Licence économie gestion 1ère année. 2024 2025.
Mathématiques 1.

Série d'exercices de Travaux Dirigés n° 3.

Limite. Définition.

Exercice 109 - Rappeler la valeur de $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$, puis prouver qu'il **existe** un nombre a >0 (on ne demande pas de trouver la valeur de a) tel que

pour tout x de]0, a[$\quad 0{,}98\,x \leq \ln(1+x) \leq 1{,}02\,x$

Exercice 110 - Rappeler la valeur de $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$, puis prouver qu'il existe un nombre a >0 (on ne demande pas de calculer sa valeur) tel que *pour tout x de]a, + ∞[* $\quad \ln(x) \leq 0{,}10\,x$

Exercice 111 *a)* Montrer que pour tout x de [0,+∞[, $\quad 3\mathrm{x} \leq \ln(1+\exp(3\mathrm{x})) \leq 3\mathrm{x}+\ln 2$

b) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+\exp(3\mathrm{x}))}{x} = 3$

Exercice 112 Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, $\quad -e^{-x} \leq e^{-x} \cos x \leq e^{-x}$. En déduire l'existence et la valeur de $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^{-x} \cos(x)\right)$

Exercice 113 Calculer les limites suivantes et conclure :

$\lim\limits_{x \to 0^+} \quad x^2 - 1 + \frac{\sqrt{x^2}}{x}$ $\qquad\qquad$ $\lim\limits_{x \to 0^-} \quad x^2 - 1 + \frac{\sqrt{x^2}}{x}$

Exercice 114 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{2a}{x-1} \, si \; x > 2 \\ f(x) = -x + 3 \; si \; x < 2 \\ f(2) = 1 \end{cases}$, a désigne un nombre réel.

Calculer $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$; f a-t-elle une limite en 2 ? Pour quelle valeur de a f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Construire C(f), représentation graphique de f.

Exercice 115 Soit f la fonction définie sur l'ensemble D_f par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{4\mathrm{x}+1} \; si \; x > 2 \\ f(x) = x^2 - 1 \; si \; x \leq 2 \end{cases}$

Préciser l'ensemble de définition de f, D_f,
Calculer $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$

f a-t-elle une limite en 2 ? Construire la représentation graphique de f. Peut-on construire un prolongement d fa par continuité en 2 ?

Exercice 116 Calculer les limites suivantes : (on pourra introduire la quantité h = x-2)

1) $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{\ln(x-1)}{\sqrt{x^2-4}}$ 2) $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{\ln(x-1)}{\sqrt{4-x^2}}$

Comparaison d'infiniment petits, d'infiniment grands.

Exercice 117 a) Donner $\lim\limits_{x \to +\infty}$ exp(x), $\lim\limits_{x \to +\infty}$ exp[exp(x)] , $\lim\limits_{x \to +\infty}$ ln(x), $\lim\limits_{x \to +\infty}$ ln(ln(x))

b) A l'aide d'une calculette, évaluer autant que possible exp(x), exp(exp(x)), ln(x), ln(lnx)) pour les valeurs suivantes de x: 2, 10, 10000, 10^9 , 10^{15}, 10^{20}, le budget de l'Etat Français en Euros, la population mondiale, le nombre de cacahuètes produites dans le monde entier (en prenant 2, 5 g pour poids moyen d'une cacahuète)

c) Qu'en déduire en ce qui concerne l'utilisation des résultats de a) pour l'économie ou la gestion ?

Exercice 118 Préciser les ensembles de définition, chercher les limites et des équivalents simples des fonctions suivantes au voisinage des points indiqués.

1°) f(x) = $\frac{x^2-2x-3}{2x^2-5x-3}$ en 0; puis 3; $+\infty$, $-\infty$

2°) g(x) = $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x^2-1}$ en 1; -1; $+\infty$; $-\infty$

3°) h(x) = $\frac{\ln(x)}{\sqrt{x-1}}$ en + ∞ et en 1

Exercice 119 soit la fonction g définie par : pour tout x de]0; + ∞ [, g(x) = $x\frac{e^x-(\ln x)^3-x^2}{1+2x}$

Etudier la limite éventuelle de g en 0, puis la limite éventuelle de g en 0.

Exercice 120 Déterminer si les infiniment petits ou grands suivants sont du même ordre ou non. Si non, les comparer.

1°) f(x) = 2x + x^3+ 1 et g(x) = 10x + 5 x^2+ 4 , pour x tendant vers + ∞ .

2°) f(x) = $3x^3$+ 4x + 1 et g(x) = $2x^3$ + x e^{2x} + 1 , pour x tendant vers + ∞ .

3°) $f(x)=\frac{x+3}{x+2}$ et $g(x)=9-x^2$ pour x tendant vers -3.

4°) f(x) = ln(x+2) et g(x) = $\frac{2}{x}+2$ pour x tendant vers -1.

5°) f(x) = x sin(3x) et g(x) = $x^3\sqrt{x+1}$ pour x tendant vers 0.

6°) $f(x)=\frac{1}{x^3}$ et $g(x)=3(\exp(-x+1))^2$ pour x tendant vers + ∞ .

Exercice 121 Indiquer les ensembles de définition et déterminer les asymptotes aux courbes représentatives des fonctions suivantes:

1°) $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x+1}$ 2°) g(x) = $\dfrac{(x+1)^2}{2x-x^2}$ 3°) h(x)= $x\,e^{-1/x}$

4°) k(x) = $x+\sqrt{x^2+2x-3}$ 5°) j(x) = $x-\sqrt{x}$ 6°) m(x) = $\sqrt{2x+5}$ 7°) n(x) = $\dfrac{e^x-1}{x}$

Exercice 122 1) On cherche à prouver l'existence de $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\frac{1}{\sqrt{x+1}}-1}{x}\right)$ et à calculer cette limite.

1ère méthode. On définit la fonction numérique g sur]-1 ; +∞[par : x ∈]-1 ; +∞[a $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}=(1+x)^{-1/2}$.

Calculer g(0), **en déduire** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-1}{x}$ **à l'aide d'une dérivation**.

Conclure : en déduire $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\frac{1}{\sqrt{x+1}}-1}{x}\right)$

2nde méthode. Montrer que pour tout x de]-1, + ∞[$\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}-1=\dfrac{-x}{(1+\sqrt{x+1})\sqrt{x+1}}$

En déduire la limite cherchée

2°) prouver que . $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}-1\underset{x\to 0}{\sim}-\dfrac{x}{2}$

3°) Quelle valeur approximative cela indique-t-il pour $1/\sqrt{1{,}00028}$? Présentée seule, cette valeur approximative n'est pourtant pas exploitable, pourquoi?

Exercice 123 Préciser les ensembles de définition, chercher les limites et des équivalents simples des fonctions suivantes au voisinage des points indiqués.

1°) f(x) = $\dfrac{x^2-2x-3}{2x^2-5x-3}$ en 0; puis 3; $+\infty$, $-\infty$

2°) g(x) = $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x^2-1}$ en 1; -1; $+\infty$; $-\infty$

3°) h(x) = $\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x-1}}$ en + ∞ et en 1

Exercice 124 soit la fonction g définie par : pour tout x de]0; + ∞ [, g(x) = $x\,\dfrac{e^x-(\ln x)^3-x^2}{1+2x}$

Etudier la limite éventuelle de g en 0, puis la limite éventuelle de g en 0.

Exercice 125 Cet exercice est une préparation à l'utilisation des développements limités

g est une fonction définie sur ℝ , dont on sait uniquement que $\lim_{x \to 0} g(x)=0$.

soit f définie sur ℝ par : $x \in \mathbb{R} \mapsto f(x)=1+2x-3x^2+x^2 g(x)$

Soir r définie sur ℝ par : $x \in \mathbb{R} \mapsto r(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x)-1}{x} \, si \, x \neq 0 \\ 2 \, si \, x=0 \end{cases}$

1°) Etudier $\lim_{x \to 0} r(x)$, puis $\lim_{x \to 0} \dfrac{r(x)-r(0)}{x}$;

2°) r est-elle continue en 0 ? r est-elle dérivable en 0 ?

3°) On pose , pour tout x de ℝ , u(x) = x + x^2. Montrer que f(u(x)) = 1 + 2x – x^2 + x^2 h(x) , où h(x) est une fonction telle que $\lim_{x \to 0} h(x)=0$

Exercice 126 g est une fonction définie sur ℝ , dont on sait uniquement que $\lim_{x \to 0} g(x)=0$.

soit f_2 définie sur ℝ par : $x \in \mathbb{R} \mapsto f_2(x)=3x-x^2+x^2 g(x)$

Soir r_2 définie sur ℝ par : $x \in \mathbb{R} \mapsto r_2(x)=\begin{cases} \dfrac{f_2(x)}{x} \, si \, x \neq 0 \\ 3 \, si \, x=0 \end{cases}$

1°) Etudier $\lim_{x \to 0} r_2(x)$, puis $\lim_{x \to 0} \dfrac{r_2(x)-r_2(0)}{x}$;

2°) r_2 est-elle continue en 0 ? r_2 est-elle dérivable en 0 ?

3°) On pose , pour tout x de ℝ , v(x) = 2x - x^2

Montrer que f_2(v(x)) = 6x – 7x^2 + x^2 j(x) , où j(x) est une fonction telle que $\lim_{x \to 0} j(x)=0$

Exercice 127

1) Trouver un contre-exemple qui prouve que $f_1 \sim g_1$ au voisinage de 0 et $f_2 \sim g_2$ au voisinage de 0 n'implique pas forcément que $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$

2) Chercher la limite en 0 et un équivalent simple de ln(2+x) et de $\sqrt{x+1}-x$

3) Définissons la fonction h sur]-2 ; + ∞ [par :
x ∈]–2 ; + ∞ [⟼ h(x) = ln(2+x) .

Que vaut h(0) ? Que vaut h'(0) ?

En déuire la valeur de la limite suivante $\lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(2+x)-\ln 2}{x}$.

4) trouver un équivalent simple en 0 de ln(2+x) - ln2

5) En vous inspirant des questions précédentes, et en introduisant la fonction w :

x ∈]–2 ; + ∞ [⟼ w(x) = $\sqrt{x+1}-x$, évaluer $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-x-1}{x}$

Exercice 128 Indiquer les ensembles de définition et déterminer les asymptotes aux courbes représentatives des fonctions suivantes:

1°) $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x+1}$ 2°) g(x) = $\dfrac{(x+1)^2}{2x-x^2}$ 3°) h(x)= $x\,e^{-1/x}$

4°) k(x) = $x+\sqrt{x^2+2x-3}$ 5°) j(x) = $x-\sqrt{x}$ 6°) m(x) = $\sqrt{2x+5}$ 7°) n(x) = $\dfrac{e^x-1}{x}$

Continuité de fonctions d'une variable

Exercice 129 Sur quels ensembles les fonctions suivantes sont-elles continues?

1°) $x\mapsto\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x-3}$ 2°) $x\mapsto\sqrt{x^3-1}$ 3°) $x\mapsto\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ 4° $x\mapsto\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$

5°) $x\mapsto x^{2\ln}(2x^2-1)$

Exercice 130 Soit f la fonction définie sur l'ensemble D_f par $\begin{cases} x\,e^{1/x}\ si\ x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

1°) Quel est l'ensemble de définition def, Df ? 2°) f est-elle continue sur cet ensemble ?

Exercice 131 Soit w la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : w(x) est le nombre de chiffres à gauche de la virgule dans l'écriture décimale de x (w(890,5)=3, w(π) = 1,...)

a) Etudier la continuité de w b) Montrer que $w(x)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{\ln(x)}{ln10}$ c) Etudier limites et asymptotes éventuelles à la courbe représentative de w.

Exercice 132 Dénombrer rigoureusement, en utilisant le théorème adéquat, soigneusement justifié, le nombre de solutions à l'équation : $x^3-3x^2+3=0$ puis préciser leurs valeurs à 0,1 près.

Limites. Fonctions de 2 variables.

Exercice 133 Calculer les limites suivantes : a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)}\frac{xy^2-x+3y}{xy+y^2}$

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)}\frac{x^{2y}-2xy+y}{x^{2y}-xy}$ c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2+y^2$ et $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\exp(x^2+y^2)-1}{x^2+y^2}$

Exercice 134 On considère la fonction numérique de 2 variables réelles définie sur

Dg = $\mathbb{R}^2-\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,;\,y=-x\}$ par : g: $(x,y)\in D_g\longmapsto\dfrac{2x-y}{x+y}$ Représenter graphiquement le domaine de définition D_g.

a) On se limite aux couples (x,y) tels que y = 2x. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0}$ g(x, 2x)

b) On se limite maintenant aux couples (x, y) tels que y = 3x. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} g(x,3x)$

c) Etudier la limite éventuelle en (0, 0) de g.

Exercice 135 (il est conseillé de résoudre l'exercice précédent avant celui-ci). On considère la fonction numérique de 2 variables réelles définie sur l'ensemble $D_h = \mathbb{R}^2 - \{(x,y) \text{ in } R^2; y = - x^2\}$ par : h: $(x,y) \in D_h \longmapsto \frac{x^2}{x^2+y}$

a) Déterminer $\lim_{x\to 0} h(x, 2x)$, puis $\lim_{x\to 0} h(x, 3x)$

b) Déterminer $\lim_{x\to 0} h(x, x^2)$

c) Etudier la limite éventuelle en (0,0) de h.

Exercice 136 1°) Montrer que pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$, $-(x^2 + y^2) \leq 2xy \leq x^2 + y^2$

2°) En déduire l'existence et la valeur de la limite suivante :

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ On pourra utiliser directement la définition donnée en cours d'une fonction de

Deux variables, ou plus facilement, poser $z = x^2 + y^2$ et encadrer l'expression $\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ à l'aide d'une expression d'une seule variable réelle

Elasticité

Exercice 137 1°) Calculer l'élasticité de la fonction $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto 3x^5$ 2°) On cherche les fonctions d'élasticité constante. On suppose que q est une fonction définie sur]0 , + ∞[, d'élasticité constante k. On définit sur
]0,+∞[une fonction g par : $(pour\ tout\ x\ de\ ]0,+\infty[)\quad g(x)=x^{-k}q(x)$. Montrer que g est constante. En déduire qu'il existe une constante C telle que pour tout x de]0, + ∞[, $q(x)=C\,x^k$.

Différentielle de fonctions de 2 variables

Exercice 138 Pour chacune de ces fonctions de 2 variables :
a) Calculer sa différentielle b) Donner la différentielle au point (1, 2) c) Préciser ce que signifie cette différentielle**.**
1°) $f_1 : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto xy^2 + 3y$ 2°) $f_2 : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \ln(x^2 + 3y^2 + 1)$
3°) $f_3 : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto xy + x\exp(-2xy)$

Exercice 139 a) Calculer les dérivées partielles secondes - c'est à dire les dérivées partielles des dérivées partielles – de la fonction définie au 1°) de l'exercice 138,
b) retrouver dans ce cas ce que prévoit le théorème de Schwarz.

Exercice 140
Montrer qu'au voisinage de (h,k) = (0,0) : $\exp(2h - k) = 1 + 2h - k + o(h,k)$
Exercice 141
f est une fonction définie et différentiable sur $\mathbb{R}^2$, dont la différentielle est donnée par :
$df(x,y)=(2x-6y)dx+(18y-6x)dy$
Pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$, posons $u(x,y)=x-3y$, $v(x,y)=x-2y$.

1°) Montrer que $x = -2u + 3v$ et $y = v - u$.

2°) Calculer $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial f}{\partial v}$ en fonction de *x* et *y* puis en fonction de *u* et *v*.

3°) En déduire que *f* ne dépend pas de *v*

4°) Déduire des 2 résultats précédents l'expression de $f(x, y)$en fonction de *u* , puis en fonction de *x* et *y*.

Exercice 142

a) Indiquer quel est le plus grand sous-ensemble D de $\mathbb{R}^2$ sur lequel on puisse définir la fonction :

f : (x,y) ∈ D ↦ $3y + x + \ln(xy - 1)$

b) Déterminer la différentielle de f

c) Justifier que l'égalité f(x,y) = 7 définit, au voisinage (préciser ce terme) de (1, 2) , y en fonction d'x, y = φ(x). On ne demande pas de trouver l'expression de φ .

d) Déterminer φ' (1)

Exercice 143

a) ***f*** est la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : f : (x,y) ∈ $\mathbb{R}^2$ ↦ $x + 2y + \exp(xy)$

b) Déterminer la différentielle de f

c) Justifier que l'égalité f(x,y) = 2 définit, au voisinage (préciser ce terme) de (x,y) = (1, 0) , y en fonction d'x, y = φ(x) . On ne demande pas de trouver l'expression de φ .

d) Déterminer φ' (1)

Développements limités

Exercice 144

Appliquer lorsque les conditions suffisantes sont remplies le théorème des accroissements finis aux fonctions et aux intervalles suivants.

Lorsque c'est possible, trouver une valeur pour le réel c de la formule.

a) x ∈ [1, e] ↦ln(x) b) x ∈[- π , + π] ↦sin(x) c) x ∈ [- π , + π] ↦| sin(x) |

a et b désignent deux nombres réels satisfaisant a < b : d) x ∈ [a, b] ↦x^2 , e) x ∈ [a, b] ↦exp(2x)

Exercice 145

Ecrire le développement de Taylor Young à l'ordre 3 pour les fonctions suivantes, au voisinage des valeurs indiquées :

a) x ↦exp(3x) , au voisinage de x = 0,

b) x ↦-1 + exp(2x) , au voisinage de x = 1, puis au voisinage de x = 0.

c) x ↦ln (3+x) , au voisinage de x = 0 , puis au voisinage de x = 1.

d) x ↦ 1 / (2x +1) , au voisinage de x = 0.

e) x ↦$3x^2$ + 2x +1 , au voisinage de x = 0

Exercice 146

1°) Etablir un développement limité de ln(1+ 4 *x*) à l'ordre 2 au voisinage de *x* = 0 à l'aide de la formule de Taylor et Young,

2°) **en déduire** $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\ln(1+4x) - 4x}{x^2} \right)$

Exercice 147

Ecrire un développement limité à l'ordre 3 des fonctions suivantes, au voisinage des points indiqués.

a) exp(3x +2) , au voisinage de x = 0 , en utilisant les deux méthodes , le développement de Taylor-Young, puis les développements limités usuels.

b) x ∈]- 1/5, + ∞[↦ $\ln\left((5x+1)^2\right)$, au voisinage de x = 0 (utiliser le développement de Taylor Young, puis des développements limités usuels) .

c) x ∈ $\mathbb{R}$ ↦10^{3x}, à l'ordre 3, au voisinage de x = 0.

d)) $x \in]-1, +\infty[\mapsto \ln(1+x)$, au voisinage de 0, en utilisant les développements limités usuels.
e) $x \in]-2, +\infty[\mapsto \ln(2+x)$, au voisinage de 0, en utilisant les développements limités usuels.
f) $x \in]-1, +\infty[\mapsto \ln(1+x)$, au voisinage de 1, en utilisant les développements limités usuels. On posera $x=1+h$

Exercice 148 On définit sur $]-1 , +\infty [$

- une fonction *h* par $h: x\in]-1, +\infty[\mapsto h(x)=\ln(2+x+\exp(x))$
- et une fonction g par : $x\in]-1, +\infty[\mapsto g(x)=\begin{cases} \dfrac{h(x)-\ln 3}{x} & si\, x\neq 0 \\ 2/3 & si\, x=0 \end{cases}$

Question 1 Evaluer h(0)
Question 2 Evaluer $\lim_{x\to 0} g(x)$ à l'aide d'une dérivation.
Question 3 Donner le développement limité , à l'ordre 2 au voisinage de x = 0, de exp(x)
Question 4 Donner le développement limité , à l'ordre 2 au voisinage de t = 0, de ln (1+t)
Question 5 Montrer que $h(x)=\ln(3)+\frac{2}{3}x-\frac{x^2}{18}+x^2\varepsilon(x)$, avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$
Question 6 En déduire le résultat de la question 2 , $\lim_{x\to 0} g(x)$
Pour les 2 questions suivantes particulièrement, n'oubliez pas de justifier :
Question 7 g est-elle continue en 0 ?
Question 8 g est-elle dérivable en 0 ? Si oui, que vaut g' (0) ?

Applications linéaires

Exercice 149 Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

a) $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \mapsto f_1(x,y,z) = (x, x+2y+z)$
b) $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (x,y) \mapsto f_2(x,y) = (x+y, 0, 3x)$
c) $f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \mapsto f_3(x,y,z) = (2y, xy)$
d) $f_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \mapsto f_4(x,y,z) = (x+2, y+z)$
e) $f_5 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x,y,z) \mapsto f_5(x,y,z) = x+2z$
f) $f_6 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (x,y) \mapsto f_6(x,y) = x \cdot(3, -1, 1)$
g) $f_7 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto f_7(x,y,z) = x\,(y, 2y, 1)$
h) $f_8 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto f_8(x,y) = (x,x) + (0,1)$
i) $f_9 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x,y,z) \mapsto f_9(x,y,z) = (x^2 , 2y, 3z)$
j) $f_{10}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto f_{10}(x,y) = (x+y, 2x)$

Exercice 150

On considère les deux vecteurs suivants de $\mathbb{R}^2$: $v_1 = (1;-1)$, $v_2 = (1;0)$.
1°) Montrer que v_1 , v_2 forment une base de $\mathbb{R}^2$. On la notera B_1.
2°) Montrer que les trois vecteurs (1;1;2) , (1;0;3), (1;0;0) forment une base de $\mathbb{R}^3$. On la note B_2.
3°) Calculer, pour tout vecteur (x;y) de $\mathbb{R}^2$ ses coordonnées dans B_1 .

4°) Cette question ne nécessite aucun calcul. Justifier qu'il y a 1,et 1 seule, application linéaire f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ satisfaisant à : **f(v_1) = (2;2;4) et f(v_2) = (1;0;3)**.
5°) Que valent $f(3v_1)$? $f(3v_1 + 2 v_2)$?
6°) a et b désignent sont deux nombres réels, et w un vecteur de $\mathbb{R}^2$ qui a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dans la base B_1 . Indiquer ce que vaut w en fonction de a,b, v_1 , v_2 , puis en déduire l'expression de f(w) en fonction de a et b.

7°) Quelles sont les coordonnées de $f(v_1)$ et $f(v_2)$ dans la base B_2 ?
On appelle matrice de f dans les bases B_1 et B_2 le tableau de nombres suivant, encadré par des parenthèses :
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$
8°) Quel lien ce tableau a-t-il avec f, v_1 , v_2 , B_1 , B_2 ?
Ce tableau est appelé **matrice de f dans les bases B_1 et B_2** .

De façon générale, si g est une application linéaire d'un espace E de dimension p dans un espace F de dimension k, B = (e_1 , e_2 , ...e_p) est une base de B et B' est une base de F, on appelle **matrice de g dans les bases B et B'** le tableau des coordonnées de g(e_1) , g(e_2) , … g(e_p) dans la base B'.

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ & & \dots & \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \end{pmatrix} \quad \text{(dim F) lignes}$$

coordonnées de g(e_1) dans B	coordonnées de g(e_2) dans B		coordonnées de g(e_p) dans B

(dim E) colonnes

Exercice 151

a) Donner la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ de l'application linéaire f_2 de l'exercice 149 .
b) Donner la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ – base de départ et d'arrivée – de l'application linéaire f_{10} de l'exercice 149 .
On considère dorénavant l'application linéaire f_1 de l'exercice 149 a).
b) Donner la matrice de f_1 dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.
c) Montrer que (1,1,0) (1, -1,0), (0,0,1) forment une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de l'application linéaire f_1 dans cette base de $\mathbb{R}^3$ et la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
d) Donner la matrice de l'application linéaire f_1 dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et la base ((1,1), (0,1)) de $\mathbb{R}^2$

Exercice 152 f désigne une application linéaire de l' espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^p$.
a) montrer que si X_1 , X_2 ,... X_k sont k vecteurs liés de $\mathbb{R}^n$, alors f(X_1), f(X_2), .. f(X_k) sont des vecteurs liés de $\mathbb{R}^p$.
on considère l'application linéaire g qui à tout (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ associe le vecteur g(x,y,z) = (x+y+2z , 0) de $\mathbb{R}^2$.
b) montrer que g est une application linéaire
c) calculer g(1,0,0), g(0,1,0), g(0,0,1).
d) les images par une application linéaire d'une famille libre de vecteurs sont-elles toujours libres ?

Exercice 153

a) montrer que les vecteurs A = (1,2) , B = (0,1) forment une base de $\mathbb{R}^2$. Elle sera notée $\mathscr{B}_1$.
b) montrer que U = (1, 2, 3) , V = (3, 4, 0) , W = (1,0,0) forment une base de $\mathbb{R}^3$. Elle sera notée $\mathscr{B}_2$
c) Justifier le fait qu'il y a une, et une seule, application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ g satisfaisant à :
g(1,2) = (0,0,0) et g(0,1) = U. Cette question ne nécessite pas de longs calculs.
d) Montrer que l'ensemble des vecteurs X solutions de g(X) = (0,0,0) – cet ensemble est appelé le Noyau de g – est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ engendré par (1,2). Indication : il est possible d'utiliser les coordonnées de X dans la base $\mathscr{B}_1$.
e) Montrer que pour tous vecteurs Y et Y ' de $\mathbb{R}^2$, g(Y) = g(Y') si et seulement si g (Y – Y') = (0,0,0)
f) Montrer que pour tous vecteurs Y et Y ' de $\mathbb{R}^2$, g(Y) = g(Y') si et seulement si il existe a de $\mathbb{R}$ satisfaisant à Y = Y' + a (1,2).
e) Donner la matrice de g dans les bases $\mathscr{B}_1$ (départ) et $\mathscr{B}_2$ (arrivée).

Exercice 154

On note C_3 la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et C_2 Celle de $\mathbb{R}^2$.
On note i = (1,0,0), j = (0,1,0) , k = (0,0,1).
a) montrer que (1,1,0) , (1,2,0) (1,1,1) forment une base de $\mathbb{R}^3$. On la notera dorénavant B_3.
b) Montrer que (1,2) et (1,1) forment une base de $\mathbb{R}^2$, que l'on notera dorénavant B_2.

c) On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exprimer, pour tout vecteur X = (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$, f(X) en fonction de x,y,et z

d) Exprimer f(i) , f(j), f(k) en fonction de u = (1,2) et v = (1,1)

e) Trouver la matrice de f dans les bases C_3 de $\mathbb{R}^3$ et B_2 de $\mathbb{R}^2$.

f) Trouver la matrice de f dans la base B_3 de $\mathbb{R}^3$ et B_2 de $\mathbb{R}^2$

g) Trouver la matrice de f dans la base B_3 de $\mathbb{R}^3$ et la base canonique de $\mathbb{R}^2$

On considère l'application linéaire g qui a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ dans les bases B_3 et B_2

h) Montrer que g(i) + g(j) = u – v , g(i) + 2 g(j) = u+2v , g(i)+g(j)+g(k) = 3 v

i) En déduire la matrice de g dans les bases C_3 et B_2.

j) Trouver la matrice de g dans les bases C_3 et C_2.