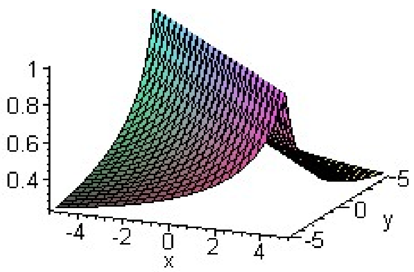
Licence économie gestion 1ère année. 2024 2025.
Mathématiques 1. Exercices de travaux dirigés.
Série d'exercices de TD n° 2.

Fonctions de 2 variables réelles.

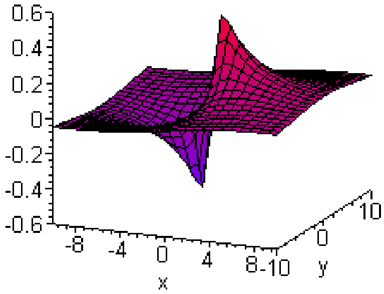
Exercice 47 Pour tous nombres x et y satisfaisant à $y \neq -3$, on pose : $g(x, y) = \dfrac{8x^2 + y}{y+3}$.

1. on fixe $y = 1$. La fonction qui à tout nombre x associe $g(x, 1)$ est une fonction usuelle, laquelle ? Comment se nomme le graphe d'une telle fonction ?
2. On fixe x = 2. La fonction qui à tout nombre x associe $g(2, y)$ est une fonction usuelle, laquelle ? Comment se nomme le graphe d'une telle fonction ?
3. On s'intéresse à la courbe de niveau 2 de g, formée des couples de nombres (x, y) solutions de $g(x, y) = 2$. Montrer que c'est une parabole.

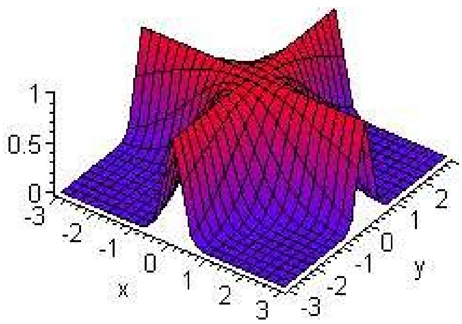
Exercice 48 Voici des graphes de fonctions, numérotés de 1 à 4 , et des tracés de courbes de niveau, numérotés de A à D.Pour chaque tracé de courbes de niveau indiquer le graphe correspondant.



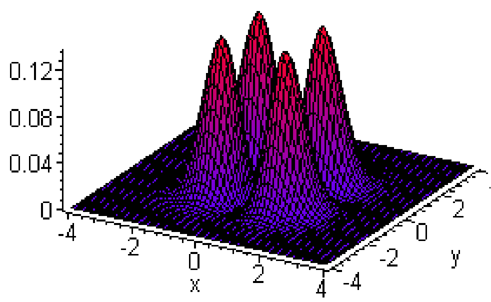
1



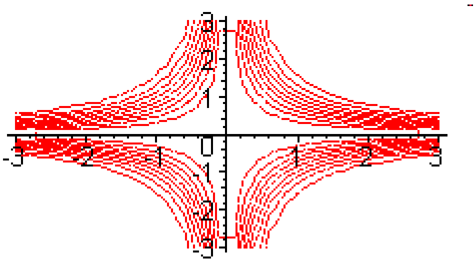
2



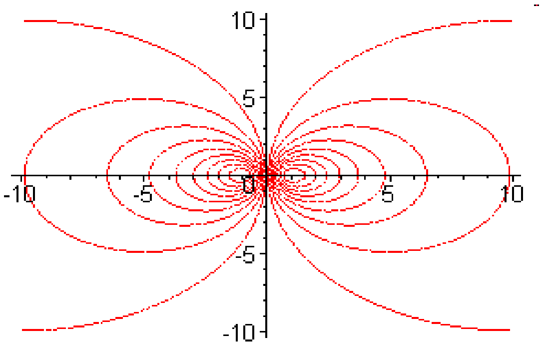
3



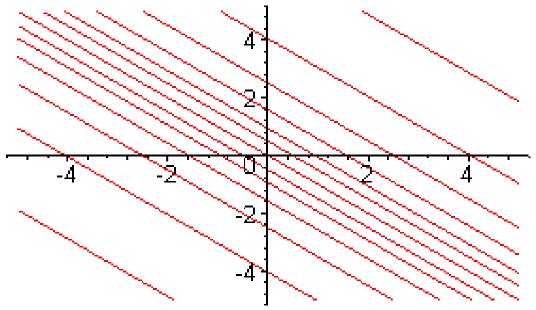
4



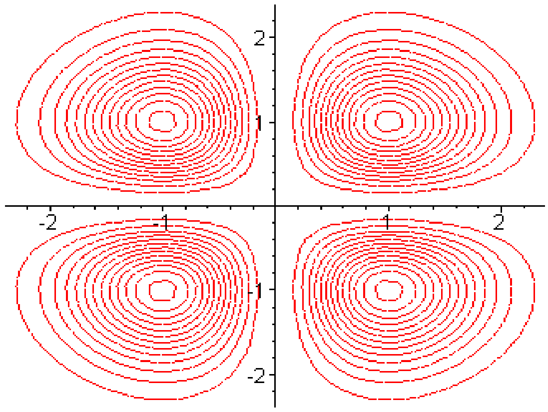
A



B



C



D

Dérivées.

Exercice 49 Exprimer les dérivées des fonctions f définies par les expressions suivantes, après avoir précisé les ensembles de dérivabilité, éventuellement en fonction du paramètre a, lorsqu'il apparaît.

1°) $f(x)=\sqrt{5x+2}$ 2°) $f(x)=(3x+1)\sqrt{5x+2}$ 3°) $g(x)=\exp(5x+2)$ 4°) $f(x)=\dfrac{1+\exp(5x+2)}{3x+4}$

5°) $f(x)=\ln(ax^2+a)$ 6°) $f(x)=|x|$ 7°) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$ 8°) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{x+1}+x-2}$

9°) $f(x)=\sqrt[3]{x+2}$ 10°) $f(x)=\sqrt{(x+a)^3}$ 11°) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x+2}}$

12°) $f(x)=(1+\dfrac{2}{x})^3(4-3x)^2$ 13°) $f(x)=\ln(\sin x)$ 14° $f(x)=\dfrac{x-2}{x+3}+x$

15°) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+2}+3}+\sqrt{x+2}$ (en utilisant l'exce précédent) 16°) $f(x)=\sqrt{\ln[\exp(2x)+1]}$

17°) $f(x)=(3x^5-3x+2)^3$ 18°) $f(x)=\ln\left(\dfrac{|(2x-3)(1+2x)|}{|2x-1|}\right)$ 19°) $f(x)=\ln(\ln(ax))$

20°) $f(x)=x\exp(\dfrac{1}{x})$ 21°) $f(x)=4^x$ $(\textit{rappel } 4^x=\exp(x\ln 4) \textit{ par définition})$ 22°) $f(x)=(1+\dfrac{1}{x})^x$

Exercice 50

On définit une fonction u sur [0, + ∞[et une fonction g sur [0 ; 4[U]4 ; + ∞[ainsi :

pour tout x de [0, + ∞[, $u(x)=\sqrt{x}$

pour tout x de [0 ; 4[U]4 ; + ∞[$g(x)=\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{4}}{x-4}$

a) Donner l'expression de $u'(x)$ pour tout x de]0, + ∞[, puis la valeur de $u'(4)$.

b) remplir le tableau de valeurs suivant, en prenant une précision de 0,0001

x	6	4,5	4,2	3,7	3,99	4,001
g(x)						

c) d'après ce tableau g(x) semble-t-elle s'approcher d'une valeur fixe lorsque x s'approche de 4 ?

d) Trouver, et justifier, un lien entre $\lim_{x\to 4} g(x)$, u, u'.

e) comparer les résultats de d) et c).

Exercice 51

On considère 3 variables x, y, z liées par la relation $z=x^2y^3$.

1°) On fixe y = 2.

a) z est alors une fonction d'x, exprimer la dérivée de cette fonction,

b) indiquer la valeur en x=1 de la dérivée établie au a).. Cette valeur s'appellera bientôt la dérivée

partielle de z par rapport à x, à y constant, en (x,y) = (1, 2)
2°) On fixe x= 1. z est alors une fonction d'y.
a) Exprimer la dérivée de cette fonction.
b) Indiquer la valeur en y = 2 de la dérivée établie au a)..

Exercice 52
Mêmes questions qu'à l'exercice précédent en remplaçant la relation entre x, y et z par : z = exp(-3 x² y)

Exercice 53
En utilisant la dérivée de la fonction qui à tout *x* de ℝ associe x^4, montrer qu'à mesure que *x* prend des valeurs de plus en plus proches de 2, $\frac{x^4-16}{x-2}$ qui est égale aussi à $\frac{x^4-2^4}{x-2}$, s'approche de 32– ce qui se note $\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x-2}=32$ –.

Exercice 54 Soit la fonction f : $x\in]-2\,;+\infty[\ \mapsto\ f(x)=\ln(x+2)$
a) Que vaut f(0) ?
b) En utilisant la fonction f, et en remarquant que *x* = *x*-0, montrer que $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+2)-\ln 2}{x}=\frac{1}{2}$.
c) En déduire qu'il existe un intervalle ouvert J, contenant 0, J =]-a, + a[(on ne demande pas de calculer la valeur de a) tel que pour tout x de J, $\frac{1}{4}|x|\leqslant|\ln(x+2)-\ln 2|\leqslant\frac{3}{4}|x|$

Exercice 55 Montrer que $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m-1}{x}=m$, pour tout *m* réel (pas forcément entier),en utilisant la dérivée en 0 de la fonction qui à tout *x* de] -1, + ∞[associe $(1+x)^m$. On pourra remarquer que *x* = *x* – 0.

Exercice 56 Montrer que $\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{x}=3$, en utilisant une dérivation (on pourra remarquer que *x* = *x* – 0).
Attention, ce n'est pas la dérivée de la fonction qui à *x* associe $\frac{e^x-1}{x}$ qui répondra à la question.

Exercice 57 On considère la fonction *f* définie sur ℝ ainsi : (pour tout *x* de ℝ) $f(x) = 4x^2$ et le polynôme $P(h) = 4\,(3+h)^2$
Développer ce polynôme, puis en déduire sans calculs supplémentaires , en particulier sans utiliser les dérivées usuelles:

1. $f\,'(3)$
2. une équation de la droite tangente à la courbe représentative de *f* au point d'abscisse 3 et d'ordonnée 36
3. la fonction différentielle de *f* au point *x* = 3

Exercice 58 On considère la fonction *f* définie sur ℝ- { 3} par : (pour tout *x* de ℝ - {3}) $f(x)=\frac{x+1}{x-3}$.

1. Trouver l'équation de T_5 , tangente à la courbe représentative de *f* au point d'abscisse 5.
2. Montrer qu'il existe 1, seul, autre point de la courbe ayant une tangente parallèle à T_5.
3. Montrer qu'il n'existe pas de point sur la courbe ayant une tangente perpendiculaire à T_5.

Exercice 59 Un entreprise vend un matériau. Produite une Q kg de ce matériau en un jour lui coûte C(Q)= $100+2Q-\sqrt{Q}$ Euros. Le terme 100 représente les coûts fixes, les coûts variables sont à peu près proportionnels à la quantité produite pour une petite quantité, pour une grande quantité des économies d'échelle permettent de freiner l'évolution des coûts, ce qui est représenté ici par le terme $-\sqrt{Q}$.

1. Quel est le taux d'accroissement du coût C lorsque la quantité produite Q évolue de 121 à 196 kg ?
2. Quelle est la limite de ce taux d'accroissement lorsque, en partant de la quantité 121, la variation de Q tend vers 0 ?

Exercice60 On considère la fonction d'une variable réelle f définie ainsi :
(pour tout x de $]0 , + \infty[$) $f(x) = 1 + x \ln(2x)$
1°) Donner l'expression de la différentielle de f.
2°) Donner en particulier l'expression de cette différentielle en $x = 1$.
3°) Indiquer la signification des différents termes apparaissant dans la réponse précédente, 2°).

Exercice *61* Donner les expressions des **différentielles** des fonctions d'une variable réelle suivantes :
1°) f définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = \dfrac{2x+3}{1+x^2}$ 2°) f définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = \sqrt{1+e^{3x}}$
2°) f définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = x \exp(2x+1)$

Exercice 62 Calculer les différentielles des expressions suivantes
1°) $y(x)=x\ln(2x+1)+e^{3x}$ 2°) $y(x)=\exp(-3x^2)$

Exercice *63* On définit les 3 fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$:
$f : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = 1+3x+\dfrac{1}{1+\exp(2x)}$
$u : x \in \mathbb{R} \mapsto u(x) = f(4x+1)$ $v : x \in \mathbb{R} \mapsto u(x) = f(5x-2)$

Trouver l'expression de $f'(x)$ en fonction de $x \in \mathbb{R}$. Trouver l'expression de $u'(x)$, $v'(x)$ en fonction de x **à l'aide de celle de *f* et de la formule de dérivation de fonctions composées**.

Exercice *64* On définit les 3 fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$
$h : x \in \mathbb{R} \mapsto h(x) = x+\dfrac{3x+1}{x^2+1}$
$u : x \in \mathbb{R} \mapsto u(x) = h(2x+3)$ $v : x \in \mathbb{R} \mapsto u(x) = h(4x-1)$

Trouver l'expression de $h'(x)$ en fonction de $x \in \mathbb{R}$. Trouver l'expression de $u'(x)$, $v'(x)$ en fonction de x **à l'aide de celle de *h* et de la formule de dérivation de fonctions composées.**

Exercice *65* f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, dont on ne connaît pas l'expression mais on dont on connaît celle de sa dérivée :
$f' : x \in \mathbb{R} \mapsto f'(x) = \exp(-x^2)$.
Déterminer l'expression de la dérivée de la fonction k définie par : $x \in \mathbb{R} \mapsto k(x) = f(3x+2)$.

Exercice 66 f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, dont la dérivée s'exprime ainsi :
(pour tout x de $\mathbb{R}$) $f'(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.
Déterminer l'expression de la dérivée de $f(3x+2)$.

Exercice 67 Calculer les dérivées logarithmiques des fonctions f définies par les expressions suivantes, préciser les ensembles sur lesquels elles sont définies. 1°) $f(x)=\sqrt{x}\exp(2x-3)$ 2°) $f(x)=\dfrac{(2x+3)}{(4x+1)(3x-2)}$
Exercice 68 On considère la fonction f définie ainsi : pour tout x de $]0, + \infty[$, $f(x)=2x+\ln(x)$.
1°) Etablir le tableau de variations de la fonction f.
2°) Montrer que f est une bijection de $]0, + \infty[$ dans $\mathbb{R}$–rappel : cela signifie que pour tout y de $\mathbb{R}$, il existe un unique nombre x de $]0, + \infty[$ solution de $f(x) = y$ – .
f admet donc une fonction réciproque f^{-1}.
3°) Déterminer $f(1)$, $f^{-1}(2)$, $f^{-1}(6 + \ln(3))$.
4°) Montrer que f^{-1} est dérivable en 2 et en $6 + \ln(3)$, et calculer $f^{-1}{}'(2)$, $f^{-1}{}'(6+\ln(3))$

Exercice 69 On considère la fonction f définie ainsi : pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x)=x+\exp(2x)$.
1°) Etablir le tableau de variations de la fonction f.
2°) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$–rappel : cela signifie que pour tout y de $\mathbb{R}$, il existe un unique nombre x de $\mathbb{R}$ solution de $f(x) = y$ – .
f admet donc une fonction réciproque f^{-1}.
3°) Déterminer $f(0)$, $f(1)$, $f^{-1}(1)$, $f^{-1}(2 + \exp(4))$.
4°) Montrer que f^{-1} est dérivable en 1 et en 2 + exp(4) , et calculer $f^{-1}{}'(1)$, $f^{-1}{}'(2+\exp(4))$

Exercice 70
Montrer que f est une bijection de I dans J dans les cas suivants. Exprimer la réciproque f^{-1} **lorsque c'est possible**. Déterminer $(f^{-1})'(y_0)$ pour les valeurs de y_0 indiquées.
1°) $f(x)=\sqrt{x^3-1}+1$ avec $I=J=]1;+\infty[$, y_0 décrivant tout J
2°) $f(x)=\sqrt{1+\ln x}$, I, J à préciser, y_0 décrivant tout J.
3°) $f(x)=2x+\sin(x)+1$,I=J = $\mathbb{R}$, $y_0 = 1$, puis $y_0 = 2\pi+1$ –on pourra commencer par calculer $f(2\pi)$ –.

Exercice 71 Chercher les maxima des fonctions suivantes:
f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=-1 \; pour \; x<-1 \,;\, f(x)=0 \; pour \; x>2, f(x)=x\exp(-x) \; pour -1\leqslant x\leqslant 2$
g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=0 \; pour \; x<0, g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}+1} \; pour \; 0\leqslant x\leqslant 1, g(x)=\dfrac{1}{2} \; pour \; x>1$.

Différentielle de fonctions de 2 variables réelles.

Exercice 72 Calculer les dérivées partielles des fonctions de 2 variables réelles suivantes :
1° f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par : $f(x,y) = x^4y + 3y^2 + 1$
2° f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par : $f(x,y)$ = x exp(-2xy+1)
3° f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par : $f(x,y) = \dfrac{2x+y}{3x^2+1}$

Exercice 73 On cherche les fonctions f définies et différentiables sur $\mathbb{R}^2$ telles que
$df = (y^2+6x)dx + (2xy-1)\, dy$
a) On fixe une valeur y0 pour y. Quelles sont les fonctions numériques d'une variable, g , définies sur $\mathbb{R}$, telles que $g'(x) = y_0^2+6x$?
b) en déduire quelles sont les fonctions f de 2 variables définies sur $\mathbb{R}^2$ telles que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y^2+6x \quad .$$

c) En déduire quelle est la forme générale de la dérivée partielle par rapport à la variable y d'une telle fonction.
d) En déduire quelles sont les fonctions de 2 variables f(x,y) définies et différentiables sur $\mathbb{R}^2$ telles que
$df = (y^2+6x)dx + (2xy-1)\, dy$ sur tout $\mathbb{R}^2$.

Exercice 74 (on pourra s'inspirer de l'exercice précédent) Déterminer toutes les fonctions numériques f de 2 variables réelles, différentiables sur $\mathbb{R}^2$, telles que $df = (-y^2\exp(-xy)+2)\, dx + (\exp(-xy) - xy\exp(-xy))\, dy$

Exercice 75 f est une fonction définie et différentiable sur $\mathbb{R}^2$ dont la différentielle est
$(6xy + 1)\, dx + a\, x^2\, dy$ $\quad a$ est un nombre réel
Montrer que ce n'est possible que pour une seule valeur de a , à déterminer.

Exercice 76 Montrer qu'on ne peut pas trouver de fonction f définie et différentiable sur $\mathbb{R}^2$ telle que
$df = (y^2 - xy)\, dx + (2xy - 1)\, dy$ pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$.
Exercice 77 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mapsto \exp(-xy)-x+3y$
a) Déterminer la différentielle de f
b) Montrer qu'au voisinage (préciser ce que cela signifie) de (1,0), l'égalité f(x,y) = 0 permet de définir y

comme fonction implicite de x, y = y(x).
c) Déterminer y ' (1).
Exercice 78 On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par :
$(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mapsto g(x,y)=x\exp(-xy)+x+3y-2$
a) Déterminer la différentielle de g
b) Montrer qu'au voisinage (préciser ce que cela signifie) de (1,0), l'égalité g(x,y) = 0 permet de définir y comme fonction implicite de x, y = y(x).
c) Déterminer y ' (1).

Espaces vectoriels.

***Exercice* 79** On considère l'espace muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On rappelle que l'ensemble V_3 des vecteurs de l'espace est un espace vectoriel. Tous les vecteurs seront représentés avec O pour origine.

Représenter les vecteurs $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}$ et $\vec{w}=2\vec{j}+\vec{k}$

Montrer que les ensembles D = { $\alpha\vec{u},\alpha\in\mathbb{R}$ }, P1 = { $\alpha\vec{k}+\beta\vec{j},\alpha\in\mathbb{R},\beta\in\mathbb{R}$ } ,
P2 = { $\alpha\vec{u}+\beta\vec{w},\alpha\in\mathbb{R},\beta\in\mathbb{R}$ }, sont des sous-espaces vectoriels de V_3.

Construire leurs représentations.

Quelle est l'intersection de P1 et P2 ?

Comment montrer sur la figure que l'union de P1 et P2 n'est pas un espace vectoriel?

Familles libres, liées, bases, d'espaces vectoriels.

Exercice 80 a) Les vecteurs suivants engendrent-ils $\mathbb{R}^2$? 1°) (1; -2) et (2;0) 2°) (2;4) et (-3;-6)

b) Les vecteurs suivants engendrent-ils IR^3 ? Eventuellement, indiquer la réponse en fonction du paramètre a.

1) (1,2,3) ; (4;0;-1) et (3,-2,a)

2) (1 ; 0; -2) ; (2; 3; 1) ; (3; 3; -1)

3) (1; 0 ; 2) ; (1; 1; 3) ; (2; 1; 5) ; (0; 1; 2) ?

4) (1,1,2) ; (2,3a,1)?

Exercice 81 a) Montrer que l'ensemble E = {(x,y) $\mathbb{R}^2$; y = 2x} est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

b) Donner un système générateur de E.

c) Même question pour l'ensemble E' ={(x,y) $\mathbb{R}^2$; y = 2ax}, où a désigne un nombre fixé. Donner un système générateur en fonction de a.

d)Même question pour l'ensemble F = {(x,y,z) $\mathbb{R}^3$; y = 2ax}, sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

e) Même question pour G = {(x,y,z) $\mathbb{R}^3$; 3x + y -2 z=0}, sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

Exercice 82 On considère E, le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de la question précédente :
E = {(x,y) $\mathbb{R}^2$; y = 2x}

a) rappeler ce qu'est un sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs.

b) montrer que tout vecteur de E est combinaison linéaire des vecteurs (1,0) et (0,1)

c) montrer que pourtant **E n'est pas le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par (1,0) et (0,1)**

Exercice 83 Soit l'ensemble E = {(x,y,z) $\mathbb{R}^3$; 2x + y - 2z = 0 }.

a) Montrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ engendré par les vecteurs (1, 0 , 1) et (0, 2,1).

b) Soit F l'intersection de E et du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ engendré par i = (1,0,0) et j = (0,1,0). Montrer que F est engendré par un vecteur, que l'on précisera.

Même question pour G , intersection de E et du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ engendré par j = (0,1,0) et k=(0,0,1).

c) Représenter graphiquement F,G,E dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

Exercice 84 Montrer que dans ces différents cas X_1, X_2, X_3 sont liés et trouver une relation entre eux.

1) X_1 = (1, 2, 0) ; X_2 = (2, 4, 2) et X_3 = (3,6,4)

2) X_1 = (3;9;6); X_2 = (-2,1,0) et X_3 = (2;6;4)

3) X_1 = (4,1,3) ; X_2 = (1,0,2) et X_3 = (2,1,-1)

Exercice 85 Déterminer si les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^4$sont libres ou liées et donner leur rang. Eventuellement, discuter en fonction du nombre a.

1) {(1,2); (-1,2)}

2) {(2,3);(3,2);(1,0);(4,6)}

3) {(-2,1,1);(1,0,a); (2,-2,0)}

4) {(1, 2, 2) ; (a, 2+a, 2a); (2+a, 5+a, 6a)}

5) {(0,1,2,3);(-1,0,1,1);(1,0,0,1);(-2,0,2,2)}

Exercice 86 Soit {e_1,e_2, ..., e_n} un système libre de n vecteurs d'un espace vectoriel V. On définit n nouveaux vecteurs fi par $f_1 = e_1$;

$f_2 = e_1 + e_2$;

$f_k = e_1 + e_2 + ... + e_k$ pour k = 1,2, ...n . Montrer que {f_1 ; f_2 ; ... f_n} est un système libre.

Exercice 87 Déterminer les rangs des systèmes suivants:

1) {(0,1);(1,-2);(2,3)}
2){(4,-3,2);(1,2,0);(2;-5;3)}
3){(0,1,0,2);(1,1,-1,0) ;(2,0,1,1)}
4) {(1;0;-1);(4;1;2);(2;1/2;1)}

5) (1 , 2 , a) (2a , 4, 2), (1+2a, 6, 2 +a)

Exercice 88 L'ensemble S = {(2,1,1);(0,2,3);(2,4,6);(4,2,2)} forme-t-il une base de $\mathbb{R}^3$? En extraire une base de $\mathbb{R}^3$. Combien de bases de $\mathbb{R}^3$peut-on extraire de S?

Exercice 89 On considère des ensembles E = {(x,y) $\mathbb{R}^2$ / y = ax} et F = {(2m,m), m $\in \mathbb{R}$ }, a désigne un nombre réel fixe.

Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$,

En fonction de a, déterminer E $\cap$ F, intersection de E et F , donner un système générateur de E et un de F.

Mêmes questions pour les ensembles G = {(x,y,z) $\mathbb{R}^3$ / x = 3z } et H = {(m,2m,3m), m $\in \mathbb{R}^3$ }

Exercice 90 On considère les ensembles suivants:

E = {(x,y,z) $\mathbb{R}^3$ / x=y=-z }; F={(x,y,z) $\mathbb{R}^3$ /x +y +2z = 0} et G ={(x-y,x+y,2x-3y)/x $\in \mathbb{R}$ et y $\in \mathbb{R}$}

Remarquez bien la différence entre les sens pris par x et y dans les définitions de F et de G.

1) Montrer que E,F,G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$

2) Déterminer les sous-espaces vectoriels $E \cap F$, $E \cap G$ et $F \cap G$

__Exercice 91__ Donner une base et la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini ainsi :
$\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 ; 2x + y+z+t = 0\}$

Quelle information cela nous donne-t-il sur le rang du système suivant {(0,1,2,-3); (2,0,-2,-2); (2,-3,0,-1};(1,1,-1, -2)} ?

__Exercice 92__ Donner une base et la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par:

{(x,y,z,t)R4 ;x + 2y - z = 0 et x - z+2t = 0}

__Exercice 93__ Dans l'île de Miri miri, 3 titres sont cotés en Bourse : Otea , Va'a , et Surf .

On représente les opérations journalières par des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Les composantes sont les nombres de titres achetés (négatifs pour une vente): un achat de 3 Otea, de 4,5 Va'a et une vente de 2 Surf correspondent au vecteur (3 ; 4,5; -2).

Les titres sont infiniment divisibles, de sorte que l'ensemble des opérations, muni de la somme des opérations et de la multiplication par un réel, correspond à tout l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

Pour proposer différents niveaux de performance et de sécurité, des SICAM (Stés d'investissement à capital Miri mirien) se sont mises en place, parmi elles :

1 : Fox:	1 titre est formé de 4 Otea, 1 Va'a, 2 Surf
2 : Aparima:	1 titre est formé de 1 Otea, 0 Va'a, 1 Surf
3: Himene :	1 titre est formé de 1 Otea, 1 Va'a, 0 Surf
4 : Tamure:	1 titre est formé de 2 Otea, 1 Va'a, 0 Surf

Montrer simplement que toute opération – (x Otea, y Va'a, z Surf) – peut être réalisée en ne vendant ou achetant que des titres des 3 premières SICAM;

mais qu'en revanche cela n'est pas toujours possible si l'on n'en utilise que 2 ou si l'on n'utilise que les SICAM Fox, Aparima, et Tamure.

__Exercice 94__ Soient 3 vecteurs linéairement indépendants e_1, e_2 , e_3 d'un espace vectoriel V.

1) Que peut-on dire de dimV ?

2) Déterminer le rang du système suivant: $\{2e_1+e_2+e_3 ; e_1+2e_2-e_3;3e_1 +3e_2\}$

__Exercice 95__ Déterminer une base simple de l'espace vectoriel P_3 des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

Montrer (sans longs calculs) que $\{Q_0;Q_1;Q_2;Q_3\}$ avec $Q_0 (x) = 1$; $Q_1(x) = x$; $Q_2(x) = x(x-1) / 2$ $Q_3(x) = x(x-1)(x-2)/6$ est un système générateur de P_3. Est-ce une base de P_3?

__Exercice 96__ Donner une base et la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par:

$\{(2\lambda + \mu , \lambda +\mu , \lambda) ; \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \in \mathbb{R} \}$

31 - 1) Montrer que l'ensemble $E = \{(x,y,z)\ \mathbb{R}^3 / x - 2y + z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2) Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs u (1,1,1) et v (3,1,-1).

Vérifier que $F \subset E$ (F inclus dans E) . A-t-on $E \subset F$?A-t-on E = F ?

Exercice 97 1) Montrer que l'ensemble $E = \{(x,y,z)\ \mathbb{R}^3 / 3x - y + z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2) Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs u(1,2,0) et v(1,1,1). Déterminer l'ensemble $F \cap E$.

Exercice 98 Dans les différents cas suivants, déterminer si le système (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Lorsque c'est une base, exprimer les coordonnées de (1,2,1) puis celles de (x,y,z) dans cette base.

1) $e_1 = (-1,0,1)$; $e_2 = (1,-1,0)$; $e_3 = (1,1,1)$ 2) $e_1 = (1,2,0)$; $e_2 = (0,1,1)$; $e_3 = (1,0,2)$

3) $e_1 = (1,0,2)$; $e_2 = (1,1,2)$; $e_3 = (0,1,1)$

Exercice 99 Démontrer que dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, les vecteurs u = (1,2,3) et v = (1,-1,0) d'une part, et les vecteurs u'=(3,0,3) et v' = (1, -7, -6) d'autre part, engendrent le même sous-espace vectoriel.

Exercice 100 Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ dont on déterminera la dimension et une base:

$A = \{(3\lambda, -\lambda, 2\lambda) , \lambda \in \mathbb{R} \}$, $B = \{(x,y,z,t) \in R4 ; x - z = y - t\}$

Exercice 101 Soit D , l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables dans $\mathbb{R}$, muni des lois usuelles (addition et multiplication par un réel). Soit E , l'ensemble des fonctions f telles que :

$$\begin{cases} f(x) = a x^2 + b x + c \text{ pour } x \in \mathbb{R}^- \\ f(x) = \alpha x + \beta \text{ pour } x \in \mathbb{R}^{+*} \end{cases}$$

1) Quelles conditions doivent vérifier α , β ,a,b,c pour que E soit un sous-espace vectoriel de D?

2) Quelle est la dimension de cet espace?

Exercice 102 Dans un espace vectoriel E, on considère deux sous-espaces vectoriels E1 et E2 et on définit l'ensemble E1 +E2 = {u1 +u2 /u1 E1 et u2 E2} ; on dit que E1 + E2 est la somme des deux sous-espaces vectoriels E1 et E2 .

1°) Montrer que E1 + E2 est un sous-espace vectoriel de E

2°) a) Montrer que E1 $\cup$ E2 est inclus dans E1+E2

b) Montrer que E1 + E2 est inclus dans le sous-espace vectoriel engendré par E1 $\cup$ E2.

3°) Montrer que E1 + E2 est le sous-espace vectoriel engendré par E1 $\cup$ E2 (ensemble des vecteurs appartenant à E_1ou à E_2) .

Exercice 103 Extrait d'interrogation

Soient les deux systèmes de vecteurs : $S_1 = \{(a,1,1) ;(-1, -a, -1) ; (1,1,a) \}$

et $S_2 = \{(a,1,1); (-1,-a,-1); (-1,-1,a)\}$

Déterminer suivant les valeurs de a le rang de S_1 et celui de S_2.

Exercice 104 Extrait d''examen

Soient $V_1 = (4,0,-2)$, $V_2 = (-8,1,5)$ et $V_3 = (2,0,0)$. Ces vecteurs sont-ils indépendants ?

On considère le sous-espace vectoriel V engendré par V_1 et V_2. Quelle est sa dimension? Donner une base de V. V_3 appartient-il à V ? $V_4(-4,2,4)$ appartient-il à V? A quelle condition sur a,b, et c un vecteur W = (a,b,c) appartient-il à V ?

<u>Exercice 105</u> Extrait d'examen Soient $V_1 = (1,1,1)$, $V_2 = (0,1,-1)$ et $V_3 = (1,0,-1)$.

Quel est le rang de $S = \{V_1, V_2, V_3\}$? S est-il une base de $\mathbb{R}^3$ (justifier) ?

<u>Exercice 106</u> Extrait d''interrogation

1) Soient $V_1 = (-1,1,0)$, $V_2 = (1,0,2)$ et F, le sous-espace vectoriel engendré par V_1 et V_2 .

a) A quelle condition sur x,y et z, V = (x,y,z) appartient-il à F ?

b) Soient $V_3 = (1,1,-1)$, $V_4 = (1,1,2)$ et $V_5 = (0,1,2)$. Déterminer les rangs des systèmes suivants:

$\{V_1, V_2, V_3\}$, $\{V_1,V_2, V_4\}$, $\{V_1, V_2, V_5\}$ et $\{V_1, V_2,V_3, V_4\}$.

2) e_1 , e_2 , e_3 désignent 3 vecteurs d'un espace vectoriel. La proposition suivante est-elle vraie ?

(S = {e1,e2, e3} lié) => (e3 appartient à <e1, e2>).

Si la réponse est affirmative, la prouver. Sinon, donner un contre-exemple.

<u>Exercice 107</u> Extrait d'examen

1) Soit E = {(x,y,z) R3 ; 3x - 5y + z = 0}. Montrer que E est un espace vectoriel et en donner une base et sa dimension.

2) Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par (2;1; -1) et (-3;1;1).

V = (-6, 7, 1) appartient-il à F ?

3) Déterminer $E \cap F$.

<u>Exercice 108</u> Extrait d'interrogation

1° - On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni des opérations + et $\cdot$ usuelles. Son vecteur nul (0,0,0) est noté $0_{\mathbb{R}^3}$. E en est un sous espace vectoriel . u = (a,b,c) désigne un vecteur de E et v=(d,e,f) désigne un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Alors

$0 \cdot u$ appartient à E	☐ Toujours	☐ Jamais	☐ Parfois
(0,0,0).u appartient à E	☐ Toujours	☐ Jamais	☐ Parfois
si u+v appartient à E alors v appartient à E	☐ Toujours	☐ Jamais	☐ Parfois
$0_{\mathbb{R}^3}$ appartient à E	☐ Toujours	☐ Jamais	☐ Parfois
u+(-1,0,2) appartient à E	☐ Toujours	☐ Jamais	☐ Parfois
< u, 2u > = < u >	☐ Toujours	☐ Jamais	☐ Parfois
(1,1,1).u=u	☐ Toujours	☐ Jamais	☐ Parfois

2° -B = $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$; $y - z + 2t = 0\}$, u = (1,1,0,1), v= (0,1,1,0), w = (0,-2,0,1), r = (2,0,0,0)

B= {(a, b-2c, b, c) ; a,b,c nombres réels}	☐Oui	☐ Non
B = <u, v, w>	☐Oui	☐ Non
B = <w, r>	☐Oui	☐ Non
B= <(0,2,2,0), v , w, r >	☐Oui	☐ Non
B = <v, w, r >	☐Oui	☐ Non