université PARIS-SACLAY
FACULTÉ JEAN MONNET
DROIT-ÉCONOMIE-GESTION

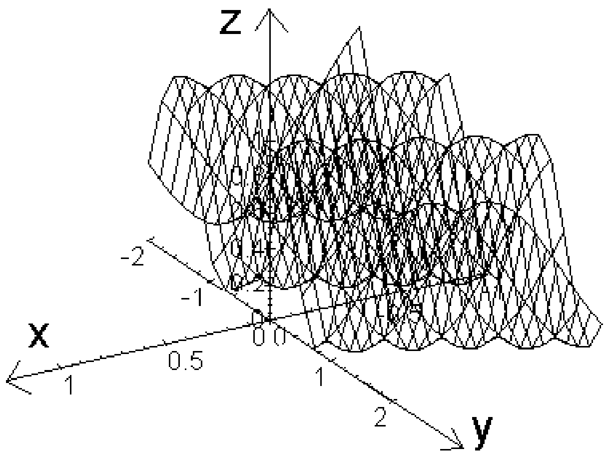
Licence Economie gestion 1ère année.

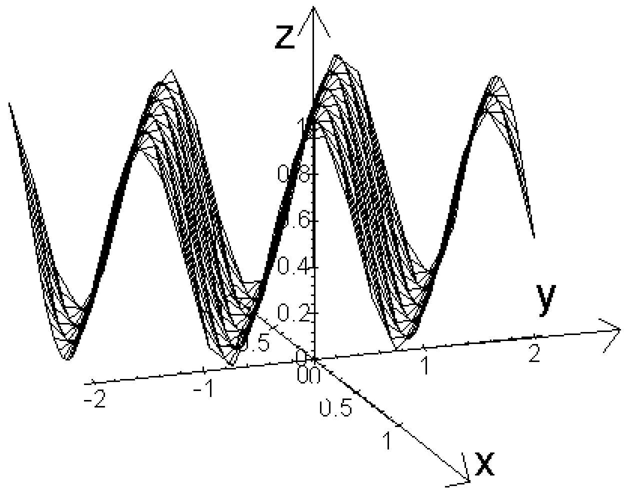
Cours de mathématiques 1 de P.Beau

Chapitre 6 - APPLICATIONS LINEAIRES

Préambule

Pour comprendre des données ... Il faut savoir choisir le bon point de vue





Il est donc nécessaire de savoir transformer les représentations des données, sans tes trahir.

Pour cela on dispose des ***applications linéaires***, qui agissent sur les vecteurs, en conservant les propriétés fondamentales de proportionnalité et de somme.

6-1 - Définitions, propriétés :

1) Rappels

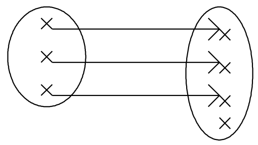
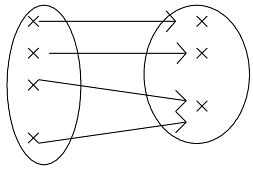
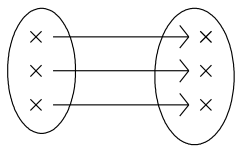
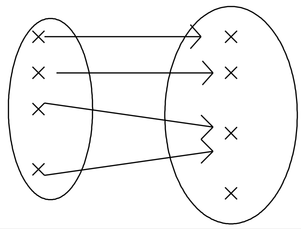
Soit f une **application** d'un ensemble E dans un ensemble F, c'est-à-dire une fonction de E dans F définie sur tout E: à tout élément x de E , f associe un unique élément y de F.

y est appelé l'image de x par f ; x est appelé un antécédent de y par f.

Définition 1 f est dite ***injective*** lorsque 2 éléments distincts de E ne peuvent jamais avoir la même image, c'est-à-dire lorsque tout élément de F a **au plus 1 antécédent** par f.
f injective $\Leftrightarrow$ (pour tous x, x' de E, $[x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')]$)
f injective $\Leftrightarrow$ (pour tous x, x' de E, $[f(x) = f(x') \Rightarrow x = x']$)

Définition 2 f est dite ***surjective*** lorsque tout élément de F a **au moins 1 antécédent** par f.
f surjective $\Leftrightarrow$ (pour tout y de F, il existe au moins un x de E tel que $y = f(x)$)

Définition 3 f est dite ***bijective*** lorsqu'elle est à la fois injective et bijective:
f bijective $\Leftrightarrow$ (pour tout y de F , il existe 1 unique x de E tel que f(x) = y)

			
application injective	application surjective	application bijective	ni injective ni surjective

Exemple 1

Considérons E = F = $\mathbb{R}$ et f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: $x \in \mathbb{R} \alpha f(x) = x^2$.
f n'est pas injective, car par exemple f(1) = f(-1).
En revanche l'application f_1 de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$: $x \in \mathbb{R}^+ \alpha f_1(x) = x^2$ est injective
f et f_1 ne sont pas surjectives , car par exemple -3 n'a pas d'antécédent.
En revanche l'application f_2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$: $x \in \mathbb{R} \alpha f_2(x) = x^2$ est surjective.
L'application f_3 de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$: $x \in \mathbb{R}^+ \alpha f_3(x) = x^2$ est bijective.

2) Applications linéaires :

Définition 4 . Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et f une application de E dans F.

f est dite ***linéaire*** lorsque : pour tous X,Y de E , et pour tout λ de $\mathbb{R}$,
$f(X+Y) = f(X) + f(Y)$ et $f(\lambda X) = \lambda f(X)$

Propriétés:

Propriété 1

f(E), l'ensemble des images des éléments de E par f, appelé " l'image de f " et noté ***Imf*** , est un **sous-espace vectoriel** de F (démonstration en exercice).

Propriété 2

pour tous $X_1, X_2, \ldots X_k$ de E et tous $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$ de K, $f(\sum_{i=1}^{i=k} \lambda_i X_i) = \sum_{i=1}^{i=k} \lambda_i f(X_i)$

Propriété 3

Une application f est linéaire si et seulement si :

Pour tous X,Y de E, pour tous λ,μ de K, $f(\lambda X + \mu Y) = \lambda f(X) + \mu f(Y)$.

(pour $\lambda=\mu= 1$ on retrouve la première condition et pour $\mu=0$ la seconde).

Propriété 4 Si f est une application linéaire alors $f(0_E) = 0_F$ (poser $\lambda = 0$ dans la définition)

Propriété 5 L'image d'un système lié est un système lié (il suffit d'utiliser la conséquence 2)
en revanche , l'image d'un système libre n'est pas forcément un système libre.

Exemples:

Dans l'espace des vecteurs du plan, les projections, symétries, homothéties, rotations sont des applications linéaires.

Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

1) f : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ telle que $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \alpha (x+ 2y, -2z)$

2) f : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ telle que $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ α $(2x + y, 2y, x - 1)$
3) f : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ α $xy + 2x$
4) f : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ α $2z - x$

A PARTIR DE MAINTENANT, NOUS NE CONSIDERERONS QUE DES ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION FINIE .

Propriété 6: La donnée des images (dans F) d'une base de l'espace vectoriel E définit une, et une seule, application linéaire de E dans F..

Cela découle de la conséquence 2)
Exemple : Soit f : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ application linéaire telle que f(0,1) = 1 et f(1,1) = 2. Déterminer f(x,y).

Preuve :
Soit un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, E, de dimension finie, et soit B = $(e_1, e_2, ... e_n)$ une base de E.
a) pour tout vecteur X de E , il existe exactement n réels $\lambda_1, \lambda_2, ... \lambda_n$ tels que X =
Si on définit une application de E dans un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, F ainsi :
on choisit les images des vecteurs de B : $f(e_1)$, $f(e_2)$, ... $f(e_n)$, et on définit pour tout X =
f(X) par : f(X) = ,
alors cette application est une application linéaire (démonstration en exercice).

b) Supposons maintenant que :
f est une application linéaire donnée,
les images des vecteurs de B, $f(e_1)$, $f(e_2)$, ... $f(e_n)$., sont données.
Alors pour tout X = de E, f(X) = car f est une application linéaire.
f(X) est donc déterminée.
La propriété est donc prouvée.

Conséquence 1: A partir de maintenant nous disposons d'au moins 2 façons de définir une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^k$.

- En définissant f(x_1 , x_2, ... x_n) en fonction de x_1 , x_2, ... et x_n
  Exemple: l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ qui à tout. (x_1 , x_2) associe $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2 , x_1 - x_2, 3x_1 + x_2)$
- Ou bien en donnant une les images des vecteurs d'une base : il existe une, seule, application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que f(1,1) = (1, 1, -2) , et f(0,1) = (-1, 2, 4)

Conséquence 2

- Les vecteurs $f_1 = f(e_1)$, $f_2 = f(e_2)$, ... $f_n = f(e_n)$ forment un système générateur de f(E) = Imf, ensemble image de E par f : f (E) = < f(B) >,
- La dimension de f(E) est donc le rang du système ($f_1, f_2, ... f_n$)

Définition 5 **:** on appelle ***rang*** de l'application linéaire f ***la dimension*** de Imf.

Propriétés 7

- Imf $\subset$ F , donc **rang f ≤ dim F**.
- De plus, **rangf = dimF ⇔** Imf = F ⇔ **f est surjective**
- Enfin, le système des vecteurs f_i est formé de n vecteurs, n étant la dimension de E.
  Donc **rang f ≤ dim E.**

6-2 Noyau d'une application linéaire; théorème des dimensions:

Définition** 6 :* on appelle ***noyau de l'application linéaire f de E dans F, l'ensemble des antécédents de 0_F. Il est noté ***Ker f***.

$$X \in \text{Ker } f \Leftrightarrow f(X) = 0_F .$$

Propriété 8 : Ker f est un sous-espace vectoriel de E (démonstration en exercice)

Propriété 9 :f est injective $\Leftrightarrow$ Ker f = 0_E

Démonstration:

Supposons f injective.

f étant une application linéaire , $f(0_E) = 0_F$. Donc $0_E \in$ Ker f

De plus, f étant injective, si $f(X) = 0_F = f(0_E)$ alors $X = 0_E$.

Donc Kerf = 0_E.

Supposons Kerf = 0_E.:

soient deux vecteurs X , X' tels que f(X) = f(X'). Alors $f(X - X') = f(X) - f(X') = 0_F$.

Donc $X - X' \in$ Kerf, donc $X - X' = 0_E$, donc X = X'.

f est donc injective.

Propriété 10: f désigne une application linéaire de E dans F.
f est injective si et seulement si l'image de tout système libre de E est un système libre de F.

Démonstration :

supposons f injective.

Soit $S = \{X_1; X_2; ... X_n\}$ un système libre de vecteurs de E.

Supposons que $\lambda_i f(X_i) = 0_F$. Puisque f est linéaire, on a donc $f(\lambda_i X_i) = 0_F$,

donc puisque f est injective : $\lambda_i X_i = 0_E$, donc puisque le système S_i est libre: $\lambda_i = 0$ pour tout i.

Donc le système $\{ f(Xi) , 1\leq i \leq n \}$ est libre.

Supposons que l'image de tout système libre est libre.

Soit X un vecteur non nul de E. Le système {X} est libre. Donc son image , le système {f(X)} est libre.

Donc $f(X) \neq 0_F$.

Remarques :

1. On en déduit que si f est injective, l'image d'une base B de E est libre. Or c'est un système générateur de f(E) . f(B) est donc une base de f(E) et dim f(E) = dim (E).
   Mais f(B) n'est pas nécessairement une base de F.
   Ce sera une base de F si f est de plus surjective, c'est-à-dire si dimf F = dim f(E) = dim E.
2. D'après ce théorème , si f est injective: dimf(E) = dim E, or $f(E) \subset F$, donc dim f(E) $\leq$ dim F.
   Cela n'est possible que si dim F $\geq$ dim E.

On peut se poser la question réciproque :

Si rang f = dimE, f est-elle alors obligatoirement injective ?

Le théorème suivant permet d'y répondre:

***Théorème** 1 (des dimensions)* : soit E un espace vectoriel de dimension finie et f une application linéaire de E dans un espace vectoriel F. Alors :

dim kerf + dim Imf = dim E

Démonstration :

Kerf est un sous-espace vectoriel de E, considérons donc une base $S = (e_1, e_2, ...e_k)$ de Kerf.

Complétons-la par n-k vecteurs , pour obtenir une base de E: B = (e_1, e_2, ... e_k, e_{k+1}, ...e_n) . Donc f(E) est engendrée par le système de vecteurs f(B) et rang f = dim Imf = rang (f(B)).
Or $f(e_1) = f(e_2) = ... = f(e_k) = 0_F$,
donc rang f(B) = dim< f(B) >= dim< f(e_k), f(e_{k+1}), ...f(e_n)>= rang (f(e_k), f(e_{k+1}), ...f(e_n)}.

Montrons donc que rang (f(e_k), f(e_{k+1}), ...f(e_n)} = dimE - k = n -k, c'est-à-dire que (f(e_k), f(e_{k+1}), ...f(e_n)} est libre:

Supposons que $\lambda_i f(e_i) = 0_F$. . Donc $f(\lambda_i e_i) = 0_F$. Donc $\lambda_i e_i \in$ Ker f. Or S est une base de Kerf . Donc il existe k réels $\lambda_1, \lambda_2, ... \lambda_k$ tels que $\lambda_i e_i = \lambda_i e_i$.

Donc $\lambda_i e_i + -\lambda_i e_i = 0_F$. D'où, puisque B est une base de E, $\lambda_i = 0$ pour tout i de 1 à n , et en particulier pour tout i de k+1 à n. Donc rang (f(e_k), f(e_{k+1}), ...f(e_n)} = n -k .

Exemple 2: Déterminer le rang, une base de l'espace image et le noyau de chacune des applications linéaires suivantes : $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$: $(x,y,z)\ \alpha\ (2x + y, y - z, z - 2x)$
$f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$: $(x,y)\ \alpha\ (3x, 2y - x, x - y)$
$f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$: $(x,y,z)\ \alpha\ (x - y, x +y+z, x + 2x)$

<u>6-3 Représentation matricielle d'une application linéaire</u>:

Soient B = (e_1, e_2, ... e_n) une base de E et B ' = (f_1,f_2, ... f_p) une base de F.
Considérons une application linéaire f de E dans F . Elle est déterminée par les images des éléments de B.
Chaque vecteur f(e_i) est représenté par le vecteur colonne de ses coordonnées dans B'.

On appelle matrice de f, et on notera m(f) , le tableau de nombres formé par les vecteurs colonnes des coordonnées des f(e_i) dans la base B'.

$$m(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{pmatrix} \end{array}$$

p lignes : composantes des f(e_i) dans B'

n colonnes pour les n vecteurs
de la base de l'espace de départ

Ce tableau comporte donc ***p lignes*** et ***n colonnes*** . On dit que m(f) est une ***matrice (p,n)***.
Si p = n , (par exemple dans le cas courant où E = F) la matrice est dite ***carrée d'ordre n***.

Exemple 3 : On considère $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ munis de leurs bases canoniques:
base de $\mathbb{R}^3$ (e_1 = (1,0,0) , e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)) , base de $\mathbb{R}^2$ (f_1 = (1,0) , f_2 = (0,1)).
Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que f (x,y,z) = (2x - y, 3x - y + 5z).
Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

La matrice m(f) dépend bien sûr de f mais aussi des bases choisie dans E et F. Aussi il est très important d'indiquer ces bases lorsque l'on donne la matrice d'une application linéaire.

Exemple 4:

Soit f : $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(x,y,z)\ \alpha\ (2x - 3y, x + z)$

1) Donner la matrice m de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.
2) Donner la matrice m' de f dans la base B = ((1,0,1), (1,1,1), (0,0,-1)) de $\mathbb{R}^3$ et la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
3) Déterminer la matrice m'' de f dans la base B et la base B' = ((-1,1), (0,1)).

Exemple 5 :

1) Soit $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice d'une application linéaire dans les bases B, base canonique de $\mathbb{R}^3$ et B'=((1,-1,0),(0,1,1),(-1,0,1)) . Calculer f(x,y,z) en fonction de x, y, z.
2) Même exercice en échangeant B et B'.

Remarque: il est courant d'envisager différentes bases, donc différentes matrices, pour une même application linéaire. Il faut donc savoir faire les calculs qui permettent ces changements de base. L'an prochain, vous apprendrez avec les produits de matrices une méthode générale pour calculer les matrices d'une application linéaire dans différentes bases.
Mais n'oubliez pas qu'un changement de base est souvent destiné à obtenir une nouvelle matrice plus simple. Les vecteurs utilisés ont alors fréquemment des propriétés particulières qui permettent d'éviter de nombreux calculs. Réfléchissez-y avant de vous lancer dans de longues résolutions de systèmes d'équations.

***Rang d'une matrice**:*

Le rang de f est le rang des $f(e_i)$, système générateur de f(E). C'est donc le rang des vecteurs colonnes de m(f). On montre que c'est aussi le rang des vecteurs lignes de m(f) .

On définit le ***rang de m(f)*** égal au rang de f.

Définition 7 rang m(f) = rang f = rang du système des vecteurs colonnes de m(f) = rang du système des vecteurs lignes de m(f).

Si m(f) est de dimensions (n,p) on a donc : rang m(f) $\leq$ inf (n,p) : le rang d'une matrice est inférieur ou égal à la plus petite de ses dimensions.

Si n= p et si rang m(f) = n , on dit que m(f) est ***régulière d'ordre n***.. D'après les propriétés vues au II, cela équivaut à dire que f est bijective.

Exemple 6: $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ est régulière d'ordre 2.

==

Pour approfondir:

Mathématiques en économie-gestion, S. ROSSIGNOL, ed DUNOD
Les mathématiques de l'économiste , G POULALION et G PUPION, ed Vuibert.
Algèbre pour économistes , B. GUERRIEN, ed ECONOMICA