons la troisième.

- Soit $X = \dfrac{1}{x}$, exprimer $x^\alpha \ln(x)$ en fonction de $\ln(X)$. Vers quoi tend X ? En déduire la limite $\lim\limits_{x\to0_+} x^\alpha \ln(x)$.

- $x^\alpha \ln(x) = (\frac{1}{X})^\alpha \ln(\frac{1}{X}) = -\ln(X)(\frac{1}{X})^\alpha = -\dfrac{\ln(X)}{X^\alpha}$ car $\ln(\frac{1}{X}) = -\ln(X)$.

Or quand x tend vers 0^+, X tend vers $+\infty$ donc $-\dfrac{\ln(X)}{X^\alpha}$ tend vers 0 (d'après la seconde propriété des croissances comparées). Donc $\lim\limits_{x\to0^+} x^\alpha \ln(x) = 0$.

Questions :

- Expliquez sur un dessin les croissances comparées en $+\infty$.
- Faites les questions 1,5,6 de l'exercice 7 page 18.
- Faites une feuille blanche pour vous remémorer les définitions/propositions/théorèmes du chapitre jusqu'ici. Ou alors défiez un de vos camarades pour restituer plusieurs définitions/propositions/-théorèmes de la partie.
- Attaquez-vous maintenant aux problèmes liant les savoir faire. Si vous bloquez trop, retournez vers les exos de savoir faire.

Exercices de l'AAV 5

Exercice 1 *Comparaison de termes petits et grands*

Savoir faire

- SF14 : Connaître les limites de fonctions usuelles

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 16 du cours *Calculer la limite d'une fonction* ?

1. Classer les termes suivants du plus grand au plus petit quand $x \to 0$: $1, x, x^2, x^3, x^5, x^{18}, \frac{1}{x}, \frac{1}{x^3}, x^{-2}, x^{-18}$.
2. Classer les termes suivants du plus grand au plus petit quand $x \to +\infty$: $1, x, x^2, x^3, x^5, x^{18}, \frac{1}{x}, \frac{1}{x^3}, x^{-2}, x^{-18}$.

Exercice 2

Savoir faire

- SF14 : Connaître les limites de fonctions usuelles

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 16 du cours *Calculer la limite d'une fonction* ?

Déterminer la limite de :

1. $x \mapsto x^2$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. $x \mapsto x$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. $x \mapsto e^x$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
4. $x \mapsto \ln(x)$ en $+\infty$ et en 0^+.
5. $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ en $-\infty$ et $+\infty$.
6. $x \mapsto \dfrac{e^x}{x^k}$ en $+\infty$ pour $k \in \mathbb{Z}$.
7. $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x^k}$ en $+\infty$ pour $k \in \mathbb{N}^\star$.
8. $x \mapsto x^k \ln(x)$ en 0^+ pour $k \in \mathbb{N}^\star$.

Exercice 3

Savoir faire

- SF13 : Savoir calculer une limite par application des règles de calculs, sans FI

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 17 du cours *Calculer la limite d'une fonction* ?

Déterminer la limite de :

1. $x \mapsto x^2 + x + 1$ en $+\infty$.
2. $x \mapsto 4x^2 - x$ en $-\infty$.
3. $x \mapsto e^x + x^3 + 1$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
4. $x \mapsto x^4 + \ln(x) + 1$ en $+\infty$ et en 0^+.
5. $x \mapsto \dfrac{1}{x-2}$ en 2 et $-\infty$.
6. $x \mapsto \dfrac{x^2+x+1}{2x-3}$ en 0 et en 3/2.
7. $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ en 0^+.
8. $x \mapsto \dfrac{e^x}{x}$ en $-\infty$.

Exercice 4

Savoir faire

- SF13 : Savoir calculer une limite par application des règles de calculs, sans FI

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 16 du cours *Calculer la limite d'une fonction* ?

Déterminer, si elles existent, les limites suivantes (on calculera éventuellement les limites à droite et à gauche).

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{|x|}$
2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x-1}$
3. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{2-x}$
4. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{1}{\sin x}$

Exercice 5 *Limites*

Savoir faire

- SF17 : Savoir factoriser/simplifier pour lever une FI

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 18.1 du cours *Calculer la limite d'une fonction* ?

Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$ (lorsque cela a un sens) dans chacun des cas suivants :

1. $x \mapsto x^3 + 2x^2 + 3x + 1$ en $-\infty$
2. $x \mapsto -4x^4 + 5x^3 + 2x + 1$ en $+\infty$
3. $x \mapsto \dfrac{5x^3 + 2x + 1}{1 + 2x + 3x^2}$ en $+\infty$
4. $x \mapsto \dfrac{2x^2 + 2x + 3}{x^4 + x + 1}$ en $-\infty$
5. $x \mapsto \dfrac{3x + 1}{x + 3}$ en $+\infty$
6. $x \mapsto \dfrac{\sqrt{x} + 1}{x^2 + 2}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
7. $x \mapsto \dfrac{e^{2x} + 1}{e^{2x} + 2}$ en $+\infty$.
8. $x \mapsto \dfrac{\ln(x) + 1}{\ln(x) - 2}$ en 0.

Exercice 6 *Limites avec exponentielles*

Savoir faire

- SF13 : Savoir calculer une limite par application des règles de calculs, sans FI
- SF17 : Savoir factoriser/simplifier pour lever une FI

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 18.1 du cours *Calculer la limite d'une fonction* ?

Déterminer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$ dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = e^{2x} - e^x$,
2. $f(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^x + 1}$,
3. $f(x) = e^{x^2} - e^{x+1}$.

Exercice 7

Savoir faire

- SF15 : Savoir calculer une limite en utilisant les croissances comparées

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu les parties 18.1, 18.3 du cours *Calculer la limite d'une fonction* ?

Déterminer la limite de :

1. $x \mapsto \dfrac{e^x}{x^k}$ en $+\infty$ pour $k \in \mathbb{Z}$.
2. $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x^k}$ en $+\infty$ pour $k \in \mathbb{N}^\star$.
3. $x \mapsto x^k \ln(x)$ en 0 pour $k \in \mathbb{N}^\star$.
4. $x \mapsto xe^x$ en $-\infty$.
5. $x \mapsto x - \ln(x)$ en $+\infty$.
6. $x \mapsto x^2 - e^x$ en $+\infty$.

Exercice 8 *limites avec ln*

Savoir faire

- SF15 : Savoir calculer une limite en utilisant les croissances comparées
- SF13 : Savoir calculer une limite par application des règles de calculs, sans FI
- SF17 : Savoir factoriser/simplifier pour lever une FI

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu les parties 18.1, 18.3 du cours *Calculer la limite d'une fonction* ?

Calculez les limites des fonctions suivantes en 0 et en $+\infty$

1. $x - \ln(x)$
2. $\dfrac{\ln(x)}{x^2}$
3. $x\sqrt{1 + \ln(x)^2}$
4. $\dfrac{\ln(x) - 2}{\ln(x) + 1}$

Exercice 9 *limites fonctions usuelles*

Savoir faire

- SF15 : Savoir calculer une limite en utilisant les croissances comparées
- SF13 : Savoir calculer une limite par application des règles de calculs, sans FI
- SF17 : Savoir factoriser/simplifier pour lever une FI

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu les parties 18.1, 18.3 du cours *Calculer la limite d'une fonction* ?

Calculez les limites des fonctions suivantes en $+\infty$ et $-\infty$:

1. $(2x + 1)e^x$
2. xe^{-x}
3. $x^2e^{-x} - x$
4. $\dfrac{3e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$

Exercice 10 *Limites diverses et variées*

Savoir faire

- SF14 : Connaître les limites de fonctions usuelles
- SF15 : Savoir calculer une limite en utilisant les croissances comparées
- SF13 : Savoir calculer une limite par application des règles de calculs, sans FI
- SF17 : Savoir factoriser/simplifier pour lever une FI

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu les parties 17, 18.1, 18.3 du cours *Calculer la limite d'une fonction* ?

Déterminer les limites suivantes :

1. $e^{-x} + \ln(x) + x^2 - 2$ en 0 et en $+\infty$
2. $\dfrac{x + x^3}{2x - 1}$ en $+\infty$.
3. xe^{-x} en $+\infty$ et en $-\infty$.

4. $\dfrac{x-\ln(x)}{2e^x-x}$ en $+\infty$.
5. $\dfrac{1}{3-x}$ en 3^+, en $3-$ et en 3.
6. $\dfrac{1}{(3-x)^2}$ en 3^+, en $3-$ et en 3.
7. $\dfrac{x^2-x-2}{(x+1)}$ en 1.
8. $x\ln(x)-x$ en 0.
9. $\dfrac{\sin(x)}{x}$ en $+\infty$.

Exercice 11 *Composition de limites*

Savoir faire

- SF1266 : Savoir calculer une limite par composition de limites

Déterminer les limites des expressions suivantes :

1. $\cos(\dfrac{1}{x})$ en $+\infty$.
2. $e^{\frac{\ln(x)}{x}}$ en 0, 1 et $+\infty$.
3. $\ln(1+e^{-n})$ en $+\infty$.
4. $\sin(\dfrac{2}{n})$ en $+\infty$.
5. $e^{\frac{1}{n}\ln(1-\frac{1}{n})}$ en $+\infty$.

Exercice 12 *QCM-779*

Savoir faire

- SF13 : Savoir calculer une limite par application des règles de calculs, sans FI

Quelle est la limite de $x \to x^x$ en 0 ?

- ☐ 0
- ☐ $-\infty$
- ☐ $+\infty$
- ☐ 1

Exercice 13

Savoir faire

- SF13 : Savoir calculer une limite par application des règles de calculs, sans FI
- SF17 : Savoir factoriser/simplifier pour lever une FI
- SF14 : Connaître les limites de fonctions usuelles
- SF1266 : Savoir calculer une limite par composition de limites

Déterminer, si elles existent, les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x+2}}{x}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{3x^2-x-1}}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \left(x+\sqrt{4x^2-3x+1}\right)$

5. $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)$
6. $\lim_{x \to -\infty} \left(x + \sqrt{x^2 - 5x + 1}\right)$

7.5 Exercices de niveau Avancé, Expert

Exercice 14 *Avancé*

1. Dessiner une fonction qui n'a pas de limite en $+\infty$. Donnez ensuite l'expression d'une telle fonction.
2. Donner deux exemples de fonctions qui n'ont pas de limite en 0. (Pour l'un des deux, vous le déduirez de votre exemple de la question précédente).
3. Notons f une fonction qui tend vers 5 en 2. Trouver une fonction g non nulle et qui ne s'exprime pas en fonction de f de sorte que fg tende vers -4 en 2.
4. Notons f une fonction qui n'a pas de limite en 2 et qui est à valeurs dans $[-1, 1]$. Trouver une fonction g non nulle et qui ne s'exprime pas en fonction de f de sorte que fg ait une limite en 2.

Exercice 15 *Niveau Avancé*
En vous servant des croissances comparées autorisées suivantes $\alpha > 0$,

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$,
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0$,

démontrez que $x \ln(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0 et que pour tout $k \geq 0$, $\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{2k}}$ tend vers 0 quand x tend vers 0. Tracer l'allure de la seconde fonction.

Exercice 16 *Niveau Avancé*

1. Construire une fonction qui possède une asymptote verticale en 2 et qui a une limite en 2.
2. Construire une fonction qui possède une asymptote verticale en 2 et qui n'a une limite en 2.
3. **Niveau Expert :** On dit qu'une fonction f possède une asymptote oblique en $+\infty$ s'il existe a, b réels tels que $f(x) - (ax + b)$ tende vers 0 en $+\infty$.
   (a) Représentez graphiquement ce que cela signifie.
   (b) Construisez deux fonctions f, g qui ne sont pas des polynômes d'ordre 1 et qui possèdent une asymptote oblique de coefficient directeur non nul en $+\infty$: l'une sera au-dessus de son asymptote près de $+\infty$, l'autre en-dessous.

Exercice 17 *Niveau Expert*
Que peut-on dire à votre avis d'une fonction périodique de période $T > 0$ qui tend vers une limite l en $+\infty$? Justifiez votre intuition par un dessin puis essayez de démontrer votre conjecture (vous pourrez étudier la suite $f(x + nT)$ pour tout n entier naturel.

Chapitre 8

AAV 7 : Dérivées

Liste des Savoir-Faire du chapitre :

- ☐ SF 22 : Savoir calculer une dérivée de fonction usuelle (polynôme,cos, sin, tan, ln, exp)
- ☐ SF20 : Avoir une intuition graphique et physique de la dérivée
- ☐ SF 23 : Savoir calculer une dérivée d'un produit
- ☐ SF 24 : Savoir calculer une dérivée d'un quotient
- ☐ SF 25 : Savoir calculer une dérivée d'une fonction composée
- ☐ SF 28 : Savoir calculer l'équation d'une tangente à une courbe en un point donné
- ☐ SF 1255 : Savoir étudier le signe d'un quotient de polynômes de degré au plus 2
- ☐ SF 21 : Avoir en tête des exemples de fonctions non dérivables en un point (sans démonstration)

8.1 Motivation

8.1.1 Motivation physique

Remarque 10: La vidéo associée

Il est temps de consulter la vidéo sur youtube : *Le paradoxe de la dérivée | Chapitre 2, Au coeur de l'analyse* de 3blue1brown.

8.1.2 Etude des variations

Lorsqu'on étudie une fonction représentant le tracé d'une donnée en fonction d'une autre, par exemple, la température en un point en fonction du temps, un des points crucial est de savoir quand la fonction décroit, croit et quand elle change de sens de variation. Etudier le sens de variations est une question géométrique non triviale : peut-on trouver un outil qui nous permette de dire à quel moment la courbe se met à croître, décroitre ?

Remarque 11: La vidéo associée

Il est temps de consulter la vidéo : *SF19 : Introduction à la dérivée - Tangente et variations de fonctions.*

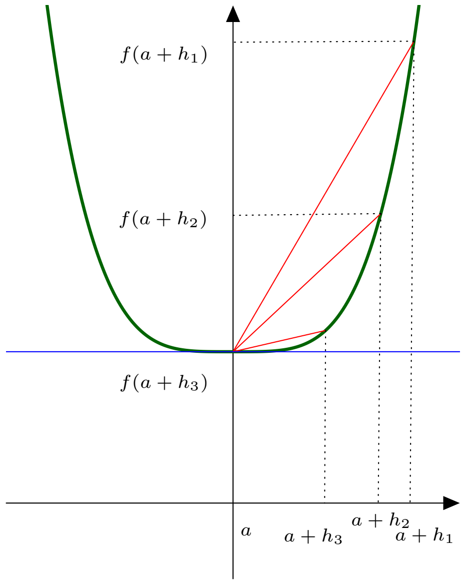
8.2 Qu'est-ce qu'une dérivée

8.2.1 Définition

Remarque 12: La vidéo associée

Il est temps de consulter la vidéo : *SF19 : Connaître la définition de la dérivée.* Cette vidéo introduit graphiquement la notion de dérivée qu'il est important de bien comprendre.

Comme vous avez pu le voir dans la vidéo, la dérivée en un point a notée $f'(a)$ est la pente de la tangente (en bleu) à la courbe en a si cette tangente existe. On définit cette tangente comme la limite des cordes reliant les points $(a, f(a))$ et $(a+h, f(a+h))$ quand h tend vers 0 (limite des segments rouges). La dérivée $f'(a)$ est alors la limite des pentes de ces cordes. La pente de ces cordes qui vaut $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est appelé taux d'accroissement. D'où la définition suivante :



Définition 5: Dérivée en un point

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, on dit que f dérivable en un point a de I s'il existe un réel l tel que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = l,$$

ou encore tel que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l,$$

Le réel l est alors appelé dérivée de f en a et est noté $f'(a)$.

Remarque 13:

Les propriétés $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = l$ et $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l$ sont identiques : il suffit de poser $x = a+h$.

Exemple 1: Fonctions dérivables

Les fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ sont dérivables en tout point de $\mathbb{R}$ car elles admettent une tangente en tout point.
Les fonctions cos, sin sont dérivables en tout point de $\mathbb{R}$.

A quoi ressemble une fonction non dérivable en un point ?

Remarque 14: La vidéo associée

Il est temps de consulter la vidéo : *SF21 : Avoir des exemples de fonctions non dérivables en un point.*

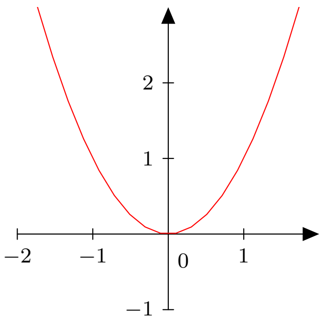
Questions :

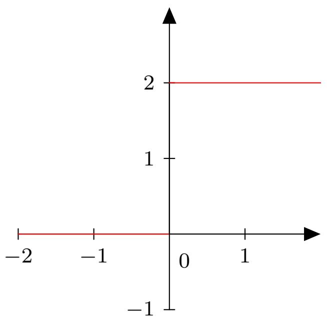
- Expliquez ce qu'est géométriquement le taux d'accroissement et la dérivée et le lien entre les deux.

8.2.2 Dérivabilité et continuité

Qu'est-ce que la continuité d'une fonction d'une variable ?

Voici à gauche une fonction continue à gauche et à droite une fonction discontinue en 0.





Voici une définition avec les mains de la continuité : une fonction est continue sur un intervalle I si "on peut la dessiner sur I sans lever le stylo".

Comment traduire cette définition mathématiquement ?

L'idée est la suivante : prenons un stylo dans la main gauche et un autre stylo dans la main droite, plaçons le stylo de gauche en $a-\nu$ sur la courbe et le stylo de droite en $a+\nu$. Parcourons alors la courbe en rapprochant les deux stylos de a. Si la fonction est continue au point a, alors les deux stylos se toucheront au point a.

Derrière cette métaphore se cache les concepts mathématiques permettant de définir la continuité. Le stylo de gauche "s'approchant de a" représente le fait qu'on étudie la limite à gauche de la fonction en a, celui de droite la limite à droite. Enfin les deux stylos se touchent si la limite à gauche est égale à la limite à droite.

Définition 6:

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, on dit que :

• f est continue en $a \in I$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Cette condition s'écrit aussi $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.
• f est continue sur I si et seulement si f est continue en tout point de I. On note alors $f \in C^0(I)$.

La proposition suivante tisse des liens entre dérivabilité et continuité.

Proposition 7:

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $a \in I$, si f est dérivable en a alors f est continue en a.

Preuve :

- Ecrire les hypothèses et traduisez-les.
- Ecrire le but et traduisez-le.
- Dans la preuve ci-dessous, donnez un argument pour chaque point numéroté.

$f(x) = f(a) + f(x) - f(a) \underset{(1)}{=} f(a) + \dfrac{f(x) - f(a)}{(x-a)}(x-a)$.

$\underset{(2)}{Or}$ $\dfrac{f(x) - f(a)}{(x-a)}$ a une limite finie.

$\underset{(3)}{Donc}$ $\dfrac{f(x) - f(a)}{(x-a)}(x-a)$ tend vers 0.

$\underset{(4)}{Donc}$ f est bien continue en a.

- Hypothèse : f est dérivable en a.
- Traduction : il existe un réel l tel que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = l$.
- But : f est continue en a.
- Traduction : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

(1) : On multiplie par $\dfrac{x-a}{x-a}$.
(2) : car f est dérivable en a.
(3) : par produit de limites (limite finie fois 0).
(4) : car $f(x)$ tend bien vers $f(a)$ quand x tend vers a.

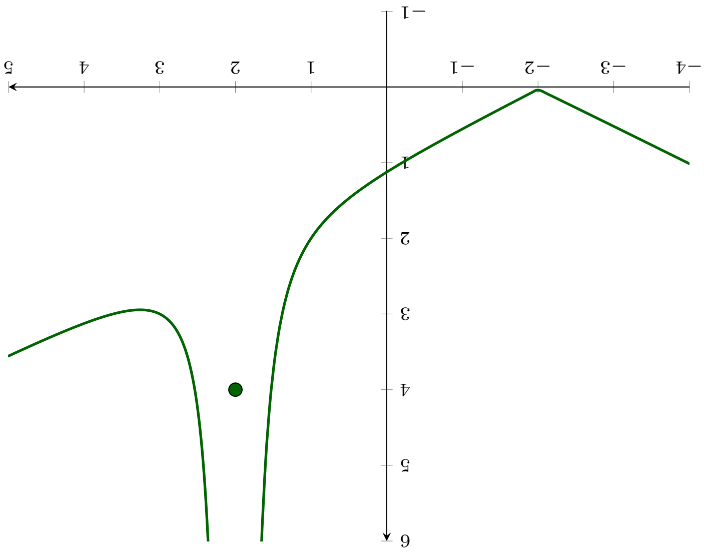
Remarque 15: La réciproque est fausse !

Une fonction continue n'est pas forcément dérivable : par exemple, la valeur absolue est continue en 0 alors qu'elle n'est pas dérivable en 0.

Questions :

- Dessinez une fonction non continue en 2, non dérivable en -2 mais continue en -2 et expliquez votre dessin.
- Faites une feuille blanche pour vous remémorer les définitions/propositions/théorèmes du chapitre jusqu'ici. Ou alors défiez un de vos camarades pour restituer plusieurs définitions/propositions/-théorèmes de la partie.

La fonction n'est pas continue en 2 : elle ne tend pas vers sa valeur en 2 qui est 4 ou encore il faut lever le stylo pour dessiner la fonction.
En revanche, elle est continue en -2 mais non dérivable car il y a un coin, une rupture de pente en -2.



8.3 Géométrie et dérivation

8.3.1 Tangente à une courbe

Comme nous l'avons vu dans la définition de la dérivée, la dérivée en x_0 représente quand elle existe la pente de la tangente à la courbe en x_0. Cette tangente étant une droite, elle adopte une équation de la forme $y = ax + b$ que nous déterminons ci-dessous. Le coefficient a est connu : c'est $f'(x_0)$ reste à trouver b.

Proposition 8:

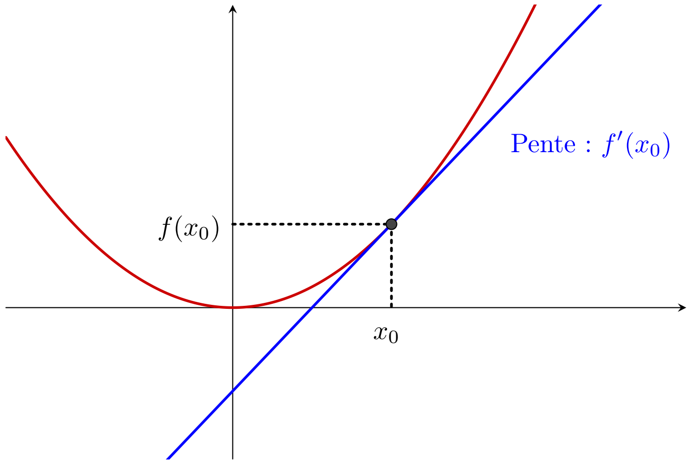
Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$, soit f une fonction dérivable en x_0 alors l'équation de la tangente à f en x_0 est donnée par

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Preuve à faire par tous :

S'agissant d'une droite, son équation est de la forme $y = ax + b$ où a et b sont deux réels à déterminer.

- Quel est le coefficient directeur de la tangente à f en x_0 ? Remplacez dans l'équation.
- Sachant que la tangente passe par le point $(x_0, f(x_0))$ déterminer b et conclure.



- Le coefficient directeur est $f'(x_0)$ par définition de la dérivée. Donc l'équation est de la forme $y = f'(x_0)x + b$ où b reste un réel à déterminer.
- Le point $(x_0, f(x_0))$ appartient à la droite donc vérifie l'équation : donc $f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b$ donc $b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$. Donc l'équation est donnée par

$$y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0 = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Comment déterminer en pratique l'équation de la tangente à une fonction ?

Remarque 16: La vidéo associée

Il est temps de consulter la vidéo : *SF28 Savoir trouver l'équation de la tangente à une courbe en un point donné.*

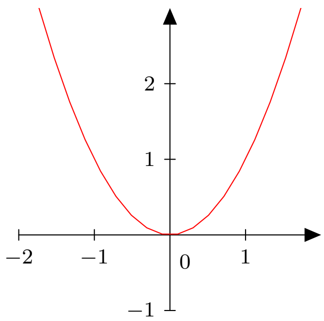
Questions :

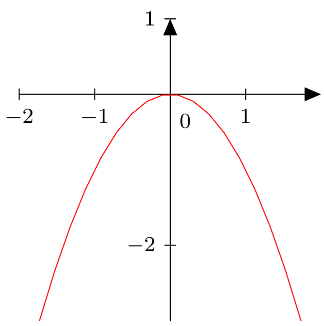
- Faites deux points de l'exercice 38 page 44 en vous aidant si nécessaire du tableau de dérivées usuelles de la partie 4.1.3.

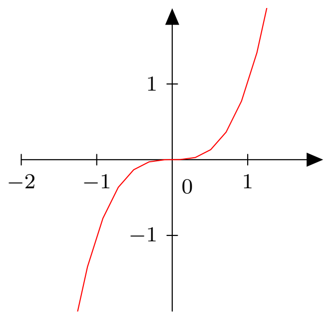
Que signifie le fait d'avoir une dérivée nulle ?

L'équation de la tangente est alors une équation de coefficient directeur nulle. Ceci signifie que la tangente au point est horizontale.

Il existe pour une fonction de la variable réelle trois manières d'avoir une tangente horizontale en un point : être un minimum local ($f(x) = x^2$ en $x = 0$), être un maximum local ($f(x) = -x^2$ en $x = 0$) et être un point d'inflexion ($f(x) = x^3$ en $x = 0$). Donc attention, avoir une dérivée nulle ne signifie pas forcément être un maximum ou un minimum.







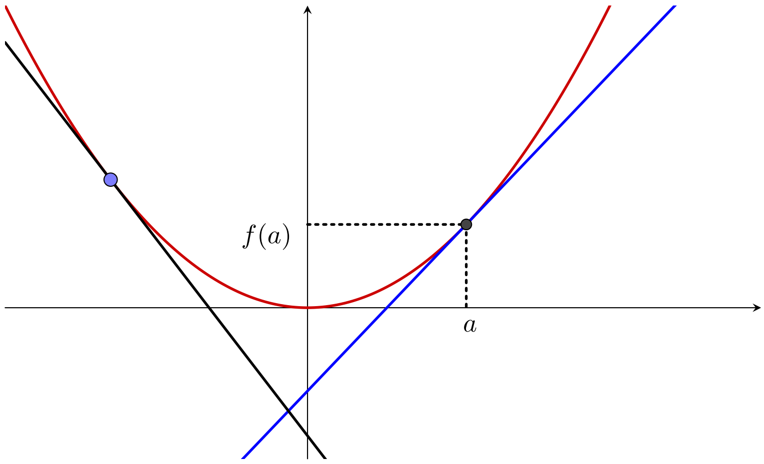
Questions :

- Dessinez une fonction dont la dérivée vaut 1 en $x = 0$, 0 en $x = 2$ et -2 en $x = -2$.

Commencez par dessiner une droite de pente 1 en 0, une autre horizontale en 2 et une de pente -2 en -2 puis dessiner une fonction qui est tangente à ces trois droites.

8.3.2 Variations de fonctions

La dérivée est outil géométrique précieux permettant d'analyser comment une fonction va varier. En effet, la dérivée représentant la pente de la tangente, si elle est positive en a, la courbe sera alors croissante auprès de a. Inversement si elle est négative, la fonction sera décroissante. Comme on le voit sur le dessin ci-contre, une tangente de pente négative est associée aux parties décroissantes et une tangente positive à une fonction croissante. C'est ce résultat graphique que nous étudions dans cette section. Pour cela, il est nécessaire de définir mathématiquement ce qu'est une fonction croissante.



Afin d'avoir une vision plus dynamique du lien entre dérivée et variations, regardez la vidéo entre 8min et 10min : *The paradox of the derivative | Essence of calculus, chapter 2* de 3blue1brown.

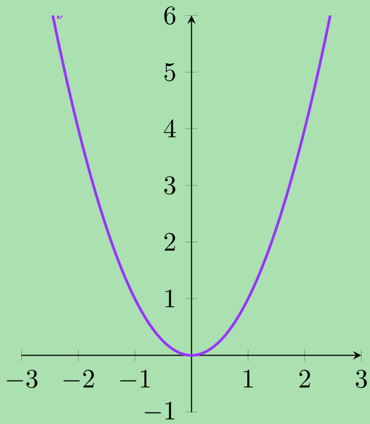
Définition 7: Fonction croissante/décroissante

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$, on dit que :

- f est croissante sur I si pour tout x, y de I, si $x \leq y$ alors $f(x) \leq f(y)$.
- f est décroissante sur I si pour tout x, y de I, si $x \leq y$ alors $f(x) \geq f(y)$.

Exemple 2: Fonctions croissantes/décroissantes

- La fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et décroissante sur $\mathbb{R}_-$. Sur $\mathbb{R}$ entier, elle n'est ni croissante ni décroissante.
- La fonction constante égale à 1 est croissante et décroissante sur $\mathbb{R}$.



Proposition 9: Croissance et dérivée

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, f dérivable sur I alors

- f est croissante sur I si et seulement si f' est positive sur I.
- f est décroissante sur I si et seulement si f' est négative sur I.

Preuve :

Nous prouvons le sens direct $\Longrightarrow$. La réciproque est ici admise.

- Ecrire les hypothèses et traduisez-les.
- Ecrire le but et traduisez-le.
- Dans la preuve ci-dessous, donnez un argument pour chaque point numéroté.
- Faites enfin la démonstration pour f décroissante sur I.

Soit $x \in I$. Pour tout $y \in I$ avec $x \leq y$, on a $f(y) - f(x) \underset{(1)}{\geq} 0$.

$\underset{(2)}{Donc}$ Pour tout $y \in I$ avec $x \leq y$, $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0$.

$\underset{(3)}{Donc}$ $f'(x) \geq 0$.

- Hypothèses : f est croissante sur I et f dérivable sur I.
- Traduction : pour tout x, y de I, si $x \leq y$ alors $f(x) \leq f(y)$.
- But : f' est positive sur I.
- Traduction : $\forall x \in I$, $f'(x) \geq 0$.

(1) : par définition des fonctions croissantes.
(2) : un quotient de quantités positives est positif.
(3)) : on fait tendre y vers x. Comme f est dérivable en x, ce taux d'accroissement tend alors vers $f'(x)$.

Remarque 17: La vidéo associée

Il est temps de consulter la vidéo : *SF20 : Avoir une intuition graphique et physique de la dérivée.*

Questions :

- Faites une feuille blanche pour vous remémorer les définitions/propositions/théorèmes du chapitre jusqu'ici. Ou alors défiez un de vos camarades pour restituer plusieurs définitions/propositions/-théorèmes de la partie.
- Faites l'exercice 19 page 39.
- Tracez la dérivée d'une fonction croissante sur $[0, 1]$ et $[-2, -1]$, décroissante ailleurs.

La dérivée d'une telle fonction sera positive sur $[0, 1]$ et $[-2, -1]$ et négative ailleurs.

8.4 Calcul de dérivées

8.4.1 Dérivées usuelles

Afin d'étudier les variations de fonctions diverses, il est nécessaire de calculer les dérivées de fonctions usuelles à partir desquelles sont construites les fonctions qu'on étudiera. Le paragraphe suivant a pour but de vous donner une vision graphique de certaines dérivées usuelles.

Via un peu de géométrie

Remarque 18: La vidéo associée

Il est temps de consulter la vidéo sur youtube : *Formules pour la dérivée démontrées géométriquement | Chapitre 3, Au cœur de l'analyse* de 3blue1brown.

Via le taux d'accroissement

L'objectif de ce paragraphe a pour but de vous montrer en pratique d'où viennent les dérivées des fonctions usuelles. L'idée est simplement d'utiliser la définition et donc le taux d'accroissement.

Exemple 3: Dérivée d'une constante

- Soit $f : x \mapsto 1$, la fonction constante égale à 1. Son taux d'accroissement en un point x vaut pour $h \in \mathbb{R}$, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{1-1}{h} = 0$ qui tend vers 0 quand h tend vers 0. Donc $f'(x) = 0$. La dérivée d'une constante est la fonction nulle.
- Soit $g : x \mapsto x$. Son taux d'accroissement en un point x vaut pour $h \in \mathbb{R}$, $\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h} = \dfrac{x+h-x}{h} = 1$ qui tend vers 1 quand h tend vers 0. Donc $g'(x) = 1$.

Questions :

- Ecrivez le taux d'accroissement pour la fonction $f : x \mapsto x^2$ et simplifiez ce taux d'accroissement à l'aide d'une identité remarquable.
- Déduisez-en la dérivée de la fonction carré.
- Ecrivez le taux d'accroissement pour la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$. Simplifiez et en déduire la dérivée de la fonction f.
- Ecrivez le taux d'accroissement pour la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$. Simplifiez ce taux d'accroissement à l'aide de l'identité remarquable $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}) = a-b$. En déduire la dérivée de la fonction racine carré.

- $$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^2-x^2}{h} \\ &= \frac{(x+h-x)(x+h+x)}{h} && \text{par identité remarquable.} \\ &= 2x+h\end{aligned}$$
- Ceci tend vers $2x$ quand h tend vers 0. On retrouve donc que $f'(x) = 2x$.
- $$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} \\ &= \frac{\frac{-h}{(x+h)x}}{h} && \text{par réduction au même dénominateur.} \\ &= \frac{-1}{(x+h)x}\end{aligned}$$
  Ceci a pour limite $-\dfrac{1}{x^2}$ quand h tend vers 0. Donc $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.
- $$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \\ &= \frac{\frac{h}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}}{h} && \text{car } (\sqrt{x+h}+\sqrt{x})(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}) = x+h-x = h \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\end{aligned}$$
  Ceci a pour limite $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ quand h tend vers 0. Donc $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

▸ **Pour aller plus loin**. *Dérivées de l'exponentielle et du logarithme népérien.*

On rappelle que la fonction exponentielle est l'unique fonction dérivable f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^\star$ vérifiant :

- pour tout u, v réels, $f(u+v) = f(u)f(v)$.
- $f'(0) = 1$.

Partant de cela :

- Exprimez le taux d'accroissement $\dfrac{\exp(x+h)-\exp(x)}{h}$ en x en fonction du taux d'accroissement en 0. En déduire la dérivée de $\exp(x)$.
- Dérivez alors la relation : $\forall x > 0, \exp(\ln(x)) = x$. En déduire la dérivée de $\ln(x)$.

- $$\begin{aligned}\frac{\exp(x+h)-\exp(x)}{h} &= \frac{\exp(x)\exp(h)-\exp(x)}{h} && \text{par définition de } \exp \\ &= \exp(x)\frac{\exp(h)-1}{h} && \text{en factorisant par } \exp(x)\end{aligned}$$
  Puisque $\exp(0) = 1$, $\dfrac{\exp(h)-1}{h}$ est le taux d'accroissement en 0 donc il tend vers $\exp'(0) = 1$ quand h tend vers 0 par définition de exp. Donc $\dfrac{\exp(x+h)-\exp(x)}{h}$ tend vers $\exp(x)$ quand h tend vers 0. Donc pour tout x réel, $\exp'(x) = \exp(x)$.
- Par dérivation composée, $\forall x > 0, (\exp(\ln(x)))' = \ln'(x)\exp(\ln(x))$.
  Donc $(\exp(\ln(x)))' = \ln'(x)x$.
  Finalement $\ln'(x)x = 1$ donc $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Tableau de dérivées usuelles

Voici le tableau des dérivées usuelles à connaître :

Fonction	Dérivée
x^n ($n \in \mathbb{N}^*$ constant)	nx^{n-1}
$\exp(x)$	$\exp(x)$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$1+\tan(x)^2$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Questions :

- Faites l'exercice 23 page 40.

8.4.2 Opérations algébriques

Les fonctions dont il faudra calculer les dérivées seront des sommes, différences, produits, quotients ou composées de fonctions usuelles, il est donc nécessaire d'avoir des formules de dérivées de sommes, différences, produits, quotients ou composées. C'est ce qui est fait dans la fin du chapitre.

Somme/différence

Proposition 10: Croissance et dérivée

Soient f et g deux fonctions dérivables en $a \in \mathbb{R}$ alors

- $f+g$ est dérivable en a et $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.
- pour toute constante λ, λf est dérivable en a et $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$.

Preuve :

- Ecrire les hypothèses et traduisez-les en termes mathématiques.
- Ecrire le but et traduisez-le en termes mathématiques.
- Démontrez alors successivement chacun des points de la proposition.

Première propriété

- Hypothèses : f et g deux fonctions dérivables en $a \in \mathbb{R}$
- Traduction : $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f'(a)$ et $\dfrac{g(a+h)-g(a)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} g'(a)$.
- But : $f+g$ est dérivable en a et $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.
- Traduction : $\dfrac{(f+g)(a+h)-(f+g)(a)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f'(a)+g'(a)$

Soit $h \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\frac{(f+g)(a+h)-(f+g)(a)}{h} &= \frac{f(a+h)+g(a+h)-f(a)-g(a)}{h} && \text{par définition de } f+g\\ &= \frac{(f(a+h)-f(a))}{h} + \frac{(g(a+h)-g(a))}{h} && \text{par l'axiome de somme de fractions ayant même dénom}\\ &\underset{h\to 0}{\longrightarrow} f'(a)+g'(a) && \text{car f et g sont dérivables en a.}\end{aligned}$$

Donc $f+g$ est dérivable en a et $(f+g)'(a) = f'(a)+g'(a)$.

Deuxième propriété

- Hypothèses : $\lambda \in \mathbb{R}$, f fonction dérivable en $a \in \mathbb{R}$.
- Traduction : $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f'(a)$.
- But : λf est dérivable en a et $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$.
- Traduction : $\dfrac{(\lambda f)(a+h)-(\lambda f)(a)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \lambda f'(a)$.

Soit $h \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\frac{(\lambda f)(a+h)-(\lambda f)(a)}{h} &= \lambda\frac{(f(a+h)-f(a))}{h} && \text{par l'axiome de produit de fractions.}\\ &\underset{h\to 0}{\longrightarrow} \lambda f'(a) && \text{car f est dérivable en a.}\end{aligned}$$

Donc λf est dérivable en a et $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$.

Produit

Proposition 11: Croissance et dérivée

Soient f et g deux fonctions dérivables en $a \in \mathbb{R}$ alors

- fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

Preuve pour ceux qui veulent aller plus loin:

- Ecrire les hypothèses et traduisez-les en termes mathématiques.
- Ecrire le but et traduisez-le en termes mathématiques.
- Donnez un argument pour chacun des points numérotés.

Soit $h \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\frac{fg(a+h)-fg(a)}{h} &\underset{(1)}{=} \frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a)}{h}\\ &\underset{(2)}{=} \frac{(f(a+h)-f(a))g(a+h)+f(a)(g(a+h)-g(a))}{h}\\ &\underset{(3)}{=} \frac{(f(a+h)-f(a))}{h}g(a+h)+f(a)\frac{(g(a+h)-g(a))}{h}\\ &\underset{(4)}{\underset{h\to 0}{\longrightarrow}} f'(a)g(a)+f(a)g'(a)\end{aligned}$$

Donc fg est dérivable en a et $(fg)'(a) \underset{(5)}{=} f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

- Hypothèses : f et g deux fonctions dérivables en $a \in \mathbb{R}$
- Traduction : $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f'(a)$ et $\frac{g(a+h)-g(a)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} g'(a)$.
- But : fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.
- Traduction : $\frac{fg(a+h)-fg(a)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$

(1) : par définition de fg
(2) : c'est une factorisation très astucieuse.
(3) : par l'axiome de somme de fractions de même dénominateur.
(4) : car f et g sont dérivables en a donc leurs taux d'accroissement tendent vers leurs dérivées quand h tend vers 0. Par ailleurs, $g(a+h)$ tend vers $g(a)$ car g est dérivable en a et donc continue en a.

Remarque 19: La vidéo associée

Il est temps de consulter les deux premières minutes la vidéo : *SF 23-24-25 : Savoir calculer la dérivée d'un produit, d'un quotient, d'une fonction composée.*

Questions :

- Faites deux points de l'exercice 26 page 41.

Quotient

Proposition 12: Croissance et dérivée

Soient f et g deux fonctions dérivables en $a \in \mathbb{R}$ telles que $g(a) \neq 0$ alors

- $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$.

Preuve pour ceux qui veulent aller plus loin:

- Ecrire les hypothèses et traduisez-les en termes mathématiques.
- Ecrire le but et traduisez-le en termes mathématiques.
- Donnez un argument pour chacun des points numérotés.

Soit $h \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{f}{g}(a+h) - \frac{f}{g}(a)}{h} &\underset{(1)}{=} \frac{\frac{f(a+h)}{g(a+h)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{h} \\
&\underset{(2)}{=} \frac{\frac{f(a+h)g(a)-f(a)g(a+h)}{g(a)g(a+h)}}{h} \\
&\underset{(3)}{=} \frac{f(a+h)g(a) - f(a)g(a+h)}{hg(a)g(a+h)} \\
&\underset{(4)}{=} \frac{(f(a+h)-f(a))g(a)}{hg(a)g(a+h)} - f(a)\frac{(g(a+h)-g(a))}{hg(a)g(a+h)} \\
&\underset{(5)}{\underset{h\to 0}{\longrightarrow}} \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}
\end{aligned}$$

Donc $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et $(\frac{f}{g})'(a)_{(6)} \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$.

- Hypothèses : f et g deux fonctions dérivables en $a \in \mathbb{R}$, $g(a) \neq 0$
- Traduction : $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f'(a)$ et $\dfrac{g(a+h)-g(a)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} g'(a)$.
- But : $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en a et $(\dfrac{f}{g})'(a) = \dfrac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g(a)^2}$.
- Traduction : $\dfrac{\frac{f}{g}(a+h)-\frac{f}{g}(a)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g(a)^2}$

(1) : par définition de $\dfrac{f}{g}$
(2) : par réduction au même dénominateur.
(3) : car $\dfrac{\frac{a}{b}}{c} = \dfrac{a}{bc}$ pour a réel et b, c réels non nuls.
(4) : c'est une factorisation astucieuse et on utilise aussi l'axiome de somme de fractions de même dénominateur.
(5) : car f et g sont dérivables en a donc leurs taux d'accroissement tendent vers leurs dérivées quand h tend vers 0. Par ailleurs, $g(a+h)$ tend vers $g(a)$ car g est dérivable en a et donc continue en a.

Remarque 20: La vidéo associée

Il est temps de consulter les quatre premières minutes la vidéo : *SF 23-24-25 : Savoir calculer la dérivée d'un produit, d'un quotient, d'une fonction composée.*

Questions :

- Faites deux points de l'exercice 27 page 41.

Composée

Proposition 13: Croissance et dérivée

Soient f une fonction dérivable en $a \in \mathbb{R}$ et g une fonction dérivable en $f(a)$ alors $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = f'(a)g'(f(a))$.

Preuve pour ceux qui veulent aller plus loin:

- Ecrire les hypothèses et traduisez-les en termes mathématiques.
- Ecrire le but et traduisez-le en termes mathématiques.
- Donnez un argument pour chacun des points numérotés.

Soit $h \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\frac{g\circ f(a+h)-g\circ f(a)}{h} &\underset{(1)}{=} \frac{g(f(a+h))-g(f(a))}{f(a+h)-f(a)}\,\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\\ &\underset{(2)}{=} \frac{g(f(a)+H)-g(f(a))}{H}\,\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{où } H = f(a+h)-f(a)\\ &\underset{(3)}{\underset{h\to 0}{\longrightarrow}} f'(a)g'(f(a))\end{aligned}$$

Donc $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = f'(a)g'(f(a))$.

- Hypothèses : f une fonction dérivable en $a \in \mathbb{R}$ et g dérivable en $f(a) \in \mathbb{R}$
- Traduction : $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f'(a)$ et $\dfrac{g(a+h)-g(a)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} g'(a)$.
- But : $g \circ f$ est dérivable en a et $(g\circ f)'(a) = f'(a)g'(f(a))$.
- Traduction : $\dfrac{g\circ f(a+h) - g\circ f(a)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f'(a)g'(f(a))$.

(1) : par définition de $g\circ f$ et car $\dfrac{f(a+h)}{f(a+h)} = 1$.
(2) : on a juste posé : $H = f(a+h) - f(a)$
(3) : car f est dérivable en a donc le taux d'accroissement tend vers $f'(a)$ quand h tend vers 0. Par ailleurs H tend vers 0 car f est continue en a (car dérivable en a). Donc $\dfrac{g(f(a)+H)-g(f(a))}{H}$ tend vers $g'(f(a))$ puisque g est dérivable en $f(a)$.

Remarque 21: La vidéo associée

Il est temps de consulter les deux dernières minutes la vidéo : *SF 23-24-25 : Savoir calculer la dérivée d'un produit, d'un quotient, d'une fonction composée.*

Questions :

- Faites une feuille blanche pour vous remémorer les définitions/propositions/théorèmes du chapitre jusqu'ici. Ou alors défiez un de vos camarades pour restituer plusieurs définitions/propositions/-théorèmes de la partie.
- Placer deux points de l'exercice 28 page 41 dans le plan complexe.
- Attaquez-vous maintenant aux problèmes liant les savoir faire. Si vous bloquez trop, retournez vers les exos de savoir faire.

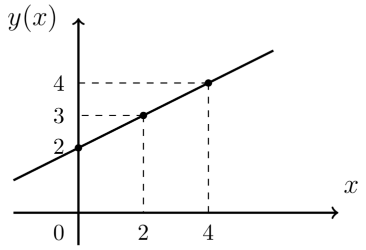
Exercices de l'AAV 7

Exercice 18

> **Savoir faire**
> - SF1260 : Savoir interpréter géométriquement un coefficient directeur et une ordonnée à l'origine
> - SF22 : Savoir calculer une dérivée de fonction usuelle

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu les parties 23.1 et 25.1 du cours *Calculer la dérivée d'une fonction et en étudier le signe* ?

1. Quelle est l'expression de la fonction affine $y(x)$ représentée sur la Figure ?



   Donner le coefficient directeur de la droite associée.

2. Calculer la dérivée $\dfrac{dy(x)}{dx}$ de la fonction $y(x)$ obtenue. Qu'en déduisez-vous ?

Exercice 19

> **Savoir faire**
> - SF20 : Avoir une intuition graphique et physique de la dérivée

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 24.2 du cours *Calculer la dérivée d'une fonction et en étudier le signe* ?

1. Tracer l'allure de la dérivée d'une fonction croissante sur $[0, 1]$ décroissante ailleurs et qui vaut 0 en 0.

Exercice 20

> **Savoir faire**
> - SF20 : Avoir une intuition graphique et physique de la dérivée

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu les parties 24.1 du cours *Calculer la dérivée d'une fonction et en étudier le signe* ?

Tracer l'allure de la fonction f au voisinage des points 0 et 3 sachant que $f(0) = 1, f(3) = 2,\ f'(0) = 1,\ f'(3) = -2$.

Exercice 21

Savoir faire

- SF20 : Avoir une intuition graphique et physique de la dérivée

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 24.2 du cours *Calculer la dérivée d'une fonction et en étudier le signe* ?

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée négative sur $]-\infty, -1]$ et sur $[2, +\infty[$ et de dérivée positive sur $[1, 2]$. Dessinez l'allure de f.

Exercice 22 *Valeur de la dérivée et tangente à la courbe représentative de la fonction (KA)*

Savoir faire

- SF20 : Avoir une intuition graphique et physique de la dérivée
- SF1 : Savoir identifier un ensemble de départ ou d'arrivée

Faire l'exercice situé à l'adresse : https ://fr.khanacademy.org/math/ap-calculus-bc/derivative-introduction-bc/intro-to-diff-calculus-bc/e/graphs-of-functions-and-their-derivatives

Exercice 23 *Formulaire de dérivées*

Savoir faire

- SF22 : Savoir calculer une dérivée de fonction usuelle

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu les parties 23.1 et 25.1 du cours *Calculer la dérivée d'une fonction et en étudier le signe* ?

Complétez le tableau suivant :

Fonction	Dérivée
x^n ($n \in \mathbb{N}^*$ constant)	
$\exp(x)$	
$\ln(x)$	
$\sin(x)$	
$\cos(x)$	
$\tan(x)$	
$\frac{1}{x^n}$	
$\sqrt{x}$	
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	

Exercice 24

Savoir faire

- SF22 : Savoir calculer une dérivée de fonction usuelle

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 25.2.1 du cours *Calculer la dérivée d'une fonction et en étudier le signe* ?

Quelles sont les dérivées par rapport à la variable x des fonctions ax^n, $(xy)^n$ où $a, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}^*$?

Exercice 25

Savoir faire

- SF2 : Savoir trouver graphiquement ou calculer un antécédent, une image
- SF10 : Résoudre une équation du second degré
- SF22 : Savoir calculer une dérivée de fonction usuelle

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 25.2.1 du cours *Calculer la dérivée d'une fonction et en étudier le signe* ?

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 34x - 2$. Déterminer les antécédents de -2 par f'.
On peut faire ce type d'exo pour toute une série d'équations qu'on veut résoudre (algébrique, exponentielle, log, puissance, sin, cos pr les équations trigo).

Exercice 26

Savoir faire

- SF23 : Savoir calculer une dérivée d'un produit

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 25.2.2 du cours *Calculer la dérivée d'une fonction et en étudier le signe* ?

Calculez la dérivée des fonctions définies par les expressions suivantes :

1. $x\sin(x)$
2. $(x^2 - x - 1)\ln(x)$
3. $\sin(x)^2$
4. $e^x\cos(x)$
5. $\sqrt{x}(x^4 - 3)$

Exercice 27

Savoir faire

- SF24 : Savoir calculer une dérivée d'un quotient

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 25.2.3 du cours *Calculer la dérivée d'une fonction et en étudier le signe* ?

Calculez la dérivée des fonctions définies par les expressions suivantes :

1. $\dfrac{\ln(x)}{x}$
2. $\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$
3. $\dfrac{e^x}{x^2 - x + 12}$
4. $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$
5. $\dfrac{x^3 - 2x}{x^2 + 1}$

Exercice 28

Savoir faire

- SF25 : Savoir calculer une dérivée d'une fonction composée

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 25.2.4 du cours *Calculer la dérivée d'une fonction et en étudier le signe* ?

Calculez la dérivée des fonctions définies par les expressions suivantes :

1. $\sin(2x)$
2. e^{x^2-1}
3. $\ln(x^5 + 1)$
4. $\sqrt{e^x}$
5. $\ln(\sqrt{1 - \cos(x)})$.

Exercice 29

Savoir faire

- SF22 : Savoir calculer une dérivée de fonction usuelle
- SF25 : Savoir calculer une dérivée d'une fonction composée
- SF23 : Savoir calculer une dérivée d'un produit

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu les parties 25.2 du cours *Calculer la dérivée d'une fonction et en étudier le signe* ?

Dérivez dans chaque cas la fonction qui à x associe :

1. $x^n + \sin(x)$
2. $2\cos(x)e^x$
3. $\ln(x)^2 + 2$
4. e^{3x+2}
5. $\tan(x) \left(= \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)$
6. $\sin^2(x) + \cos^2(x)$
7. $(2x+3)^3$
8. $3x^6 + 4x^3 + 2x + 12$
9. $\sin(2x+1)$
10. $\ln(3x)$
11. $\sqrt{x^2 + x + 1}$
12. xe^{-x}
13. $\dfrac{4x+2}{5x^2+1}$
14. $\dfrac{\ln(x)}{x}$
15. $x\ln(x) - x$

Exercice 30

Savoir faire

- SF30 : Savoir tracer/reconnaître le graphe des fonctions usuelles sans hésitation
- SF22 : Savoir calculer une dérivée de fonction usuelle
- SF24 : Savoir calculer une dérivée d'un quotient

1. Sur quel domaine de la variable t sont définies ces deux fonctions ?
$$f(t) = \frac{3t-2}{t+1}, \text{ et, } g(t) = \frac{-5}{t+1} .$$
2. Calculer leur dérivée respective. Que remarque-t-on ?
3. Que vaut $f(t) - g(t)$? Justifier alors la remarque de la question précédente.

Exercice 31

Savoir faire

- SF22 : Savoir calculer une dérivée de fonction usuelle
- SF24 : Savoir calculer une dérivée d'un quotient

Calculer f', f'' et f''' dans les cas suivants :

1. $f(x) = x^{10}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$
3. $f(x) = \sqrt{x}$

Exercice 32

Savoir faire

- SF22 : Savoir calculer une dérivée de fonction usuelle
- SF24 : Savoir calculer une dérivée d'un quotient

Calculer la dérivée de ces rapports de fonctions (de v),

$$\frac{3v^2-4v}{2}\ ,\quad \frac{3v^2-4v+1}{2v-3}\ ,\quad \frac{\ln v}{\cos v+v^2}\ .$$

Exercice 33

Savoir faire

- SF22 : Savoir calculer une dérivée de fonction usuelle

Le nombre d'atomes radioactifs $N(t)$ présents à un temps t dans un échantillon contenant N_0 atomes à un temps $t_0=0$ est égal à $N(t)=N_0e^{-t/\tau}$, avec τ une constante. L'activité est le nombre de désintégrations par secondes (*i.e.* le négatif de la dérivée par rapport au temps de $N(t)$). Quelle est son expression ?

- ☐ $\frac{N_0}{\tau}e^{-t/\tau}$
- ☐ $-\frac{N_0}{\tau}e^{-t/\tau}$
- ☐ $-N_0-\frac{N_0}{\tau}e^{-t/\tau}$
- ☐ $N_0+\frac{N_0}{\tau}e^{-t/\tau}$

Exercice 34 *Calculs de dérivée nième*

Savoir faire

- SF22 : Savoir calculer une dérivée de fonction usuelle

1. Calculer la dérivée $n$ième des fonctions exp, cos, sin.
2. Soit $m\in\mathbb{Z}$. Calculer la dérivée $n$ième de x^m.

Exercice 35

Savoir faire

- SF22 : Savoir calculer une dérivée de fonction usuelle
- SF25 : Savoir calculer une dérivée d'une fonction composée

1. Exponentielle de base a : Calculer la dérivée vis-à-vis de x de la fonction a^x, où a est une constante réelle strictement positive : $a>0$. Penser à la réécriture $a=e^{\ln a}$. Donner un résultat proportionnel à a^x.
2. Application : En déduire deux moyens de calculer la dérivée de $\ln(a^x)$.
3. Généralisation : Calculer la dérivée relativement à x de la fonction $[f(x)]^{g(x)}$ où $f(x)$ et $g(x)$ sont deux fonctions quelconques. Donner le résultat obtenu en terme de $f(x)$, $g(x)$, $f'(x)$, $g'(x)$ (leur dérivée) et $[f(x)]^{g(x)}$. Montrer que l'on peut ainsi retrouver le résultat de la question 1.
4. Applications : Dériver par rapport à u ces deux fonctions,

   $$P(u)=2^{u^2},\ \text{et},\ Q(u)=(C+\ln u)^{\sin u}\ ,$$

   où C est une constante.

Exercice 36

Savoir faire

- SF22 : Savoir calculer une dérivée de fonction usuelle
- SF23 : Savoir calculer une dérivée d'un produit
- SF25 : Savoir calculer une dérivée d'une fonction composée

Utiliser deux méthodes pour calculer la dérivée des deux fonctions à une variable, $F(\alpha) = 1 + \tan^2 \alpha$, et, $G(t) = \ln(t/z)$, z étant une constante.

Exercice 37

Savoir faire

- SF22 : Savoir calculer une dérivée de fonction usuelle
- SF23 : Savoir calculer une dérivée d'un produit
- SF25 : Savoir calculer une dérivée d'une fonction composée

Dérivées partielles – Calculer les dérivées des fonctions suivantes à deux variables, par rapport [1] à la variable x, puis par rapport à la variable y.

$$u(x,y) = e^{x^2}\cos(y),\ v(x,y) = (x^2+y^2)\cos(xy),\ w(x,y) = \sqrt{1+x^2y^2}\ .$$

Exercice 38

Savoir faire

- SF28 : Savoir calculer l'équation d'une tangente à une courbe en un point donné

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 24.1 du cours *Calculer la dérivée d'une fonction et en étudier le signe* ?

Déterminez l'équation de la tangente à la fonction f au point x où :

1. $f = \sin$ et $x = 0$.
2. $f = \ln$ et $x = 1$.
3. $f = \exp$ et $x = 0$.
4. $f : x \mapsto x(1-x)$ et $x = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 39

Savoir faire

- SF28 : Savoir calculer l'équation d'une tangente à une courbe en un point donné

Déterminer une équation de la droite tangente à la courbe représentative de la fonction $f(x) = 3x^2 + x + 1$ au point d'abscisse $a = 1$. Même question pour la fonction $g(x) = \sqrt{x}/x$ en $a = 3$. En quel point la tangente à la courbe représentative de $f(x) = 3x^2 + x + 1$ est-elle parallèle à la droite d'équation $D(x) = 3x + 4$?

Exercice 40

Savoir faire

- SF22 : Savoir calculer une dérivée de fonction usuelle
- SF28 : Savoir calculer l'équation d'une tangente à une courbe en un point donné

Dans les cas suivants :

a) $f(x) = \sin x$

b) $f(x) = (1+x)^{13}$

c) $f(x) = \sqrt{1+x}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$

1. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $x = 0$.

Exercice 41 *Signe de quotients*

---

1. On notera par exemple les dérivées partielles de la fonction $u(x,y)$: $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}$.

Savoir faire

- SF1255 : Savoir étudier le signe d'un quotient de polynômes de degré au plus 2

Déterminez le signe suivant x des quotients suivants :

1. $\dfrac{1}{(x^2+1)}$.
2. $\dfrac{x-x^2}{(x^2+1)^2}$.
3. $\dfrac{(x-1)(x-3)^2}{(x+1)}$.
4. $\dfrac{x^2-5x+6}{(2x+1)^2}$.

Exercice 42

Savoir faire

- SF1187 : Savoir résoudre des inéquations simples
- SF10 : Résoudre une équation du second degré
- SF1255 : Savoir étudier le signe d'un quotient de polynômes de degré au plus 2

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $(x+2)(3-x) \leq 0$
2. $\dfrac{x-2}{x+1} \leq 4$
3. $x > \dfrac{1}{x}$
4. $\dfrac{x}{3-x} \leq \dfrac{x}{x+2}$

Exercice 43

Savoir faire

- SF8 : Savoir résoudre des équations algébriques d'ordre un
- SF10 : Résoudre une équation du second degré
- SF22 : Savoir calculer une dérivée de fonction usuelle

On lance un projectile depuis $x = 0$ qui suit la trajectoire donnée par $f(x) = 2 - x^2 + x$ où x est la distance parcourue.

1. Tracer cette fonction.
2. Déterminer les points x pour lesquels la pente de la trajectoire est supérieure ou égale à 1.
3. Déterminez le point x pour lequel la trajectoire devient décroissante.
4. Déterminez en quels points le projectile va toucher le sol situé en $y = 0$.

Exercice 44

Savoir faire

- SF21 : Avoir un exemple en tête de fonction non dérivable

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 23.2 du cours *Calculer la dérivée d'une fonction et en étudier le signe* ?

Donner un exemple de fonction non dérivable.

Exercice 45

Savoir faire

- SF23 : Savoir calculer une dérivée d'un produit
- SF25 : Savoir calculer une dérivée d'une fonction composée
- SF22 : Savoir calculer une dérivée de fonction usuelle

Calculez les dérivées des fonctions f définies par :

alph) $f(x) = \dfrac{e^x \ln(x)}{x^2 + 2x^3}$

alph) $f(x) = 3^x \sin x$

alph) $f(x) = \dfrac{x \ln x}{x^2 - 1}$

alph) $f(x) = \dfrac{4\cos^2(x) - 3}{2\cos(x)}$

alph) $f(x) = (x^4 - x^2 + 5)^4$

alph) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x - 3}}$

alph) $f(x) = (\ln(x))^3$

alph) $f(x) = (x^2 + x + 1)e^x$

alph) $f(x) = \dfrac{-3x^2 + 4x - 1}{x^2 + 2x + 5}$

alph) $f(x) = (1 - x)\sqrt{x + 1}$

alph) $f(x) = \ln(\dfrac{2x - 1}{x - 3})$

alph) $f(x) = \sqrt{(\ln(x))^2 + 1}$

alph) $f(x) = \ln(e^{2x} - 1)$

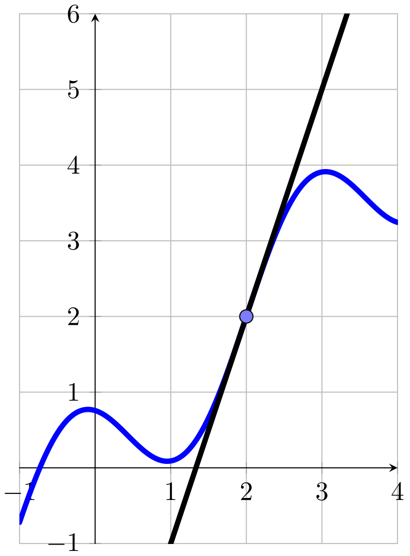
alph) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

alph) $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x - 1}{x + 1}}$

8.5 Exercices de niveau Avancé et Expert

Exercice 46 *Niveau Avancé*

1. Sur le graphe représentant une fonction f, tracez un taux d'accroissement et précisez son expression.
2. Sur ce même graphe, donnez la limite du taux d'accroissement de f en 2 et expliquez graphiquement votre résultat (on veut voir l'évolution du taux d'accroissement graphiquement lorsqu'on tend vers 2). Quelle est par ailleurs la valeur de la dérivée f' en 2 ?
3. Trouvez le minimum de la dérivée sur ce graphe ? En quel(s) point(s) se situe-t-il ? Faites une estimation de sa valeur.



Exercice 47 *Niveau Avancé*
Calculez les limites en 0 de $\frac{\ln(1+x)}{x}$, $\frac{\sin(x)}{x}$ et $\frac{e^x-1}{x}$. Représentez ces quantités sur les tracés des fonctions $\ln, \sin, \exp$

Exercice 48 *Niveau Expert*
Etant donné une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, on cherche la meilleure droite approchant f au voisinage de 0. Autrement dit on cherche deux constantes a et b telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = b + ax + x\epsilon(x)$$

où ϵ est une fonction qui tend vers 0 quand x tend vers 0. Déterminez a et b. Représentez ensuite la droite d'équation $y = b + ax$ et expliquez à quoi elle correspond géométriquement.

Exercice 49 *Niveau Expert*

Bagage admis :

- Une fonction f est dérivable en un point x_0 si le taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie quand x tend vers x_0.
- Une fonction f est dérivable sur un intervalle I si elle dérivable en tout point x_0 de I.
- Une fonction continue sur un segment $[a, b]$ admet un minimum noté m et un maximum noté M.

1. Dans les questions 1,2,3, on démontre le théorème de Rolle : Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. On suppose que $f(a) = f(b)$. Alors : $\exists c \in]a, b[, f'(c) = 0$.

   On se donne donc f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$
   (a) Expliquez ce que le théorème de Rolle signifie géométriquement à l'aide d'un dessin.
   (b) Expliquez pourquoi f admet un maximum M et un minimum m sur $[a, b]$.
   (c) Supposons que $m = M$, prouvez le théorème de Rolle dans ce cas.
2. Supposons dans cette question que le maximum soit atteint en $c \in]a, b[$,
   (a) Démontrez que
   $$\forall x < c, \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$$
   Démontrez également que
   $$\forall x > c, \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$$
   (b) En déduire que $f'(c) = 0$.

3. Démontrez le théorème de Rolle dans le cas $m \in]a, b[$.

Exercice 50 *Niveau Expert*

1. On suppose que le taux d'accroissement en a d'une fonction est compris strictement entre 1 et 2 (pour tout x). Expliquez graphiquement puis démontrez pourquoi la dérivée $f'(a)$ est à valeurs dans $[1, 2]$.
2. On se donne une fonction f définie sur $[0, 2]$. Tracez une fonction dont le taux d'accroissement en 1 est compris entre -1 et 1 et atteint les valeurs 1 et -1 au moins une fois.

Exercice 51 *Niveau Expert*
On dit qu'une fonction dérivable sur un intervalle I est convexe si sa dérivée est croissante. On dit qu'une fonction est concave sur I si sa dérivée y est décroissante.

1. Donner deux expressions de fonctions convexes sur $\mathbb{R}$.
2. Tracer deux exemples de fonctions convexes et expliquez ce que signifie la définition graphiquement et à quoi on peut repérer qu'une fonction est convexe.
3. Tracez un exemple de fonction concave sur $\mathbb{R}$ puis un exemple de fonction qui n'est ni convexe sur $\mathbb{R}$ ni concave sur $\mathbb{R}$.
4. La conjecture suivante est-elle vraie : "Toute fonction convexe sur $\mathbb{R}$ est de limite $+\infty$ quand $x \to -\infty$ et quand $x \to +\infty$" ? Justifiez votre réponse.

Chapitre 9

AAV 8 : Primitives

9.1 Qu'est-ce qu'une primitive ?

9.1.1 Définition

Dans l'aav calculs, vous avez constaté que développer et factoriser sont des opérations inverses l'une de l'autre. L'objectif ici est d'effectuer l'opération inverse de la dérivation : étant donné une fonction f, peut-on trouver une ou plusieurs fonctions F dont la dérivée est f ? De telles fonctions F seront appelées primitives.

Définition 8: Primitive

Soit f une fonction continue sur I, on appelle primitive de f toute fonction F dont la dérivée est f. Autrement dit $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$.

Exemple 4:

Vous avez vu que $x' = 1$ donc $F : x \mapsto x$ est une primitive de $f : x \mapsto 1$.

Questions :

- Démontrer que exp est sa propre primitive.
- Démontrer que sin est une primitive de cos.

Il suffit de dériver la soi-disant primitive, on est censé tomber sur la fonction en question.

- $\exp' = \exp$ donc exp est sa propre primitive.
- $\sin' = \cos$ donc sin est une primitive de cos.

9.1.2 Nombre de primitives

Proposition 14:

Soient f une fonction continue sur I, F_1 et F_2 deux primitives de f. Alors il existe une constante C telle que $\forall x \in I, F_1(x) = F_2(x) + C$.

Preuve à faire par tous :

- Ecrivez les hypothèses ainsi que leur traduction.
- Ecrivez le but ainsi que sa traduction.
- Dans la preuve ci-dessous, justifiez tous les points marqués par un chiffre.

$\forall x \in I, (F_1 - F_2)'(x) \underset{(1)}{=} F_1'(x) - F_2'(x) \underset{(2)}{=} f(x) - f(x) = 0.$

Donc $F_1 - F_2$ est une fonction constante.
(3)

- Hypothèse : f une fonction continue sur I, F_1 et F_2 deux primitives de f
- Traduction : $\forall x \in I$, $F_1'(x) = f(x) = F_2'(x)$.
- But : $\exists C \in \mathbb{R}$, $\forall x \in I$, $F_1(x) = F_2(x) + C$.
- Traduction : idem.

(1) : par linéarité de la dérivée
(2) : car F_1 et F_2 sont deux primitives de f.
(3) : car les primitives de la fonction nulle sont les constantes.

Que conclure de cette proposition ?

Plusieurs messages ressortent de ce résultat.

- Si on trouve une primitive, toute autre primitive sera égale à cette même primitive plus une constante.
- Dès lors qu'on trouve une primitive, on peut construire une infinité de primitives en ajoutant une constante de notre choix.

Remarque 22: LES primitives

Quand on vous demandera de déterminer **les** primitives d'une fonction $f : x \mapsto x$ par exemple, on s'attend à les avoir toutes ! Autrement dit ici les primitives sont $F : x \mapsto \frac{x^2}{2} + C$ pour $C \in \mathbb{R}$.

9.2 Calculer une primitive

9.2.1 Formes usuelles

Pour calculer des primitives, nous nous basons sur un certain nombre de "formes usuelles" dont nous connaissons une primitive. Ces formes usuelles sont des dérivées composées de fonctions. Nous les récapitulons dans le tableau ci-dessous :

Fonction f	Primitives F
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln(\lvert u(x)\rvert) + C$
$u'(x)u(x)^\alpha, \alpha \neq -1$	$\frac{u(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$u'(x)\sin(u(x))$	$-\cos(u(x)) + C$
$u'(x)\cos(u(x))$	$\sin(u(x)) + C$
$u'(x)\exp(u(x))$	$\exp(u(x)) + C$

Exemple 5:

- e^x est de la forme $u'(x)\exp(u(x))$ avec $u(x) = x$ donc ses primitives sont de la forme $e^x + C$, $C \in \mathbb{R}$.
- $\frac{2}{(2x+1)^2} = 2(2x+1)^{-2}$ est de la forme $u'(x)u(x)^\alpha$ avec $u(x) = 2x+1$ donc ses primitives sont de la forme $-\frac{1}{2x+1} + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Remarque 23: La vidéo associée

Il est temps de consulter les 5 premières minutes de la vidéo : *SF 61 Calculer une primitive de fonction (primitive = comb. lin. / compo de fonctions usuelles).*

Questions :

- Donnez trois primitives différentes de $\sin(2x)$.

$-\frac{\cos(2x)}{2}$, $-\frac{\cos(2x)}{2}+1$, $-\frac{\cos(2x)}{2}-12$ sont trois primitives de $\sin(2x)$.

- Faites l'exercice 52 page 53.

9.2.2 Méthodologie de calcul

Remarque 24: La vidéo associée

Il est temps de consulter la vidéo à partir de 5min : *SF 61 Calculer une primitive de fonction (primitive = comb. lin. / compo de fonctions usuelles).*

Questions :

- Faites l'exercice 58 page 54.
- Faites une feuille blanche pour vous remémorer les définitions/propositions/théorèmes du chapitre jusqu'ici. Ou alors défiez un de vos camarades pour restituer plusieurs définitions/propositions/-théorèmes de la partie.
- Attaquez-vous maintenant aux problèmes liant les savoir faire. Si vous bloquez trop, retournez vers les exos de savoir faire.

Exercices de l'AAV 8

Exercice 52

Savoir faire

- SF62 : Connaître les primitives des fonctions usuelles

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu les parties 26, 27.1 du cours *Calculer la dérivée d'une fonction et en étudier le signe* ?

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto 1$
2. $x \mapsto \sin(x)$.
3. $x \mapsto \cos(x)$
4. $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
5. $x \mapsto e^x$
6. $x \mapsto \ln(x)$
7. $x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N} - \{-1\}$
8. $x \mapsto \dfrac{1}{x}$

Exercice 53 *Primitivation simple*

Savoir faire

- SF61 : Savoir calculer une primitive de fonctions simple

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu les parties 26 et 27 du cours *Calculer la dérivée d'une fonction et en étudier le signe* ?

Donner une fonction dont la dérivée est

1. e^x
2. $\ln(2x)$
3. $\dfrac{1}{x}$
4. $\cos(x)$
5. x^4
6. $\dfrac{1}{x^2}$
7. $\dfrac{1}{x^5}$
8. $2x^3 + 2x^2 + 3x^4 + x^5 + 3$

Exercice 54 *Primitive par reconnaissance de dérivées (pas faciles !)*

Savoir faire

- SF61 : Savoir calculer une primitive de fonctions simple

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu les parties 27.2 du cours *Calculer la dérivée d'une fonction et en étudier le signe* ?

Calculez (par une méthode directe) une primitive des fonctions qui à x associent :

1. $\dfrac{3x^2}{4x^3+1}$,
2. $\dfrac{e^x+1}{e^x+x}$,
3. $\dfrac{1}{\sqrt{3x+1}}$,
4. $\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)^4}$,
5. $x\cos(3x^2)$,
6. $\dfrac{1}{\cos^2(x)}$,
7. $f(x) = \dfrac{1}{(3x+5)^3}$
8. $f(x) = \dfrac{x}{(x^2-4)^2}$
9. $f(x) = (x^2-4x+5)^4(x-2)$
10. $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$
11. $f(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}$
12. $f(x) = \sin(5x) - 2\cos(3x) + 4\sin(2x)$
13. $f(x) = \sin(x)\cos(x)^3$
14. $f(x) = (2+\sin(x))^2\cos(x)$
15. $f(x) = \cos(x)^2$
16. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$
17. $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$
18. $f(x) = xe^{x^2-1}$

Exercice 55 *QCM-787*

Savoir faire

- SF61 : Savoir calculer une primitive de fonctions simple

Quelle fonction a pour dérivée $x \mapsto \dfrac{a}{ax+b}$, $(a,b) \in (\mathbb{R}^\star)^2$?

- ☐ $x \mapsto \ln(|x + \dfrac{b}{a}|)$
- ☐ $x \mapsto \ln(|ax+b|)$
- ☐ $x \mapsto \ln(|ax+b|) + c$, c constante réelle.
- ☐ $x \mapsto \ln(|x + \dfrac{a}{b}|)$

Exercice 56

Savoir faire

- SF61 : Savoir calculer une primitive de fonctions simple

La vitesse angulaire d'un pendule oscillant est donnée, dans l'approximation des petits angles et en négligeant les frottements, par $\dot{\theta} = -\theta_0 \cdot \omega \cdot \sin(\omega t)$, avec θ_0 et ω des constantes. Quelle est l'expression de $\theta(t)$?

- ☐ $-\theta_0 \cdot \cos(\omega t) + constante$
- ☐ $-\theta_0 \cdot \cos(\omega t)$
- ☐ $-\theta_0 \cdot \cos(\omega t)$
- ☐ $\theta_0 \cdot \cos(\omega t) + constante$

Exercice 57

Savoir faire

- SF61 : Savoir calculer une primitive de fonctions simple
- SF62 : Connaître les primitives des fonctions usuelles
- SF22 : Savoir calculer une dérivée de fonction usuelle
- SF25 : Savoir calculer une dérivée d'une fonction composée

Montrer que $x\,f'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x}$ pour $f(x) = \ln(1+x)$. En déduire la primitive de la fonction $x\,f'(x)$.

Exercice 58

Savoir faire

- SF61 : Savoir calculer une primitive de fonctions simple
- SF62 : Connaître les primitives des fonctions usuelles

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu les parties 26, 27 du cours *Calculer la dérivée d'une fonction et en étudier le signe* ?

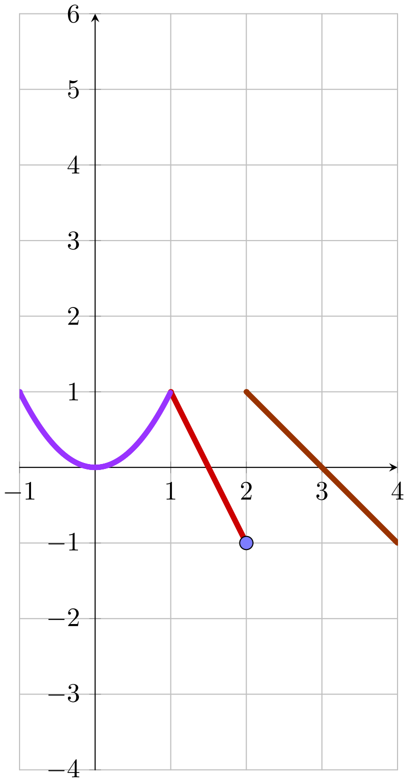
Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto 1$
2. $x \mapsto \sin(x)$.
3. $x \mapsto \cos(x)$
4. $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
5. $x \mapsto e^x$
6. $x \mapsto \ln(x)$
7. $x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N} - \{-1\}$
8. $x \mapsto \dfrac{1}{x}$
9. $2x^{27} + x^3 + 4x + 5$,
10. $\sin(t + \pi/5)$,
11. $1 - 2e^t$,
12. $\dfrac{2}{\sqrt{1+t}}$,
13. $\tan(x)$
14. $\dfrac{x^2+1}{(x^3/3 + x + 1)^3}$,
15. $x^2 \exp(x^3)$,
16. $\dfrac{e^x}{e^x + 4}$,
17. $\cos(5x + 3)$,
18. $\dfrac{1}{x^n}$,
19. $\dfrac{1}{\tan(x)}$
20. $f(x) = \dfrac{1}{2x-3}$
21. $f(x) = e^{-x} + 3e^{2x} + e^{-3x}$
22. $\dfrac{3x^2}{4x^3+1}$,
23. $\dfrac{e^x+1}{e^x+x}$,
24. $\dfrac{1}{\sqrt{3x+1}}$,
25. $\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)^4}$,
26. $x\cos(3x^2)$,
27. $\dfrac{1}{\cos^2(x)}$,
28. $f(x) = \dfrac{1}{(3x+5)^3}$
29. $f(x) = \dfrac{x}{(x^2-4)^2}$
30. $f(x) = (x^2 - 4x + 5)^4(x-2)$
31. $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$
32. $f(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}$
33. $f(x) = \sin(x)\cos(x)^3$
34. $f(x) = (2 + \sin(x))^2 \cos(x)$
35. $f(x) = \cos(x)^2$
36. $f(x) = \dfrac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$
37. $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$
38. $f(x) = xe^{x^2-1}$

9.3 Exercices de niveau Avancé et Expert

Exercice 59 *Niveau Avancé*

Dessiner trois primitives de la fonction suivante et dessiner la différence entre deux de ces primitives.



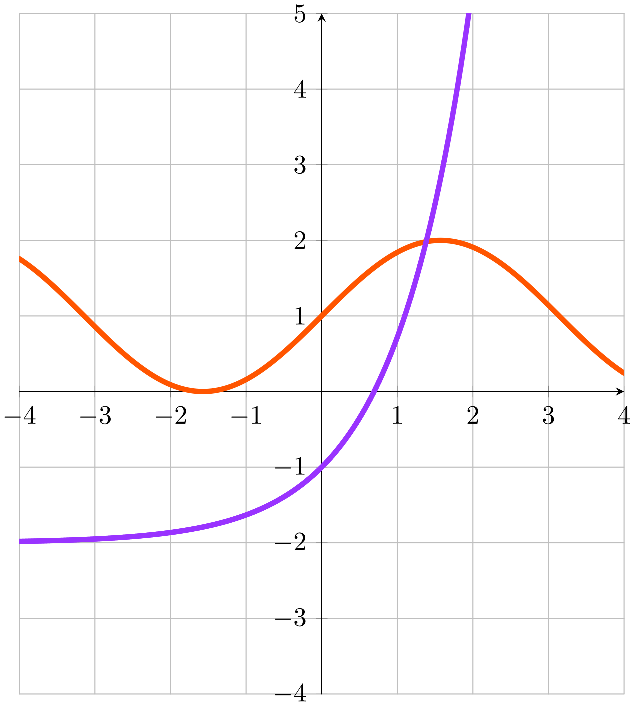
Exercice 60 *Niveau Avancé*
Dessinez puis déterminez l'expression d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée est positive et strictement croissante.

Exercice 61 *Niveau Expert*

1. Trouver les fonctions y telles que pour tout x réel $y'(x) = 0$. Expliquez graphiquement votre résultat.
2. On souhaite résoudre trouver les fonctions y telles que pour tout x réel $y'(x) - a(x)y(x) = 0$ où a est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On note A une primitive de a.
   (a) Calculer la dérivée de $y(x)e^{-A(x)}$.
   (b) En déduire les fonctions y telles que pour tout x réel $y'(x) - a(x)y(x) = 0$.
   (c) Trouver les fonctions y telles que pour tout x réel $y'(x) - 4y(x) = 0$.
   (d) Reprendre les questions précédentes afin de trouver les fonctions y telles que pour tout x réel $y'(x) - a(x)y(x) = b(x)$ où b est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
3. Expliquez la phrase suivante "Résoudre l'équation $y'(x)-a(x)y(x) = b(x)$ c'est trouver des primitives".

Exercice 62 *Niveau Avancé*
Parmi les fonctions suivantes, lesquels ont une dérivée positive et strictement croissante.

- la courbe orange.
- la courbe violette.
- une primitive de x^2 (sur $\mathbb{R}$).
- la fonction $f : x \mapsto -\exp(\frac{1}{x})$ définie hors de 0 (sur $\mathbb{R}^\star$).



5
4
3
2
1
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
−1
−2
−3
−4

Chapitre 10

Exercices du bloc 3 : Exercices liant les savoir-faire

Exercice 63

Savoir faire

- SF13 : Savoir calculer une limite par application des règles de calculs, sans FI
- SF14 : Connaître les limites de fonctions usuelles
- SF17 : Savoir factoriser/simplifier pour lever une FI

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu les parties 16, 17, 18 du cours *Calculer la limite d'une fonction* ?

On considère $f : x \mapsto \dfrac{x^2+x}{x-1}$.

1. Déterminer les limites de f quand x tend vers $+\infty$, $-\infty$, 2 et 1.
2. Déterminer la limite de $f(x) - (x+2)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. Interpréter géométriquement le résultat de la question précédente.

Exercice 64

Savoir faire

- SF13 : Savoir calculer une limite par application des règles de calculs, sans FI
- SF14 : Connaître les limites de fonctions usuelles
- SF15 : Savoir calculer une limite en utilisant les croissances comparées
- SF1266 : Savoir calculer une limite par composition de limites

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu les parties 16, 17, 18 du cours *Calculer la limite d'une fonction* ?

Soit la fonction $g : x \mapsto xe^x + \ln(x^2+1) + \dfrac{\ln(x^2)}{x}$.

1. Quelles sont les limites de xe^x et $\dfrac{\ln(x^2)}{x}$ en 0, $-\infty$, $+\infty$?
2. En déduire les limites de f quand x tend vers 0, $-\infty$, $+\infty$.

Exercice 65

Savoir faire

- SF13 : Savoir calculer une limite par application des règles de calculs, sans FI
- SF14 : Connaître les limites de fonctions usuelles
- SF17 : Savoir factoriser/simplifier pour lever une FI
- SF32 : Savoir utiliser les règles de calculs avec ln pour simplifier une expression
- SF1266 : Savoir calculer une limite par composition de limites

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu les parties 16, 17, 18 du cours *Calculer la limite d'une fonction* ?

Soit la fonction $h : x \mapsto \ln(x^2 + 1) - \ln(x^2)$.

1. Calculer la limite quand x tend vers 0 de cette fonction.
2. Ecrire $h(x)$ sous la forme $\ln(f(x))$ où f est une fonction qu'on précisera.
3. En déduire les limites quand x tend vers $+\infty$ et $-\infty$ de $h(x)$.

Exercice 66

Savoir faire

- SF13 : Savoir calculer une limite par application des règles de calculs, sans FI
- SF14 : Connaître les limites de fonctions usuelles
- SF17 : Savoir factoriser/simplifier pour lever une FI

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu les parties 16, 17, 18 du cours *Calculer la limite d'une fonction* ?

On considère la fonction $h : x \mapsto \dfrac{x^2 - 4x + 3}{(2x + 3)(x - 1)}$.

1. Calculer la limite quand x tend vers 0 et $-\infty$ de cette fonction.
2. Factoriser le trinôme $x^2 - 4x + 3$ en ayant au préalable les racines.
3. En déduire la limite de h quand x tend vers 1.

Exercice 67

Savoir faire

- SF20 : Avoir une intuition graphique et physique de la dérivée
- SF22 : Savoir calculer une dérivée de fonction usuelle
- SF24 : Savoir calculer une dérivée d'un quotient
- SF9 : Savoir simplifier des expressions (développement, factorisation, fractions...)
- SF39 : Savoir trouver le domaine de définition et de dérivabilité d'une fonction à partir d'une formule
- SF1255 : Savoir étudier le signe d'un quotient de polynômes de degré au plus 2

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu le cours *Calculer la dérivée d'une fonction et en étudier le signe* ?

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^3 - x}$

1. Factoriser $x^3 - x$ en produit de trois polynômes de degré 1.
2. En déduire l'ensemble de définition et de dérivabilité de f.
3. Calculer la dérivée de f.
4. Déterminer le signe de la dérivée de f sur $\mathbb{R}$.
5. En déduire l'allure de f.

Exercice 68

Savoir faire

- SF20 : Avoir une intuition graphique et physique de la dérivée
- SF21 : Avoir un exemple en tête de fonction non dérivable
- SF22 : Savoir calculer une dérivée de fonction usuelle
- SF23 : Savoir calculer une dérivée d'un produit
- SF24 : Savoir calculer une dérivée d'un quotient
- SF25 : Savoir calculer une dérivée d'une fonction composée
- SF28 : Savoir calculer l'équation d'une tangente à une courbe en un point donné
- SF9 : Savoir simplifier des expressions (développement, factorisation, fractions...)
- SF10 : Résoudre une équation du second degré
- SF39 : Savoir trouver le domaine de définition et de dérivabilité d'une fonction à partir d'une formule
- SF1255 : Savoir étudier le signe d'un quotient de polynômes de degré au plus 2
- SF201 : Savoir tracer le graphe de x-> f(x-a), f(ax), a f(x) et f(x)+a à partir du graphe de f

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu le cours *Calculer la dérivée d'une fonction et en étudier le signe* ?

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln(x+1) + x(2-x)$

1. Donner un exemple de fonction non dérivable en 0.
2. Quel est l'ensemble de définition de $g : t \mapsto \ln(t+1)$. Dessiner sur un même graphique ln et g.
3. Calculer la dérivée de f et réduisez au même dénominateur l'expression.
4. Factoriser le numérateur de f' en produit de deux polynômes de degré 1. En déduire le signe de f'.
5. Déterminer l'équation de la tangente à f en 0.

Exercice 69

Savoir faire

- SF62 : Connaître les primitives des fonctions usuelles
- SF61 : Savoir calculer une primitive de fonctions simple
- SF9 : Savoir simplifier des expressions (développement, factorisation, fractions...)

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu le cours *Calculer la dérivée d'une fonction et en étudier le signe* ?

1. Déterminer les primitives de
$$\exp(x), \quad x^3, \quad \frac{1}{x-2}, \quad \frac{1}{2x+1}, \quad , \quad \frac{2t-1}{(t^2-t)^4}.$$
2. On considère l'expression $\frac{1}{(2x+1)(x-2)}$. On cherche à écrire cette expression sous la forme $\frac{a}{2x+1} + \frac{b}{x-2}$ où a et b sont deux réels.
   (a) Réduire au même dénominateur l'expression $\frac{a}{2x+1} + \frac{b}{x-2}$.
   (b) En déduire a et b tels que $\frac{1}{(2x+1)(x-2)} = \frac{a}{2x+1} + \frac{b}{x-2}$. On pourra pour cela utiliser le fait que si $a_1x + b_1 = a_2x + b_2$ alors $a_1 = a_2$ et $b_1 = b_2$.
   (c) Déduire de l'exercice LES primitives de $\frac{1}{(2x+1)(x-2)}$.

Exercice 70

Savoir faire

- SF62 : Connaître les primitives des fonctions usuelles
- SF32 : Savoir utiliser les règles de calculs avec ln pour simplifier une expression
- SF23 : Savoir calculer une dérivée d'un produit

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu le cours *Calculer la dérivée d'une fonction et en étudier le signe* ?

On cherche à trouver une primitive de $f : x \mapsto \ln(1 + \frac{1}{x})$. On se restreint à $x > 0$.

1. Mettre $\ln(x+1) - \ln(x)$ sous la forme $\ln(a)$ où a est une expression dépendant de x. En déduire une expression de $\ln(x+1) - \ln(x)$ en fonction de $f(x)$.
2. Rappeler les primitives de $\ln(x)$.
3. Démontrer que $\ln(x+1) = ((x+1)\ln(x+1))' - 1$.
4. En déduire les primitives de $\ln(x+1)$ puis celles de f.