université PARIS-SACLAY
FACULTÉ JEAN MONNET
DROIT-ÉCONOMIE-GESTION

Licence Economie gestion 1ère année. 2023 2024.
Cours de mathématiques 1 de P.Beau

Chapitre 0. Préliminaire. Expression, logique.

« Van Gelijk Hebben Kun Je Geen Brood Kopen », proverbe Flamand.

Ce préliminaire a été ajouté au cours pour éviter les fautes de logiques très fréquentes dans les copies d'examen. Une expression rigoureuse doit être votre première priorité, avant même n'importe quelle notion de cours.

0.1 Implication. Condition nécessaire, condition suffisante.

0.1.1 Définitions

Considérons cette expression :

Si un polygone est un carré, alors il a 4 côtés.

Elle exprime que tous les carrés ont 4 côtés. Elle n'indique rien sur les polygones qui ne sont pas des carrés !

Savoir qu'un polygone est un carré suffit pour affirmer qu'il a 4 côtés . On dit que

- la condition « Le polygone P est un carré » est **suffisante** à la condition « il a 4 côtés » ,
- ou encore que la condition « il a 4 côtés » est **nécessaire** à la condition « le polygone P est un carré ».

$$\text{Si } \underbrace{\text{un polygone est un carré}}_{\text{condition } \textbf{suffisante} \text{ à 'il a 4 côtés'}} \text{, alors } \underbrace{\text{il a 4 côtés}}_{\text{condition } \textbf{nécessaire} \text{ à 'est un carré'}} .$$

Définition 1:
On dit qu'une condition A est **suffisante** à une condition B, ou encore que B est **nécessaire** à A, lorsque :

à chaque fois que A est réalisée, B l'est aussi.

On peut l'exprimer par : Si A alors B.

Une phrase énonçant qu'une condition est suffisante à une autre est appelée une **implication**.

Ainsi, on peut indiquer :

- Si un nombre entier est divisible par 10 , alors il est divisible par 5
- Si un étudiant a validé sa première année en 2020, alors il était inscrit.
- Si un nombre est supérieur à 0, alors son exponentielle est supérieure à 1.

Remarque importante : En revanche, avoir 4 côtés ne suffit pas pour être un carré , être divisible par 5 ne suffit pas pour être divisible par 10, être inscrit ne suffit pas pour valider son année.

Être un nombre positif suffit pour avoir une exponentielle supérieure à 1. Il est vrai aussi qu'avoir une exponentielle supérieure à 1 suffit pour être un nombre positif, **mais** la dernière phrase ne l'indique pas.

Et de façon générale

La condition nécessaire B ne suffit pas pour affirmer que la condition suffisante A est vraie !

0.1.2 Comment exploiter une implication

Considérons deux conditions logiques A , B . Chacune peut être satisfaite ou ne pas l'être, il y a en tout 4 cas, décrits par les 4 lignes du tableau suivant.

On ne sait rien, *a priori*, sur A et B

4 possibilités

A est-elle satisfaite ?	B est-elle satisfaite ?	
Oui	Oui	L1
Oui	Non	L2
Non	Oui	L3
Non	Non	L4

La phrase « Si A , alors B » indique que **dans le cas où A est satisfaite**, c'est-à-dire lorsque l'on se restreint aux deux premières lignes du tableau, alors B l'est : la première ligne est réalisée, la seconde est exclue. Mais elle n'indique rien sur les cas où A n'est pas satisfaite, c'est-à-dire sur les deux dernières lignes du tableau, qui restent possibles toutes les deux.

Si A alors B

	A est-elle satisfaite ?	B est-elle satisfaite ?		
	Oui	Oui		L1
Cette ligne est exclue	~~Oui~~	~~Non~~	Ces 3 lignes sont possibles.	L2
	Non	Oui		L3
	Non	Non		L4

Posons par exemple l'assertion « Si un nombre est divisible par 10, alors il est divisible par 5 »

Ici A est : « un nombre est divisible par 10 » et B est « ce nombre est divisible par 5 »

Cette phrase est vraie pour tous les nombres, en particulier :

La ligne L1 est possible : 60 est divisible par 10 et aussi par 5 .

La ligne L3 est possible : 75 n'est pas divisible par 10, mais est divisible par 5.

La ligne L4 est possible : 67 n'est pas divisible par 10, et pas non plus par 5.

Mais aucun entier ne correspond à la ligne L2.

Si nous savons de plus que A ou B est ou n'est pas satisfaite, nous pouvons dans certains cas en déduire une information sur l'autre condition.

Ainsi

(a) **Si de plus A est satisfaite**, alors nous sommes restreints aux 2 lignes L1 et L2 et nous pouvons exclure les lignes L3 et L4. Or la ligne L2 est exclue , donc seule L1 reste possible. Nous pouvons affirmer que **B est satisfaite**.

	A	B	
A est satisfaite	Oui	Oui	Seule cette ligne est possible
	~~Oui~~	~~Non~~	impossible
	~~Non~~	~~Oui~~	
	~~Non~~	~~Non~~	

Si un nombre est divisible par 10, on peut en déduire qu'il est divisible par 5.

(b) Si **A n'est pas satisfaite**, nous sommes restreints aux lignes L3 et L4, possibles toutes les deux. Nous pouvons exclure la ligne L1. Mais cela ne **suffit pas** pour savoir si B est, ou n'est pas satisfaite

	A	B	
	~~Oui~~	~~Oui~~	
	~~Oui~~	~~Non~~	impossible
A n'est pas satisfaite	Non	Oui	possible
	Non	Non	possible

Savoir qu'un nombre n'est pas divisible par 10 ne suffit pas pour affirmer qu'il est, ou n'est pas, divisible par 5.

(c) **Si B est satisfaite**, nous sommes restreints aux lignes L1 et L3, qui sont possibles toutes les deux. Cela **ne suffit pas** pour savoir si A est, ou n'est pas satisfaite.

	A	B	
B est satisfaite	Oui	Oui	possible
	~~Oui~~	~~Non~~	impossible
B est satisfaite	Non	Oui	
	~~Non~~	~~Non~~	possible

Savoir qu'un nombre est divisible par 5 ne suffit pas pour affirmer qu'il est, ou n'est pas, divisible par 10.

(d) **Si B n'est pas satisfaite** , nous sommes restreints aux lignes L2 et L4, et nous pouvons exclure les lignes L1 et L3. Seule la ligne L4 reste possible. Donc nous pouvons affirmer que **A n'est pas satisfaite**.

	A	B	
	~~Oui~~	~~Oui~~	
B n'est pas satisfaite	~~Oui~~	~~Non~~	impossible
	~~Non~~	~~Oui~~	
B n'est pas satisfaite	Non	Non	Seule ligne possible

Savoir qu'un nombre n'est pas divisible par 5 suffit pour affirmer qu'il n'est pas divisible par 10.

Exemple 1: Il vous paraîtra simple, mais il est bien utile pour éviter des erreurs à l'exemple 2. P désigne un polygone. Exploitons l'implication : « si P est carré, alors il a 4 côtés ».

	P est un carré	P a 4 côtés		
	Oui	Oui	Les 3 autres sont possibles.	L1
Cette ligne est exclue →	~~Oui~~	~~Non~~		L2
	Non	Oui		L3
	Non	Non		L4

(a) Si P est un carré , on peut en déduire que P a 4 côtés
(b) Si P n'est pas un carré, les lignes concernées sont L2 et L3, on ne peut pas en déduire que P a 4 côtés.
(c) Si P a 4 côtés, les lignes concernées sont L1 et L3, on ne peut pas en déduire que P est un carré
(d) Si P n'a pas 4 côtés, les lignes concernées sont L2 et L4. Parmi elles seule L4 est possible. On peut en déduire que P n'est pas un carré.

Cet exemple est simple mais examinons maintenant celui-ci qui est souvent source d'erreurs :

Exemple 2: Demain si ma voiture est réparée, alors j'irai à la piscine.

Ma voiture est réparée	Je vais à la piscine
Oui	Oui
~~Oui~~	~~Non~~
Non	Oui
Non	Non

(a) Si le lendemain, ma voiture est réparée, on peut affirmer que je vais à la piscine.
(b) Si le lendemain, ma voiture n'est pas réparée, on ne **peut pas** en déduire que je suis à la piscine ou pas.
(c) Si le lendemain, je suis à la piscine, on ne **peut pas** en déduire que ma voiture est réparée ou non.
(d) Si le lendemain, je ne suis pas à la piscine, alors **on peut** en déduire que ma voiture n'est pas réparée.

0.2 Equivalence logique

Si ma voiture fonctionne, **et seulement dans ce cas**, je vais à la piscine.

Définition 2

A et B désignent deux conditions logiques. On dit que 2 conditions A et B sont équivalentes logiquement lorsque les 2 implications suivantes sont satisfaites en même temps :

Si A alors B **et** Si B alors A.

On l'exprime ainsi : « A si et seulement si B »

A et B sont soit satisfaites toutes les deux, soit fausses toutes les deux.

A	B
Oui	Oui
~~Oui~~	~~Non~~
~~Non~~	~~Oui~~
Non	Non

0.2.1 Comment exploiter une équivalence.

Si l'on sait que l'une des deux conditions est, ou n'est pas, satisfaite, on peut en déduire que l'autre est dans le même état.

Exemple 3 . Supposons que quelqu'un ait annoncé : « Je vais à la piscine si et seulement si ma voiture fonctionne ».

Si on le voit à la piscine, alors on peut affirmer que sa voiture fonctionne.

Si sa voiture fonctionne, alors on peut affirmer qu'il va à la piscine.

Si on ne le voit pas à la piscine, alors on peut affirmer que sa voiture ne fonctionne pas.

Si sa voiture ne fonctionne pas, alors on peut affirmer qu'il ne va pas à la piscine.

0.3 Contraposée

Dans le paragraphe précédent, il est apparu que de la phrase :

« Si A , alors B »

on peut déduire que si B n'est pas satisfaite, alors A non plus .

Définition 3 A et B désignent deux conditions logiques. On appelle **contraposée** de l'implication « Si A alors B » la phrase : « Si B n'est pas satisfaite, alors A non plus ».

Propriété 1 Une implication est vraie si, et seulement si sa contraposée est vraie.

Exemple 4. L'affirmation suivante « Pour être pilote d'avion, il faut avoir une bonne vue » , que l'on peut aussi exprimer ainsi : « si une personne est pilote d'avion, alors elle a une bonne vue », est vraie.

on peut en déduire que sa contraposée est vraie aussi :
« si une personne n'a pas une bonne vue, alors elle n'est pas pilote d'avion ».

0.4 Réciproque :

La réciproque de l'implication « Si A alors B » est la phrase « Si B alors A ». Contrairement à la contraposée, **savoir si l'une est vraie ou fausse n'indique rien sur l'autre**.

Exemple 5. « Si le train n'a pas de retard, alors j'arriverai à temps » ne permet pas de savoir si la proposition réciproque « si j'arrive à temps, alors le train n'avait pas de retard» est vraie.

Le cas où ces deux implications seraient vraies pourrait s'énoncer par l'équivalence:

« j'arriverai à temps si, et seulement si le train n'a pas de retard»

0.5 Le OU en mathématiques

En mathématiques le OU est toujours inclusif : « A ou B » signifie que A est vraie, B est vraie, ou A et B sont vraies toutes les deux.

Exemple 6: $(x-1)(x^2-4x+3)=0 \quad \textit{si et seulement si} \quad \big((x-1=0) \ \boldsymbol{OU} \ (x^2-4x+3=0)\big)$. Remarquez que pour $x=1$ les deux conditions de droite sont satisfaites à la fois.

Pour exprimer qu'une seule des 2 conditions A, B est satisfaite vous pouvez utiliser **Soit** … **Soit**.

Exemple 7: J'irai en cours soit en vélo, soit en Rer. Indique qu'on n'envisage pas d'utiliser à la fois le vélo et le RER.

0.6 Notations

Vous avez du rencontrer les notations suivantes au lycée. Elles peuvent être plus courtes à écrire que les expressions en langage courant mais elles ne valent pas de points supplémentaires. En revanche, mal employées elles perdent tout sens. Il est raisonnable de ne les employer que si vous savez parfaitement ce qu'elles signifient et comment les utiliser.

=> : implique. Relie deux propositions logiques. Exemple $(x^2 = 5) \Rightarrow (x^6 = 125)$

⇔ : si et seulement si. Relie deux propositions logiques. Exemple $(\ln(x) > 2) \Leftrightarrow (x > \exp(2))$

∈: appartient . Exemple $3 \in]1, +\infty[$

∃ : Il existe au moins un. Ce signe est souvent associé à une barre oblique / ou un point virgule qui signifient « tel que »
Exemple : $\exists\, x \in]0,+\infty[\ ;\ 2*\sin(10\,x) + \exp(x) = 3$.
Ou encore $\exists\, x \in]0,+\infty[\ /\ 2*\sin(10\,x) + \exp(x) = 3$. A prouver en exercice, en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires.
A titre d'information il existe exactement 5 valeurs de x satisfaisant à cette condition.

∀ : quel que soit. Exemple : $(\forall\, x \in \mathbb{R})\quad (x^2 + 1 > 0)$
{} : l'ensemble des .
Par exemple $\{ x \in \mathbb{R} \ / x^2 - 4x+3 \leq 0\} = [1\ ;3]$. Pour le prouver, vous pouvez commencer par remarquer que pour tout x de IR , $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$

0.7 A vous

Exemple 8:

Il s'agit de prouver que les fonctions f solutions de : $2x\, f(x) + f'(x) = 0$ pour tout x de $]0,+\infty[$ sont les fonctions de la forme : $x \in]0,+\infty[\mapsto f(x) = K \exp(-x^2)$, K désignant une nombre constant.

Voici deux raisonnements proposés comme réponses. L'un d'eux prouve-t-il l'assertion ? Chacun d'eux la prouve-t-il ? Aucun d'eux ne le prouve-t-il ? L'un est-il préférable à l'autre ? Avez-vous d'autres commentaires ?

Raisonnement 1.

Si $\boldsymbol{f(x) = K \exp(-x^2)}$ $= K e^{-x^2}$ pour tout x de ℝ
alors $f'(x) = -2Kx \exp(-x^2)$,
d'où
$2x\, f(x) + f'(x) = 2xK \exp(-x^2) + (-2xK \exp(-x^2))$
$= 0$ pour tout x de ℝ .

Raisonnement 2.

Soit f une fonction dérivable sur ℝ telle que
$2x\, f(x) + f'(x) = 0$ pour tout x de ℝ
alors $(2x\, f(x) + f'(x)) \times e^{x^2} = 0 \times e^{x^2}$
$= 0$ pour tout x de ℝ.
d'où $2x\, f(x) e^{x^2} + f'(x) e^{x^2} = 0$
Posons $g(x) = e^{x^2}$ pour tout x de ℝ.
Alors $g'(x) = 2x e^{x^2}$
d'où $g'(x) f(x) + g(x) f'(x) =$
$2x e^{x^2} f(x) + e^{x^2} f'(x) = 0$ pour tout x de ℝ ,
d'où $(f\,g)'(x) = 0$ pour tout x de ℝ

Donc $f(x)\, g(x)$ est constante sur tout ℝ. Notons K cette constante.
$f(x)\, g(x) = K$.

Donc $\boldsymbol{f(x)} = \dfrac{K}{g(x)} = K \exp(-x^2)$ pour tout x de ℝ , K désignant un nombre constant.

0.8 En bref

- L'expression "Si A alors B" est appelée un implication.
- Il faut toujours faire attention à ne pas la confondre avec son implication réciproque "Si B alors A".
- "Si A alors B" ne permet pas d'affirmer que "Si B alors A".
- En revanche, "Si A alors B" permet d'affirmer que "Si B n'est pas satisfaite alors A n'est pas satisfaite"
- Pour s'y retrouver, on peut construire ou visualiser un tableau à 2 lignes et 2 colonnes, comme en 0.1.2 , et rayer les lignes qui ne peuvent pas être satisfaites pour laisser apparaître les cases possibles.
- L'équivalence logique "A si et seulement si B" exprime que A et B ne peuvent être que soit satisfaites ensemble, soit non satisfaites ensemble, ou encore que "Si A alors B" et "Si B alors A" sont vraies toutes les deux.
- En mathématiques "A ou B" exprime que l'une de ces conditions est satisfaite, ou l'autre, ou encore les deux en même temps.
- Les notations mathématiques ne doivent être perçues que comme des raccourcis, elles n'ont pas plus de valeur que leur expression en langage courant, et elles perdent toute signification si elles ne sont pas utilisées exactement dans leur contexte.