universite PARIS-SACLAY
FACULTÉ JEAN MONNET
DROIT-ÉCONOMIE-GESTION

Licence Economie Gestion 1ère année.
2024 2025
TD de mathématiques 1. Cours de P. Beau.
Série d'exercices n°1.

Préliminaires. Expression mathématique

Conditions nécessaires, suffisantes. Expression mathématique.

Exercice 1 *Reconnaître une condition nécessaire ou suffisante*
(a) est-elle une condition nécessaire à (b) ? (b) est-elle une condition nécessaire à (a) ? (a) et (b) sont-elles équivalentes? L'exprimer par une des 3 propositions : si (a) alors (b) ; si (b) alors (a) ; (a) si et seulement si (b).

1°) (a) Le polygone P est un rectangle (b) Le polygone P a 4 côtés

2°) (a) Le triangle T a au moins 2 angles de 60° (b) le triangle T est équilatéral
rappels : un triangle est équilatéral si et seulement si ses 3 angles sont de 60° ($\pi/3$ radians). D'autre part la somme des mesures des 3 angles d'un triangle est 180° (π radians).

3°) (a) L'étudiant Machin est présent à l'épreuve de rattrapage de micro-économie
(b) L'étudiant Machin a échoué à l'épreuve de micro-économie de la première session

4°) (b) Ursule était inscrite pour l'année 2015-2016 à la faculté Jean Monnet
(a) Ursule a validé sa 1ère année de licence en Juin 2016 à la faculté Jean Monnet

Exercice 2_ *Utiliser une condition nécessaire ou suffisante*
Indiquer quelles sont les affirmations correctes, les exprimer en indiquant des conditions nécessaires, équivalentes, ou suffisantes.

1°) Arthur a dit hier : "Demain, si Arnold me prête son scooter, alors je vais au cinéma"
Aujourd'hui Arthur est au cinéma. Donc Arnold lui a prêté son scooter.

2°) Arsinoe a dit hier: "Demain, si on me prête un scooter, alors je vais au cinéma"
Aujourd'hui Arsinoe révise ses cours toute la journée. Donc on ne lui a pas prêté de scooter.

3°) Aristide a dit hier: "si je vais au cinéma demain, c'est qu'il pleut" – qu'on peut interpréter ainsi : « si je vais au cinéma, alors il pleut » – .

a) Aujourd'hui il pleut Donc Aristide est au cinéma
b) Aujourd'hui Aristide n'est pas au cinéma Donc il ne pleut pas
c) Aujourd'hui il ne pleut pas Donc Aristide n'est pas au cinéma

4°) Tous les oiseaux ont des plumes
Or Kiki a des plumes Donc Kiki est un oiseau

5°) Tous les oiseaux se reproduisent en pondant des œufs.

Or Toto a pondu un œuf Donc Toto est un oiseau .

6°) Tous les mammifères allaitent leurs petits

a) Or Zuzu allaite ses petits Donc Zuzu est un mammifère

b) Or les petits de Dodo n'ont pas été allaités Donc Dodo n'est pas un mammifère

7°) Seuls les mammifères allaitent leurs petits

Or Zaza allaite ses petits Donc Zaza est un mammifère.

8°) Seuls des étudiants présents à l'écrit sont convoqués à l'oral.

a) Arsène n'est pas convoqué à l'oral Donc Arsène n'était pas présent à l'écrit

b) Arsène était présent à l'écrit Donc Arsène est convoqué à l'oral

c) Arsène est à l'oral Donc Arsène était présent à l'écrit.

9°) Tous les étudiants présents à l'écrit sont convoqués à l'oral

Arsène est à l'oral Donc Arsène était présent à l'écrit

10°) Tous les étudiants présents à l'écrit sont convoqués à l'oral

Vetea n'est pas convoqué à l'oral Donc Vetea n'était pas à l'écrit

11°) Seuls les étudiants présents à l'écrit sont convoqués à l'oral

Micky n'est pas à l'oral Donc Micky n'était pas à l'écrit.

12°) Tous les extrema locaux de la fonction f annulent la dérivée.

Or $f'(2) = 0$ Donc f atteint bien un extremum local en 2

Exercice 3_ Voici des réponses à la question suivante : « **Montrer que les fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $2x\, f(x) = f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme**
$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto f(x) = m \exp(x^2)$, avec m nombre réel. »
Sont-elles correctes toutes les deux ? L'une d'elles seulement est-elle correcte? Aucune des deux n'est-elle correcte et dans ce cas quelle pourrait être une réponse correcte ?

1ère réponse :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto f(x) = m \exp(x^2)$, avec m appartient à $\mathbb{R}$
f est alors dérivable sur $\mathbb{R}$, avec pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 2\,x\,m \exp(x^2) = 2x\,f(x)$.

2nde réponse :

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, avec pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 2x\,f(x)$.
Posons pour tout x de $\mathbb{R}$, $\boldsymbol{g(x) = f(x) \exp(-x^2)}$.
g est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec pour tout x de $\mathbb{R}$: $g'(x) = f'(x) \exp(-x^2) - 2\,x\,f(x) \exp(-x^2)$
or $f'(x) = 2\,x\,f(x)$ par hypothèse,
donc $\boldsymbol{g'(x)} = 2x\,f(x) \exp(-x^2) - 2x\,f(x) \exp(-x^2) = \boldsymbol{0}$ pour tout x de $\mathbb{R}$
Donc g est une fonction constante sur $\mathbb{R}$.
Donc il existe un nombre $m \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = m$
Donc $f(x) \exp(-x^2) = m$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
Donc $f(x) = m \exp(x^2)$, avec m nombre réel constant.

Exercice 4_ f,g désignent 2 variables numériques qui sont liées par : $f + g = 4$. Peut-on affirmer que $f=1$ et $g = 3$?

Exercice 5 On considère 2 variables économiques k et w liées par l'égalité : $k^2 + k + 4\,w^2 - 4\,kw - 2 = 0$
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ? Justifier précisément.

a) $k=2$ et $w=1$ b) $k=2$ si et seulement si $w = 1$
c) si $k=2$, alors $w=1$ d) si $w=1$, alors $k=2$ e) $w \neq 2$

Exercice 6 *Exemple : conditions nécessaires, suffisantes, d'extrema.*
f désigne une fonction 2 fois dérivable sur son intervalle de définition. **On sait par ailleurs qu'elle admet un minimum**, mais on ne sait pas pour quelle valeur.
Comme à l'exercice 1, indiquer si une des 2 conditions (a) , (b) est nécessaire, ou suffisante pour que l'autre soit remplie, ou si elles sont équivalentes.

1°) f est définie sur $\mathbb{R}$
(a) la fonction f atteint son minimum en 3 (b) f ' (3) = 0

2°) f est définie sur $\mathbb{R}$.
(a) la fonction f atteint son minimum en 3
(b) x=3 est la seule solution à l'équation f ' (x) = 0

3°) f est définie sur [1; 12]
(a) la fonction f atteint son minimum en 3 (b) f ' (3) = 0
4°) f est définie sur [1; 12]
(a) la fonction f atteint son minimum en 3
(b) x = 3 est la seule solution à l'équation f ' (x) = 0
Rappel : si une fonction est définie et dérivable **sur tout $\mathbb{R}$ ou** sur un **intervalle ouvert** , les extrema **locaux** sont les valeurs pour lesquelles la dérivée s'annule **en changeant de signe**. Si l'intervalle est fermé, il peut y avoir de plus des extrema aux bornes. Pour trouver un extremum , on peut dresser un tableau de variations, ou encore comparer tous les extrema locaux.

Exercice 7 *Langage mathématique.*
f désigne une fonction définie sur tout IR.
Indiquer les expressions qui ont un sens, les traduire en langage courant.
$E = \{ \forall \ x \in \mathbb{R}; \exists \ y \in \mathbb{R} ; x = y^2 - y \}$; $F = \{ f(t); t \in [-1; 2] \}$
$G = \{ \exists \ x \in \mathbb{R} \ / f(x) > 0\}$; $H = \{ x \in \mathbb{R} / \exists \ f(x) > 0 \}$ $I = \{ x \in \mathbb{R} / \ f(x) > 0 \}$
$J = F + I$ $K = F \cap I$ $3 \in F$ $F \in I$ $F \subset I$

Fonctions usuelles

Exercice 8 On considère un plan muni d'un repère orthonormé. Donner l'équation de la droite passant par les points de coordonnées (2, 4) et (-1 , 5).

Exercice 9 Trouver le point à l'intersection des deux droites D_1 **et** D_2 d'équations :
$(x, y) \in D_1 \Leftrightarrow y = 2x + 3$ et $(x, y) \in D_2 \Leftrightarrow y = 4x + 5$

Exercice 10 Trouver l'équation de la droite passant par le point de coordonnées (1, -1) et parallèle à la droite *D* d'équation $(x, y) \in D \Leftrightarrow y = 5x - 2$

Exercice 11 On considère les 3 points du plan : A(2, 1) B(1, 3) C(3,4) .
a) Trouver l'équation de la droite (AB)

b) Trouver l'équation de la droite parallèle à (AB) , passant par C
c) Trouver l'équation de la droite perpendiculaire à (AB), passant par C

d) Déterminer le point de (AB) d'ordonnée 5

e) On considère H, l'orthocentre du triangle ABC (rappel : H est à l'intersection des hauteurs du triangle). Déterminer les coordonnées de H.

Exercice 12 Trouver l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction *g* définie sur tout $\mathbb{R}$ ainsi : (pour tout x de $\mathbb{R}$) $g(x) = 2x^3 + 5$ au point d'abscisse 1.

Exercice 13 x, y sont deux nombres liés par : $(1 + x)^y = 14$

a) Dans le cas où $x = 2$, déterminer y.

b) Dans le cas où $y = 5$, déterminer x.

Exercice 14 Ecrire sous la forme d'une puissance de 2 le nombre suivant : $\dfrac{\left(2^5 \times 2^{1/3}\right)^2}{2^4}$

Exercice 15 Ecrire sous la forme d'une puissance de 2 le nombre $2^3 \times 2^4 \times 2^{-5} \times \sqrt[3]{2}$

Exercice 16 Ecrire sour la forme d'une puissance de 2 $2^3 \times 2^{1/3}$, $2^3 \times 2^{-3}$, $\left(2^3\right)^{1/3}$

Exercice 17 Ecrire sous la forme d'une puissance de 2 le nombre suivant : $\dfrac{2^4 \times \left(\sqrt[3]{2}\right)^5 \times 2}{4^3 \times 2^5} \times 2^{-2} \times 2^{1/2}$

Exercice 18 Déterminer le(s) nombre(s) réel(s) x solutions de $\exp(x)\exp(9) = 8\exp(5)$. Donner une valeur arrondie à 0,01 près de x

Exercice 19 Déterminer le(s) nombre(s) réel(s) x solutions de $\dfrac{\exp(x)\exp(7)}{\exp(5x)} = 8\exp(3)$

Exercice 20

1. Déterminer le nombre p solution de $\dfrac{20 \times 5^p}{15^3} = 30$
2. Déterminer le nombre k solution de $\dfrac{20^k \times 5^{2k}}{3 \times 15^{(1+k)}} = 30$

Exercice 21 Déterminer le(s) nombre(s) x solution(s) de $\ln(2x) - \ln(3x) + \ln(4x) = 2$

Exercice 22 Déterminer le(s) nombre(s) x solution(s) de $\ln(3x) + \ln\left((4x)^2\right) + \ln\left(\dfrac{2}{x}\right) = \ln 5$

Exercice 23 un capital K investi à taux d'intérêts composés annuels i% acquiert au bout de n années une valeur $K(1+i)^n$.

1. pour i = 4%, au bout de combien de temps le capital a-t-il au moins doublé ?
2. 1000 € rapportent au bout de 7 ans 1 400 €. Quel est le taux d'intérêt pratiqué ?
3. Quel est la valeur aujourd'hui d'un capital qui, placé au taux d'intérêt de 5%, vaudra 2000 € dans 10 ans ?

Exercice 24 Voici quelques valeurs d'une grandeur économique, qui a été relevée 100 jours parmi les jours n°1 à 120 de l'année.

											Somme
t,n°jour	1	2	3	…	51,00	…	54,00	56,00	…	120,00	5 050,00
y	50	49	51,4	…	68,00	…	66,80	65,80	…	108,00	7 030,00
y*t	50	98	154,2	…	3 468,00	…	3 607,20	3 684,80		12 960,00	405 010,00
t²	1	4	9	…	2 601,00		2 916,00	3 136,00		14 400,00	338 350,00

Le numéro du jour est noté t, la grandeur économique est notée y, il y a 100 données.

1. Déterminer la tendance linéaire – sur l'ensemble des données – .
2. Comment évaluer une tendance **locale** au jour 54 ?

Exercice 25 s est une fonction définie et bornée sur tout $\mathbb{R}$, c'est-à-dire qu'il existe un nombre A strictement positif satisfaisant à : (pour tout x de $\mathbb{R}$) $-A \leq s(x) \leq A$.

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ satisfaisant à : (pour tout x de $\mathbb{R}$) $f(x) = 2 + 3x - x^2 + x^2 s(x)$.

Prouver que f est dérivable en 0, et trouver $f'(0)$. Attention on ne sait pas si s est dérivable.

Exercice 26 En utilisant la définition du nombre dérivé, montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$\begin{cases} f(x)=x\sin(1/x) & pour\ x\neq 0 \\ f(x)=0 & pour\ x=0 \end{cases}$ n'est pas dérivable en 0.

Exercice 27 – Des logarithmes en économie.

Pour 8 entreprises de tailles très différentes on a noté x leur consommation d'eau en Janvier 2016 et x' leur consommation d'eau en Janvier 2017, en m^3. Toutes les valeurs sont arrondies à 0,001 près.

x	36	3000	896	600	402	8000	19600	304
x'	37,800	3150	940,800	618	414,06	8240	19208	297,92
x' - x	**1,800**	**150**	**44,800**	**18**	**12,06**	**240**	**- 392**	**- 6,08**
lnx	3,584	8,006	6,798	6,397	5,996	8,987	9,883	5,717
lnx'	3,632	8,055	6,847	6,426	6,026	9,017	9,863	5,697
lnx' - ln x	**0,049**	**0,049**	**0,049**	**0,030**	**0,030**	**0,030**	**- 0,020**	**- 0,020**
x'/x	**1,050**	**1,050**	**1,050**	**1,030**	**1,030**	**1,030**	**0,980**	**0,980**

A – Quelques manipulations ...

a) Observe-t-on un point commun sur la variation des valeurs x' – x ? et sur la variation des logarithmes lnx' – lnx ? Sur le rapport x'/x ?

b) Indiquer, pour chacune des 8 entreprises, quelle a été la variation en pourcentage de la consommation de Janvier 2016 à Janvier 2017 .

c) Pour comparer l'évolution de consommation des 3 premières, qu'utiliserait-on dans le langage courant ? La variation en m^3 ? La variation du logarithme ? La variation en pourcentage ?

d) De façon générale, pour étudier l'évolution d'une variable économique pour diverses entreprises, doit-on s'intéresser à la variation brute de cette variable ou sa variation en pourcentage ?

B – Le lien avec une célèbre propriété de la fonction ln.

a) que vaut $\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t}$?

Supposons qu'une variable économique atteigne une valeur x en Janvier 2016 , varie d'un pourcentage p en un an, pour atteindre une valeur x' en Janvier 2017. Notons t la quantité p/100.

b) Exprimer x' en fonction de x et p, puis en fonction de x et t.

c) Montrer que ln x' – ln x = ln(1+t)

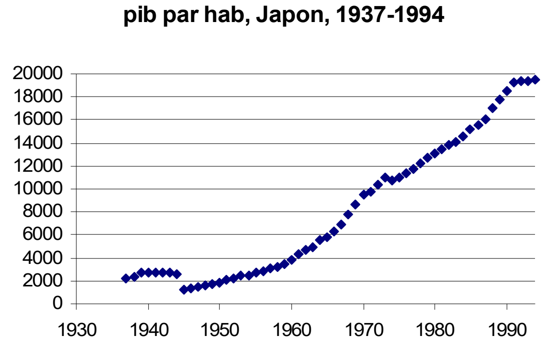
d) Montrer que $\lim_{t\to 0} \frac{\ln x' - \ln x}{t} = 1$

e) Evaluer t pour les 8 entreprises du tableau.

f) Comparer t et ln x' – lnx dans ces 8 cas. Expliquer en quoi cette comparaison est en accord avec les réponses aux questions précédentes.

C D'après A et B, **lorsque le logarithme d'une variable économique x varie d'une (faible) quantité t, quelle interprétation pratique peut-on en donner sur l'évolution d' x ?**

C – Un exemple : la croissance du Japon.



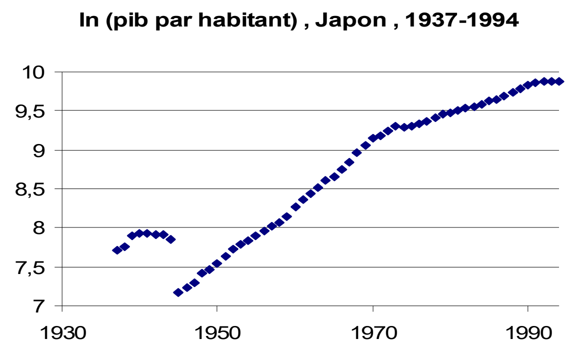
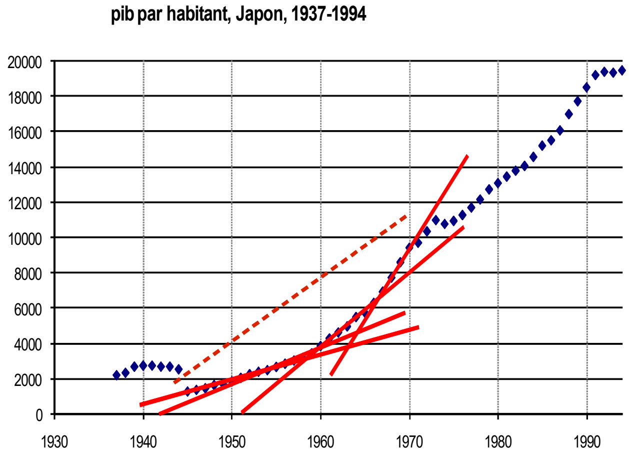


Figure 1 *Figure 2*



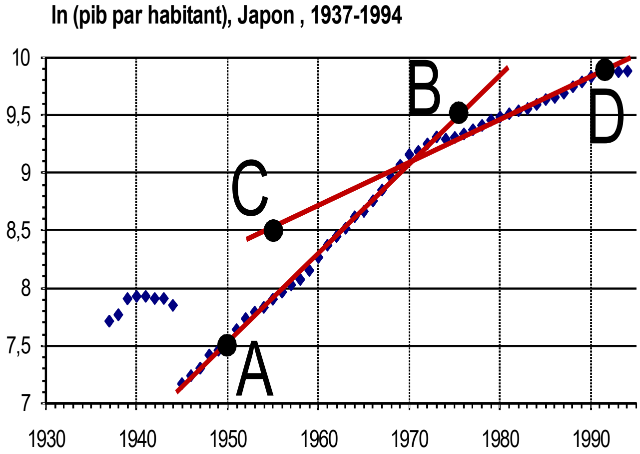


Figure 3 *Figure 4*

Voici l'évolution du Pib par habitant au Japon, évalué en Dollars U.S. constants, de 1937 à 1994. Sur la figure 1 est tracé le Pib par habitant, et sur la figure 2 son logarithme.

Pour étudier, puis interpréter , l'évolution d'une grandeur économique, on cherche d'abord s'il s'en dégage une tendance linéaire, c'est-à-dire s'il apparaît clairement une fonction affine qui résume cette évolution, avec certes autour de cette tendance quelques inévitables variations, qui se compensent en moyenne. D'après les figures 3 et 4, quelle variable se prête le mieux à une approximation par une fonction affine sur une longue période et pourquoi ?

a) On s'intéresse maintenant à la figure 4. Deux droites ont été tracées.

b) Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB).

Lorsqu'en se déplaçant sur cette droite, on accroît les abscisses d'1 unité (une année) , de quelle quantité s'accroissent les ordonnées (le logarithme du pib) ?

c) **D'après A, B et a) , comment pourrait-on résumer l'évolution du Pib du Japon de 1950 à 1970** ?

d) Même question pour la période allant de 1973 à 1990.

e) Comparer avec les descriptions de la croissance du Japon que vous trouvez dans des ouvrages d'Histoire Economique, à la biblitohèque universitaire, ou à la page Japon de Wikipedia http://fr.wikipedia.org/wiki/Japon

Y indique-t-on une différence importante entre les années 50-60 et les années 70-80 ? De quel ordre ?

f) La figure 3 permet-elle d'évaluer cette différence entre ces 2 périodes ?

g) La courbe de la figure 1 fait apparaître un petit décrochement vers 1945 . Qu'en est-il de la courbe de la figure 2 ? Y a-t-il eu au Japon des événements importants cette année ? Quelle figure reflète le mieux la réalité ?

h) Le Pib par habitant est évalué à 2 558 \$ U.S. En 1944, 1 295 \$ U.S. en 1945 , 19 505 \$ U.S. en 1994.

- Peut-on considérer que la variation brute du Pib en 1945 est importante ?
- Peut-on considérer que la variation en pourcentage du Pib en 1945 est importante?
- Quelle figure fait apparaître des variations brutes ? Quelle figure fait apparaître des variations en pourcentage ?

D - Un autre exemple . Un économiste s’intéresse au chiffre d’affaires des restaurants de la côte normande. La première semaine de Mai il pleut. La seconde semaine est plus ensoleillée. Les chiffres d’affaires (C.A.) hebdomadaires des restaurants étudiés vont de 1 200 à 13 000 euros. L'économiste vous confie les valeurs de tous ces C.A. pour ces 2 semaines. Que sera-t-il le plus judicieux d'étudier ? Le C.A. ou le logarithme du C.A. ? Pourquoi ?

Espaces vectoriels

Exercice 28 Calculer les combinaisons linéaires suivantes, dans $\mathbb{R}^4$:

a) 5 (1, 3, -4, -2) + 2 (-10, 2, 1, 4).

b) 3k(-10, 0, 2, 3) + 2 (1+k, 7,0, -1) – 4 (2, 3, 4, 5) k désigne un nombre fixe.

Exercice 29 Trouver (tous) les nombres a, b, tels que le vecteur de $\mathbb{R}^4$
a(-1, 2,-2, 3) + b (1, 2,3,-5) + (4,5,-1, 3) ait ses 2 dernières composantes nulles.

Exercice 30 Trouver (tous) les nombres a, b, c tels que le vecteur de $\mathbb{R}^4$

a(-1, 2,-2, 3) + b (1, 2,3,-5) + c (4,5,-1, 3) ait ses 2 dernières composantes nulles.

Exercice 31 Trouver (tous) les nombres a, b solutions de
a (1 , -3, -2) + b (2, 4, 6) + (-8 , 9, 7) = (0, 0, 0)

Exercice 32 En résolvant un système d'équations linéaires, montrer que (3, 1, 8) est une combinaison linéaire des vecteurs (1, 1,-2) et (3, 2, 1) avec des coefficients à déterminer.

Exercice 33

Résoudre dans $\mathbb{R}$, en utilisant la méthode de combinaison de lignes et de colonnes, le système de 3 inconnues x,y,z à 3 équations linéaires :

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 3 \\ 2x + y + z = 3 \\ 4x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

Exercice 34 Résoudre dans $\mathbb{R}$,en utilisant la méthode de combinaison de lignes et de colonnes, le système de 3 inconnues x,y,z à 3 équations linéaires :

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 3 \\ 2x + y + z = 3 \\ 5x + 3y + 2z = 6 \end{cases}$$

Exercice 35 Résoudre dans $\mathbb{R}$,en utilisant la méthode de combinaison de lignes et de colonnes, le système de 3 inconnues x,y,z à 3 équations linéaires :

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 3 \\ 2x + y + z = 3 \\ 5x + 3y + 2z = 7 \end{cases}$$

Exercice 36 Résoudre dans $\mathbb{R}$,en utilisant la méthode de combinaison de lignes et de colonnes, le système de 3 inconnues x,y,z à 4 équations linéaires :

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 3 \\ x - 2y + 4z = -1 \\ 3x + 3y + 2z = 7 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

Exercice 37 Résoudre dans $\mathbb{R}$,en utilisant la méthode de combinaison de lignes et de colonnes, le système de 3 inconnues x,y,z à 2 équations linéaires :

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 4 \\ 3x + 2y + 2z = 10 \end{cases}$$

On considère un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Exercice 38 Construire les vecteurs $\vec{u}=2\vec{i}-j$, $\vec{v}=\vec{i}+2\vec{j}$, $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{s}=-2\vec{w}$

Exercice 39_Montrer que (-1, 1, -12, 2) est combinaison linéaire de (1, 1, -2, 2) et (3, 2, 1 , 4) avec des coefficients que l'on précisera.

Exercice 40_ Montrer que (1, 3 , -1, 2) n'est pas combinaison linéaire de (1, 1, -2, 2) et (3, 2, 1 , 4).

Exercice 41 Montrer que tout élément de $\mathbb{R}^2$ est combinaison linéaire de (1,2) et (1,3)

Exercice 42 Montrer que les éléments de $\mathbb{R}^2$ ne sont pas tous combinaisons linéaires de (4, 6) et (6, 9)

Exercice 43 On considère l'ensemble A des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ s'écrivant (x , 0) , avec x nombre de $\mathbb{R}$.On peut exprimer ainsi cette définition $A=\{(x,0)\in\mathbb{R}^2 ; x\in\mathbb{R}\}$. On considère B l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ défini ainsi : $B=\{(0,x)\in\mathbb{R}^2 ; x\in\mathbb{R}\}$.

1°) Montrer que A et B sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.

2°) L'intersection de 2 sous-espaces vectoriels – rappel : l'intersection de deux ensembles est l'ensemble des éléments appartenant aux deux ensembles à la fois – d'un espace vectoriel est-elle toujours elle aussi un espace vectoriel ?

3°) Préciser quelle est l'intersection de A et B.

4°) On considère la réunion de A et B, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs appartenant à A ou à B.
Rappels :

- en mathématiques, OU accepte que les 2 conditions à la fois soient satisfaites, il s'agit donc des vecteurs appartenant à A , à B, ou éventuellement à A et B à la fois.
- La réunion de A et B est notée $A \cup B$.

Montrer que $A \cup B$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 44 Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

a désigne un paramètre. Eventuellement donner la réponse en fonction de a.

A = $\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3; x - 2y + z= 0\}$; B = $\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3; x -2y + z = 1\}$; C = $\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3;3x-y=0\}$;

D = $\{(x,y, z) \in \mathbb{R}^2; x – 2y +z= 0 \text{ et } x-y =0\}$; E = $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x – 2y +z =0 \text{ ou } x – y =0\}$

F = $\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3;2x + y \geq 0\}$; G = $\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3;x^2 +y^2 = z^2\}$; H = $\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3;xyz =0\}$;
I = $\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3; (x,y,z) = (x+y).(2,3,1)\}$; J = $\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 ; 2x - y + 3z= a\}$;
K = $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; 2x - ay + 3z= 0\}$

Exercice 45 Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$?

L = $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 ; z = 0\}$; M = $\{(x,y,z,t)\in \mathbb{R}^4 ; y = 1\}$; N = $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4; y = z+t\}$;

O = $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 ; 2x = y +z \text{ et } x + 2y +3z - t=0\}$; P= $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4; y = z+t \text{ ou } z = 0\}$;

Q = $\{(x,y,z,t) \in\mathbb{R}^4 ; xy = 0\}$;R = $\{(x,y,z,t) \in\mathbb{R}^4; y \in Q\}$; S = $\{(x,y,z,t) \in\mathbb{R}^4 ; z = x^2\}$

Exercice 46 On cherche à montrer que A = $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; 4x + y +z =0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$**.**
La réponse suivante comporte des fautes. Les repérer et les corriger.

« Pour tout X= (x,y,z) , tout Y = (x',y',z') de $\mathbb{R}^3$ et tout λ de $\mathbb{R}$,

X+Y = 4x +y+z +4x' +y' +z' = 0

Donc A est stable

Pour tout X de $\mathbb{R}^3$ et tout λ de $\mathbb{R}$, λ . X = λ (x,y,z) = 4 λ x + λ y + λ z
= λ (4x +y +z) =0

Donc A est stable

Donc A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. »