Licence Economie management 1ère année.
2023 2024

Cours de mathématiques 1 de P.Beau

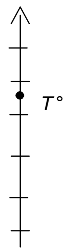
Chapitre 5 Espaces Vectoriels

5.1 Définitions, exemples

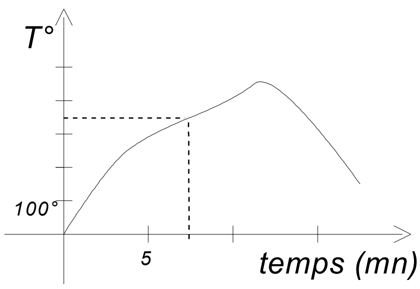
5.1.1 Introduction:

Certaines situations se caractérisent par ***1 paramètre*** , elles se représentent en ***1 dimension***.

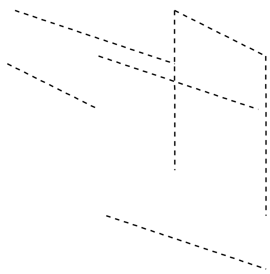
Exemple : La température actuelle d'un four à pizzas. Elle est donnée par un point pouvant se déplacer le long d'une droite : un thermomètre.



D'autres sont caractérisées par 2 paramètres, elles se représentent en ***2 dimensions***:
exemple : on étudie la variation de la température d'un four en fonction du temps.
Une situation est donnée par les 2 paramètres temps écoulé et température. Elle est représentée par un point pouvant se déplacer dans tout un plan.



D'autres font intervenir 3 paramètres, et se représentent en ***3 dimensions.***
Exemple : on veut présenter la consommation électrique d'une cuisson en fonction de la température maximale et du temps de cuisson.
Une situation est donnée par 3 paramètres : la consommation électrique, le temps de cuisson, la température maximale atteinte.
Elle est représentée par un point pouvant se déplacer dans les 3 dimensions de l'espace.



Et pour ***plus de 3 paramètres*** - imaginez une étude de marché portant sur ***plusieurs dizaines*** de critères d'un produit et de ses clients potentiels ...- il faut utiliser la géométrie d'un ***<u>espace de plus de 3 dimensions</u>.*** Un des buts de ce chapitre est d'en poser les bases.

5.1.2 Un premier exemple

Pour repérer des comptes courants en Euros, Dollars , Yen, Livres de différentes entreprises, on utilise pour chacune d'elles une liste de ses avoirs en ces 4 monnaies .

(4000; 5000; - 1000; 900)

représente un crédit de 4000€, 5000 $, un débit de 1000 Yens, un crédit de 900 £.
Ces listes sont

- ordonnées : (4000; 5000; - 1000; 900) ≠ (5000; 4000; - 1000; 900)
- toutes de même taille 4 .

☞ **Addition** .Pour décrire des groupes de plusieurs entreprises, on définit une **addition** de ces listes :

(4 000; 5 000; - 1000; 900)
\+ (2 000; 2 000; 3 000; 1 000)
= (6 000; 7 000; 2 000; 1 900)

☞ **Produit par un nombre réel.** Pour évaluer une moyenne de ces deux dernières listes, on multiplie chacun des termes par ½. On définit un **produit** entre **un nombre** et **une** de ces **listes** , noté par un point ·

$\frac{1}{2}$ · (6 000; 7 000; 2 000; 1 900) = (3 000; 3 500; 1 000; 950) Chaque composante de la liste est multipliée par le même nombre ½.

Remarquez bien que : on n'additionne pas de listes de tailles différentes, et on n'utilise pas (pour cette année) de produit entre deux listes.

☞ **Combinaison linéaire.** On peut combiner ces deux opérations :

$\frac{1}{2}$ · (6 000; 7 000; 2 000; 1 900) + 3· (100; -200; 0; 100) = (3 000; 3 500; 1 000; 950) + (300; -600; 0; 300)

= (3 300; 2 900; 1 000; 1 250)

☞ **Element neutre de l'addition .** (0; 0; 0; 0) additionnée à n'importe quelle liste de 4 nombres ne la modifie pas : (0;0;0;0) sera appelée l'élément neutre de ces listes.

☞ **Opposé .** (6; 7; -2; 0) + (-6; -7; 2; 0) = (0;0;0;0) , (-6; -7; 2; 0) est appelée l'**opposé** de (6; 7; -2; 0)

L'ensemble de ces listes ordonnées de 4 nombres, muni de ces deux opérations, est appelé l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{4}$.
Ces listes sont appelées des **vecteurs** de $\mathbb{R}^4$.

, ou ; Les listes ordonnées sont en général notées en mathématiques avec des parenthèses entourant des éléments regroupés par des virgules **,** . Mais , comme ici, pour envisager le cas de nombres écrits sous forme décimale, on peut séparer les éléments par un point-virgule **;** ainsi vous verrez la notation (3,72; 1 ; 2 ; 4) indiquant que le 1er élément est 3,72. On pourrait aussi utiliser des virgules en notant ce vecteur $\left(\frac{372}{100}, 1, 2, 4\right)$ mais ce ne sera pas la notation utilisée ici.

5.1.3 L'ensemble $\mathbb{R}^n$.

Pour n'importe quel entier strictement positif n, on note $\mathbb{R}^n$ l'ensemble des suites ordonnées de n nombres.

Par exemple $\mathbb{R}^2$ contient (1 ; 3) , ($\sqrt{2}$; - 1,23), ($-\frac{2}{3}$; 4)

$\mathbb{R}^3$ contient (1;2;3) , (-12 ; $\frac{5}{7}$; 78) , (0 ; -2,1 ; $\frac{2}{9}$)

Une suite ordonnées de n nombres, se nomme un **vecteur** de $\mathbb{R}^n$.

Les éléments d'un vecteur de $\mathbb{R}^n$ se nomment des composantes. On les écrit **horizontalement.** Dans ce cours, elles sont séparées par des points virgules ; pour pouvoir utiliser un écriture décimale : (0 ; -2,1 ; 3) . Mais ailleurs vous les verrez le plus souvent séparées par des virgules, dans ce cas on ne peut écrire les nombres que sous forme fractionnaire (0 , - $\frac{21}{10}$, 3) ou utiliser la notation anglo-saxonne (0, -2.1, 3).

5.1.3.1 Addition entre vecteurs et Produit d'un vecteur par un nombre réel.

Pour n fixé, on peut additionner 2 vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
Pour tous X = ($x_1;x_2;...x_n$) et Y = ($y_1;y_2;...y_n$)
$X+ Y = (x_1 + y_1; x_2 + y_2; x_3 + y_3,...x_n +y_n)$

Pour X = (0 ; 1 ; 2) et Y = (3;4;-5) vecteurs de $\mathbb{R}^3$,
X + Y = (3 ; 5 ; -3)

et on peut multiplier un nombre par un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

Pour tout nombre réel λ et tout X = (x_1; x_2; ... x_n) de $\mathbb{R}^n$,
$$\lambda X = \lambda \cdot (x_1 ; x_2 ; ... x_n) = (\lambda x_1 ; \lambda x_2 ; ... \lambda x_n)$$

dans $\mathbb{R}^3$
$$\frac{3}{2} \cdot (2 ; 5 ; -4) = (3 ; \frac{15}{2} ; -6)$$

Attention :

- L'**addition** ne s'opère qu'entre deux vecteurs d'un **même** espace $\mathbb{R}^n$.
- Le **produit** défini ici opère entre **un nombre** et **un vecteur** d'un espace $\mathbb{R}^n$; et non entre deux vecteurs.
- Dans un produit, on note toujours le nombre avant le vecteur : 3 · (2 ; 5 ; -4) et non ~~(2 ; 5 ; -4) · 3~~
- On ne **note pas** le produit d'un nombre et d'un vecteur avec le signe ×.
- Il existe d'autres opérations produits, cette fois entre deux vecteurs – produit scalaire et produit vectoriel – , elles ne seront pas utilisées dans le cours de 1ère année.

5.1.4 L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

Propriétés de l'addition dans $\mathbb{R}^n$:
Comme dans IR,

1. elle est associative : X + (Y + Z) = (X + Y) + Z = X + Y + Z (pour tous X,Y,Z de IR^n)
2. elle est commutative: X + Y = Y + X (pour tous X,Y de IR^n)
3. elle a un ***élément neutre*** , noté $\mathbf{0_{IR^n}}$ ou $\vec{0}$ **: (0,0, ... 0)**
4. tout élément X a un ***opposé*** , noté ***-X*** = ($-x_1$; $-x_2$; $-x_3$; ... - x_n).
   X + (-X) = (-X) + X = 0_{IR^n}
   Attention vous rencontrerez peut être – ailleurs que dans ce cours – la notation 0 pour 0_{IR^n} . Cette notation vous est **fortement** déconseillée. Il ne faut surtout **pas confondre le vecteur $\mathbf{0_{IR^n}}$** avec **le nombre 0**.

Propriétés du produit par un réel :

5. Pour tous réels, λ et μ, pour tout X de $\mathbb{R}^n$: (λ+μ).X = λ.X + μ.X
6. Pour tous éléments X et Y de $\mathbb{R}^n$, pour tout réel λ: λ.(X+Y) = λ.X + λ.Y
7. Pour tous réels λ et μ, pour tout élément X de $\mathbb{R}^n$: λ.(μ.X) = (λμ).X
8. Pour tout élément X de $\mathbb{R}^n$: 1.X = X
   Pour tout X de $\mathbb{R}^n$, X + $0_{\mathbb{R}^n}$ = $0_{\mathbb{R}^n}$ + X = X

L'ensemble $\mathbb{R}^n$, muni de ces deux lois est un ***espace vectoriel sur*** IR .

5.1.5 Espace vectoriel sur ℝ.

<u>Définition 1</u> :
Tout ensemble V, muni
d'une opération qui à toute paire d'éléments de V fait correspondre un élément de V – on appelle cela une loi de composition interne--
et d'une opération qui à tout élément de ℝ et à tout élément de V fait correspondre un élément de V – on appelle cela une loi de composition externe –
ayant les huit propriétés énoncées au-dessus est appelé ***espace vectoriel sur IR*** . Ses éléments sont appelés des ***vecteurs***.

.
Propriété -1 si V désigne un espace vectoriel sur IR et si 0_v désigne l'élément neutre de V pour l'addition, alors:

a) pour tous vecteurs u, v, w de V: si (u + v = u + w) alors v = w (on peut donc simplifier à gauche et à droite)
b) pour tout réel λ : $\lambda.0_v = 0_V$.
c) pour tout vecteur u de V: $0.u = 0_v$
d) pour tout vecteur X de V, (-1)·X est l'opposé de X (ce qui se note (-1)·X= -X)

Dans le cas où V est l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, pour un n donné, ces propriétés sont évidentes, mais dans le cas général elles doivent être prouvées.
Exercice -1: Prouver la propriété 1 pour n'importe quel espace vectoriel V.

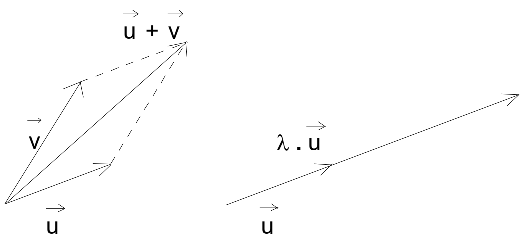
Remarque : on peut aussi définir des espaces vectoriels sur l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, ou

l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$, ou encore tout ensemble ayant, comme ℝ, une structure de corps – c'est-

à-dire ayant une addition, pour laquelle il existe un élément neutre et pour tout élément un symétrique, et une multiplication, distributive par rapport à l'addition, pour laquelle il existe aussi un élément neutre et, pour tout élément différent de l'élément neutre de l'addition, un symétrique – . Mais vous ne rencontrerez que des espaces vectoriels réels, c'est-à-dire sur ℝ , cette année. Dorénavant, l'expression « espace vectoriel » sans autre précision désignera un espace vectoriel sur ℝ.

5.1.6 Exemples FONDAMENTAUX d'espaces vectoriels :

Exemple 1
L'ensemble des ***VECTEURS DU PLAN***, muni de l'addition des vecteurs et du produit par un nombre réel, vérifie les huit propriétés.
De même pour l'ensemble des ***VECTEURS DE LA DROITE***
De même pour l'ensemble des ***VECTEURS DE L'ESPACE***



C'est pourquoi on appelle cette structure un espace ***vectoriel***.

<u>Correspondance entre les éléments de ℝ, ℝ², ℝ³ et les vecteurs de la droite, du plan , de l'espace</u>:
Vous savez déjà que dès que le plan est muni d'un repère, tout vecteur du plan est identifié par un couple de 2 nombres réels: ses coordonnées dans ce repère.
Vous savez aussi que, un repère du plan étant fixé,
la somme de deux vecteurs $\vec{i}$ de coordonnées (a; b) et $\vec{j}$ de coordonnées (a'; b') est le vecteur

$\vec{i}+\vec{j}$ de coordonnées (a + a'; b + b'):

et que si α est un réel, le vecteur $\alpha\ \vec{i}$ a pour coordonnées (αa, αb) dans le repère.

Un couple de réels est un élément de $\mathbb{R}^2$.
Vous pouvez alors remarquer que, dès qu'un repère du plan est fixé:

- à tout vecteur du plan correspond un et un seul élément de $\mathbb{R}^2$: ses coordonnées dans le repère;
- la somme de deux vecteurs du plan (que vous connaissez déjà) a pour coordonnées la somme (que l'on vient de définir) des deux éléments de $\mathbb{R}^2$ correspondants;
- le produit d'un réel par un vecteur du plan a pour coordonnées le produit (que l'on vient de définir) de ce réel par l'élément de $\mathbb{R}^2$ correspondant.

On peut ainsi décrire des situations dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ en les représentant dans l'espace vectoriel des vecteurs d'un plan muni d'un repère, et réciproquement.

On définit de la même façon une correspondance conservant le produit et la somme :
d'une part entre l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ et celui des vecteurs d'une droite munie d'un repère;
d'autre part entre l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et celui des vecteurs de l'espace muni d'un repère.

Exemple 2 Un autre exemple d'espace vectoriel, dont le caractère tout aussi fondamental vous apparaîtra si vous continuez quelque peu l'étude des mathématiques ou des statistiques les prochaines années:

Exercice -2: montrer que ***l'ensemble F des fonctions définies de*** $\mathbb{R}$ ***dans*** $\mathbb{R}$ (de même que l'ensemble des fonctions définies d'un même domaine de définition dans $\mathbb{R}$) peut être muni d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

5.2 Combinaisons linéaires, sous-espaces vectoriels

Exemple 3 3 (1; -1; 2) - 2 (5; 2, 0) = (-7 ; -7 ; 6).
Donc (-7;-7;6) peut s'obtenir à partir de (1; -1; 2) et (5; 2, 0) en appliquant l'addition et le produit par un nombre réel.
On dit que (-7 ; -7 ; 6) est **une combinaison linéaire** de (1;-1;2) et (5 ; 2 ; 0)

En revanche, (-7;-7;6) **n'est pas** combinaison linéaire de (1;-1;0) et de (5;2;0). Comment le prouver?

Définition - 2 : on appelle ***combinaison linéaire*** de p vecteurs X_1; X_2; ... X_p d'un espace vectoriel **V**, un vecteur de la forme:

$$\alpha_1 X_1+\alpha_2 X_2+\ldots+\alpha_p X_p=\sum_{i=1}^{p}\alpha_i X_i \quad .$$

où, pour chaque entier i entre 1 et p, α_i désigne un nombre de $\mathbb{R}$.

Exercice -3 Montrer que tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ est une combinaison linéaire de (1;0) et de (1;1)

Définition - 3 : si **V** est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, on appelle ***sous - espace vectoriel de V***, toute partie de **V** qui est elle-même un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ pour les mêmes opérations.

Voici l'exemple le plus simple de sous-espace vectoriel, présent dans tout espace vectoriel :

Propriété -2 : si V est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, alors l'ensemble composé uniquement de l'élément neutre de V, 0_V, muni de la même addition et du même produit que V, est un sous-espace vectoriel de V.

Exercice -4 : Prouver cette propriété.

Propriété -3 : une partie **W** de **V** est un sous-espace vectoriel de **V**, **si et seulement si** les 2 conditions suivantes sont satisfaites:
1. W n'est pas vide (elle doit contenir au moins l'élément neutre de l'addition)
2. elle est **stable** par rapport aux deux lois. C'est-à-dire :
   la somme de deux éléments de **W** est encore un élément de **W**
   et le produit d'un élément de **W** par un élément de $\mathbb{R}$ est encore un élément de **W**.

Propriété -4 : on peut prouver facilement que si W est un sous-espace vectoriel d'un espace V, alors l'élément neutre de l'addition cité à la condition 1 est toujours aussi celui de V.

Démonstration de la propriété 3:
a. si W est un sous espace vectoriel de V, alors ces 2 conditions sont satisfaites, elles font partie de la définition d'un espace vectoriel.
b. Réciproquement ; si ces 2 conditions sont vérifiées, alors :
   - L'addition et la multiplication externe de V , appliquées uniquement aux vecteurs de W, définissent une addition et une multiplication externe dans W, qui vérifient les propriétés n° 1, 2, 5, 6, 7,8 de la définition des espaces vectoriels.
   - Pour tout vecteur u de W, -1 ·u est aussi dans W . Or (cf. propriété **-** 1) -1 ·u est égal à -u, l'opposé du vecteur u.
     Donc u a un opposé dans W.
   - D'après la condition 1, il existe au moins un vecteur dans W, appelons le z. D'après le résultat précédent, il a un opposé dans W. Or W est stable par +, donc la somme de z et son opposé appartient à W . Or cette somme est 0_v. Donc 0_v appartient à W: 0_v élément neutre pour l'addition dans V, l'est aussi dans W.

Les conditions 1 et 2 sont donc nécessaires et suffisantes pour que W soit un sous espace vectoriel de V.
Démonstration de la propriété 4 : Si 0_W est l'élément neutre de l'addition dans W, on a l'égalité :
$0_w+0_w = 0_w = 0_w+ 0_v$. Donc, d''après la partie a) de la propriété **-** 1 ,$0_W = 0_V$.

On peut aussi utiliser la propriété suivante, qui se déduit facilement de la propriété 3 :

Propriété -5
W est un sous-espace vectoriel de **V** si et seulement si:
W n'est pas vide et pour tous X et Y de **W** et pour tous éléments λ et μ de **K** : $\lambda.X + \mu Y \in$ **W**.

Cette dernière condition peut aussi s'énoncer : **W n'est pas vide et est stable par combinaison linéaire**.

Exemple 4

L'espace des vecteurs d'une droite est un sous-espace vectoriel de l'espace des vecteurs du plan.

Une façon de le justifier est de remarquer que c'est un espace vectoriel (cf.5.1.6) qui est contenu dans l'espace des vecteurs du plan.
Une autre façon est de remarquer que l'ensemble des vecteurs de la droite est inclus dans l'espace vectoriel des vecteurs du plan, qu'il n'est pas vide , et qu'il est stable par les deux lois (la somme de 2 vecteurs d'une droite, le produit d'un réel par un vecteur d'une droite sont aussi des vecteurs de la même droite)

Exercice -5
1) Montrer que A = $\{ (x;y;z) \in IR^3; x - 4y + 6z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de IR^3 , en utilisant la propriété 3 ou la propriété 5
2) On considère $B = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 ; x+y < 3 \}$. Les vecteurs (1 ; 1 ; 0) , (2 ; 0;0) appartiennent -ils à B ? Leur somme (1;1;0) + (2;0;0) appartient-elle à B ?
   en déduire que B n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$
3) On considère C = $\{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 ; x + y +z \geq 0\}$. Le vecteur (1 ; 1 ; 0) appartient-il à C ? Le vecteur -2(1;1;0) appartient-il à C ? En déduire que C n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Propriété -6: **l'intersection** de deux sous-espaces vectoriels de **V** est aussi un sous-espace vectoriel de **V**.

Rappel : l'intersection de deux ensembles est formée par tous les éléments qui appartiennent à ces deux ensembles à la fois.
Preuve :
a) Si V_1 et V_2 sont deux sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel V, alors d'après la propriété 3 et la remarque qui la suit, V_1 et V_2 contiennent tous deux l'élément neutre de l'addition de V, 0_V. Donc l'intersection de V_1 et V_2 contient au moins 0_V.
b) Pour tous vecteurs u, v de l'intersection de V_1 et V_2, et tous nombres réels α , β,
α u + β v appartient à V_1 car V_1 , sous-espace vectoriel de V, est stable par combinaison linéaire (*cf* propriété 5).
pour la même raison α u + β v appartient à V_2
donc α u + β v appartient à l'intersection de V_1 et V_2
donc l'intersection de V_1 et V_2 est stable par combinaison linéaire.
d'après a), b) et la propriété 5, l'intersection de V_1 et V_2 est un sous-espace vectoriel de V.

Attention, en revanche **la réunion** de 2 sous-espaces vectoriels, ensemble des éléments appartenant au moins à un de ces deux sous-espaces vectoriels, **n'est pas** obligatoirement un espace vectoriel ! Voir à ce sujet les exercices de TD.

Définition - 4 :
on note $<X_1, X_2, ...X_p>$, l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs X_1, X_2, ...X_p.de V

Propriété -7 p désigne n'importe quel entier strictement positif. Si on fixe p vecteurs X_1, X_2, ...X_p d'un espace vectoriel V, alors l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des X_1, X_2, ...X_p est un sous-espace vectoriel de V.

Exercice -6 *:* prouver cette propriété.
On peut alors poser la définition définition ***-4*** **:**

Définition - 5 :
on note $<X_1, X_2, ...X_p>$, *l*'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de p vecteurs X_1, X_2, ...X_p d'un espace vectoriel V.
C'est un sous-espace vectoriel de V qui est appelé le *sous-espace vectoriel de V engendré par* $X_1, X_2, ...X_p$

5.3 Systèmes générateurs, libres, liés, bases.

5.3.1 Rappel : méthode de Gauss

Les notions qui vont suivre seront liées à la résolution de systèmes.

La méthode de Gauss permet de résoudre des systèmes linéaires de n équations à n inconnues. Cette méthode a été vue au lycée, malheureusement les lycéen.ne.s l'utilisent rarement , préférant se lancer dans des substitutions, ce qui s'avère moins efficace et engendre couramment des erreurs, ou des calculs bouclant sans fin… La méthode de Gauss propose elle, toujours un nombre minimum d'étapes.
Utilisons-la sur un exemple où n = 3.
Les systèmes suivants sont tous ***équivalents*** entre eux et à (S). Cela signifie qu'ils ont tous exactement ***les mêmes ensembles de solutions***; ou encore qu'un triplet (x;y;z) vérifie un de ces systèmes ***si et seulement si*** il vérifie les autres.

- A chaque étape on remplace des lignes par des combinaisons linéaires de lignes du système précédent. Cela assure que si un système d'équations est satisfait, alors les suivants le sont aussi, donc que **si des valeurs sont solutions du premier système, alors elles sont solutions des suivant**s.
- La méthode de Gauss assure **de plus** que si un système est satisfait, alors le **précédent** est satisfait aussi, donc **si des valeurs sont solutions du dernier système, alors elles sont aussi solutions du premier**

Il convient pour cela d'appliquer correctement la méthode de Gauss, c'est-à-dire : à chaque étape on conserve une ligne de plus qu'à l'étape précédente, et on modifie **les lignes suivantes uniquemen à l'aide des lignes conservées**.

Exemple 5 Soit à résoudre le système (S) $\begin{cases} x-2y+3z & = & 1 & (L1) \\ 2x-y-z & = & 0 & (L2) \\ 3x+3y-3z & = & -12 & (L3) \end{cases}$

$$\begin{cases} x-2y+3z & = & 1 & (L1) \\ 2x-y-z & = & 0 & (L2) \\ 3x+3y-3z & = & -12 & (L3) \end{cases}$$

Système initial.

On conserve L1.
On **élimine x** dans les 2 équations suivantes en :
remplaçant (L2) par -2L1+L2
remplaçant (L3) par -3L1 + L3
on obtient le système équivalent suivant:

(S)⇔
$$\begin{cases} x-2y+3z & = & 1 & (L'1):(L1) \\ 3y-7z & = & -2 & (L'2):(-2L1+L2) \\ 9y-12z & = & -15 & (L'3):(-3L1+L3) \end{cases}$$

On conserve L'1 et L'2 .
On **élimine y** dans L'3 en remplaçant L'3 par
-3L'2 + L'3 : le coefficient d'y est alors -3×3+9 = 0

(S)⇔
$$\begin{cases} x-2y+3z & = & 1 & (L''1):(L'1) \\ 3y-7z & = & -2 & (L''2):(L'2) \\ 9z & = & -9 & (L''3):(-3L'2+L3) \end{cases}$$

On obtient alors un système qui peut se résoudre
en cascade **à partir de la dernière ligne**.

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} z & = & -1 & & & d'après(L''3) \\ y & = & \frac{1}{3}(-2+7z) & = & -3 & d'après(L''2) \text{ et la ligne précédente} \\ x & = & 1+2y-3z & = & 1-6+3=-2 & d'après(L''1) \text{ et les deux lignes précédentes} \end{cases}$$

On a utilisé la méthode de Gauss, elle a fourni des systèmes **équivalents**, on peut donc affirmer que

(a) z=-1, y =-3, x = -2 est une solution du système (S).
(b) C'est la seule solution

Si on avait utilisé des substitutions – exprimer successivement une partie des inconnues en fonction des autres – ou des combinaisons de lignes et de colonnes sans respecter à chaque étape la méthode de Gauss, on aurait uniquement prouvé que les conditions obtenues à la fin sont nécessaires pour que *x,y,z* soient solutions du système. Il **resterait**

- à prouver que les systèmes successifs sont équivalents , s'ils le sont (fastidieux …)
- ou à **vérifier** que les valeurs obtenues à la fin pour *x,y,z* forment une solution du système initial.

Remarquez que pour un système de n équations à n inconnues, la méthode de Gauss permet toujours d'obtenir en (n-1) étapes au maximum un système triangulaire facile, et en n étapes la solution.
C'est plus simple, plus rapide, plus efficace que des substitutions hasardeuses.

5.3.2 Systèmes générateurs – ou familles génératrices – .

Soit V , un espace vectoriel sur IR.

Définition - 6 : on dit que p vecteurs $X_1, X_2, ...X_p$ **de l'espace vectoriel V** forment un ***système générateur*** de V , ou une **famille génératrice de V**, ou encore qu'ils **engendrent V** lorsque tout vecteur de V peut s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire des X_i (i = 1,2, ...p).

Attention les vecteurs $X_1, X_2, ...X_p$ doivent être des vecteurs de V. Grâce à cette condition, non seulement tous les vecteurs de V sont combinaisons linéaires de $X_1, X_2, ...X_p$ mais aussi toutes les combinaisons linéaires de $X_1, X_2, ...X_p$ sont dans V.

Ou encore , $X_1, X_2, ...;X_p$, forment un système générateur de V si, et seulement si
- $X_1, X_2, ...;X_p$ sont des vecteurs de V
- et pour tout vecteur Y de V, il existe p nombres réels $\lambda_1, \lambda_2, ... \lambda_p$ satisfaisant à $Y = \sum_{i=1}^{i=p} \lambda_i X_i$

En utilisant la définition 5 , on peut écrire que X_1 , X_2 , .. X_p engendrent V si et seulement si le sous-espace vectoriel de V engendré par X_1 , X_2 , .. X_p est V tout entier.

Exemples:

Exemple 6 dans l'exercice ***- 3***, on a montré que (1;0) et (1;1) engendrent $\mathbb{R}^2$

Exemple 7 si S = {$X_1, X_2, ... X_p$}, alors S est générateur de <$X_1, X_2, ...X_p$>.

Exemple 8 Vous savez depuis la classe de seconde qu'il suffit de 2 vecteurs <u>bien choisis</u> d'un plan pour engendrer tous les vecteurs de ce plan, par des additions et des produits par des réels, donc par des combinaisons linéaires.

Exemple 9 soit A = { (x;y;z) $\in$ IR^3; x - 4y + 6z = 0}. Il a été démontré à l'exercice **-** 5 que A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

On va maintenant déterminer un système générateur de A.

On vous propose ici trois méthodes de résolution de cet exercice très courant. Il en existe d'autres tout aussi valables. A vous de choisir une méthode et de **l'utiliser rigoureusement.**

1ère méthode

a) pour tout u=(x,y,z) de A, on a les égalités suivantes :

x – 4y + 6z = 0 ,

d'où x = 4y – 6 z

d'où u = (4y – 6z, y , z)

d'où u = y (4, 1, 0) + z (-6, 0, 1)

d'où u appartient à <(4, 1, 0) , (-6, 0, 1)> , ensemble des combinaisons linéaires de (4, 1, 0) et (6, 0, 1) .

donc A est inclus dans <(4, 1, 0) , (-6, 0, 1)>.

b) **Réciproquement**, pour tout v de <(4, 1, 0) , (-6, 0, 1)>, il existe α,β de IR tels que

$v = \alpha (4, 1, 0) + \beta (-6, 0, 1)$

d'où $v = (4 \alpha - 6 \beta, \alpha , \beta)$. Posons $x_u = 4\alpha - 6 \beta$, $y_u = \alpha$, $z_u = \beta$.

On a donc $x_u – 4y_u + 6 z_u = 4\alpha - 6 \beta - 4\alpha + 6 \beta = 0$

Donc v appartient à A

Donc <(4, 1, 0) , (-6, 0, 1)> est inclus dans A.

D'après a) et b) A = <(4, 1, 0) , (-6, 0, 1)>.

2nde méthode

pour tout u = (x, y, z) de IR^3 on a :

	u appartient à A	si et seulement si	x – 4y + 6 z = 0 ,
d'où	u $\in$ A	<=>	x = 4y – 6z,
d'où	u $\in$ A	<=>	u = (4y – 6z, y, z)
d'où	u $\in$ A	<=>	u = y(4,1,0) + z (-6, 0, 1)

d'où A est l'ensemble de tous les vecteurs de IR^3 s'écrivant y(4,1,0) + z (-6, 0, 1) , avec y et z nombres quelconques de IR.

d'où A est l'ensemble des combinaisons linéaires de (4,1,0) et (-6, 0, 1).

Donc **A = <(4, 1, 0) , (- 6, 0, 1)>.**

3ème méthode (ici on exprime y ,et non x, en fonction des 2 autres composantes)

pour tout u = (x, y, z) de IR^3 on a :

u appartient à A si et seulement si $x - 4y + 6z = 0$,

d'où $u \in A$ <=> $y = (x + 6z)/4$

d'où $u \in A$ <=> u = (x, x/4 + 3z/2, z) , avec x, z, quelconques dans IR

d'où $u \in A$ <=> u = x (1, 1/4, 0)+ z(0, 3/2, 1) avec x, z quelconques dans IR

Donc A est l'ensemble des combinaisons linéaires de (1, 1/4, 0) et (0, 3/2, 1).

Donc A = <(1, 1/4, 0) , (0, 3/2, 1) >

Remarques :

a) Tout vecteur de l'espace vectoriel A de l'exemple précédent est combinaison linéaire de (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1). Le prouver.

b) Pourtant, (1,0,0), (0,1,0),et (0,0,1) ne forment pas un système générateur de A !. Expliquer, préciser la différence entre a) et la définition d'un système générateur d'un (sous-)espace vectoriel.

5.3.3 Systèmes libres (ou indépendants),systèmes liés (ou dépendants)

On cherche ici à reconnaître si, dans un ensemble de vecteurs, certains peuvent être engendrés à partir des autres, par combinaison linéaire.

Exemple 10 : considérons les 4 vecteurs suivants de IR^3 u = (1, -1, 2) , v = (-2, 0, 2) , w = (1, 2, -7) ; s = (1,0,0)

s n'est pas combinaison linéaire de u,v,w . Pour le voir , on peut essayer de résoudre l'équation vectorielle dont les inconnues sont 3 nombres a, b, c : $s = a\,u + b\,v + c\,w$,

elle équivaut à un système linéaire de 3 équations à 3 inconnues a,b,c, ce système n'a pas de solutions.

En revanche w est combinaison linéaire des 3 autres , par exemple w = -2u – (3/2) v +0 s

Donc un, au moins, de ces 4 vecteurs est combinaison linéaire des autres. On dit que ces 4 vecteurs forment un système de vecteurs lié , ou encore une famille de vecteurs liée

Pour vérifier si une telle condition est satisfaite on pourrait a priori penser qu'il faut résoudre plusieurs systèmes linéaires. Mais elle est équivalente à la condition suivante, qui a l'avantage de nécessiter au maximum une seule résolution de système – vous verrez plus loin des propriétés qui nous épargneront même cette résolution – :

Définition - 7 : on dit que des vecteurs $X_1, X_2, \ldots X_m$ d'un espace vectoriel V sur IR sont **liés**, ou **linéairement dépendants,** ou qu'ils forment une **famille liée,** ou encore qu'ils forment un **système de vecteurs liés,** lorsqu' il existe des éléments $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ de IR **non tous nuls** tels que $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i X_i = 0_V$ (vecteur nul de V)

Propriétés -8

1. Cela équivaut à écrire qu'au moins un des vecteurs (correspondant à λ_I non nul) s'exprime comme combinaison linéaire des autres. Car si $\lambda_i \neq 0$, l'égalité précédente est équivalente à: $X_i = - (\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_{i-1} X_{i-1} + \lambda_{i+1} X_{i+1} + \ldots + \lambda_m X_m)$
2. **Si** des vecteurs sont proportionnels **alors** ils sont liés. Attention la réciproque n'est pas vraie, sauf dans le cas suivant.
3. Dans le cas de **deux** vecteurs, ils sont liés **si et seulement si** ils sont proportionnels.

Un ensemble de vecteurs { $X_1, X_2, \ldots X_m$} est dit **libre** —et ses vecteurs sont dits **linéairement indépendants** — lorsqu'il n'est **pas lié**. C'est-à-dire lorsqu'**il n'existe pas de nombres λ_i non tous nuls** tels que $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i X_i = 0_V$.

C'est-à-dire encore lorsqu'**aucun** de ces vecteurs n'est combinaison linéaire des autres.

Définition - 8: on dit que $\{X_1, X_2, \dots X_m\}$ est un **système libre,** ou une famille libre, ou encore que ses vecteurs sont libres, ou linéairement indépendants, si et seulement si:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i X_i = 0_V\right) \Rightarrow (\alpha_i = 0 \text{ pour tout i de 1 à m})$$

Cela équivaut à écrire qu'aucun de ces vecteurs n'est combinaison linéaire des autres.

Exercice -7*:* Montrer que les systèmes suivants sont libres:
$S_1 = \{e_1 = (1,0,0) ; e_2 = (0,1,0) ; e_3 = (1,1,-3)\}$ et $S_2 = \{f_1 = (1,-1,0) ; f_2 = (2,1,3); f_3 = (1,0,0)\}$

Lorsqu'on a un système de vecteurs liés, il y a donc des vecteurs qui s'expriment en fonction des autres. La question qui se pose est alors de préciser quels vecteurs de ce système on doit retenir pour les exprimer tous.

Définition - 9 : on appelle ***rang d'un ensemble (ou d'un système, d'une famille) de vecteurs*** la plus grande taille possible pour une famille de vecteurs indépendants de cet ensemble : on peut former une famille libre avec ce nombre de vecteurs, mais si on en prend plus, ils sont obligatoirement liés.

Exemple 11:
- le rang de la famille {(1,2), (3,6), (4,8)} est 1
- celui de {{1,0,0), (2, 0, 0) , (0,1,0)} est 2: les 3 vecteurs sont liés , mais il existe une sous famille libre de 2 vecteurs : {(1,0,0), (0,1,0)}
- une famille d'un vecteur **non nul** a pour rang 1
- le vecteur nul, seul, forme une famille liée. Le rang de la famille {(0,0,0)} est donc 0 : on ne peut pas y trouver une sous famille libre d'un vecteur.

Exercice -8 : montrer que si un système de m vecteurs est de rang p, et que l'on connaît p vecteurs indépendants du système, alors tous les autres sont combinaisons linéaires de ceux-là

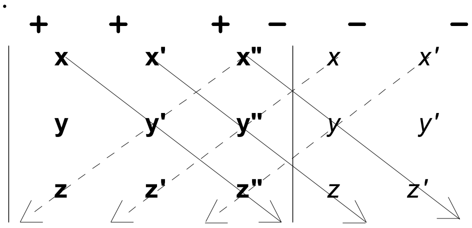
Exercice -9 : soit le système de vecteurs de IR^3: { (1,2,-1); (3,-2,2);(-1,6,-4)}. Ces vecteurs sont-ils liés? Quel est le rang de ce système?

Un outil souvent utile: le déterminant

Il permet d'étudier la dépendance linéaire de vecteurs.
Pour vous, il ne s'appliquera que dans 2 cas : 2 vecteurs de IR^2 ou 3 vecteurs de IR^3. Dans les années suivantes, vous pourrez rencontrer des déterminants s'appliquant à n vecteurs de IR^n.

Pour exprimer que **2 vecteurs** u(x,y) et v(x',y') **de** IR^2 sont liés, on peut écrire que leurs coordonnées sont proportionnelles, ce qui est équivalent à xy' - yx' =0 . Le nombre xy' - yx', noté est le ***déterminant*** des vecteurs u et v.

De même pour exprimer que **3 vecteurs de** IR^3 sont liés, on pourra écrire de façon équivalente que leur déterminant est nul: si u(x,y,z), v(x',y',z'), et w(x",y",z"), le déterminant de u,v,w sera :
D = xy'z" + x'y"z + x"yz' - (x"y'z + x'yz" + xy"z').
Ce calcul peut se retenir par la ***règle de Sarrus***.
Attention elle n'est pas valable dans IR^n, $n \neq 3$.



Ainsi (résultat admis):
{ u(x,y,z) ; v(x',y',z'); w(x",y",z")} est lié si et seulement si D = 0

Le paragraphe suivant nous apprendra que si une famille de 2 vecteurs de IR ^{2} , ou de 3 vecteurs de IR^3, est libre, alors elle est aussi génératrice, et que si elle est génératrice, alors elle est aussi libre. On peut donc d'ores et déjà noter (la définition d'une base et la justification de ce résultat sont dans le paragraphe suivant)

Propriété -9

Si le déterminant $\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}$ de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$: u(x,y,z) , v(x',y',z'), w(x",y",z")) est **différent de** 0 alors ces 3 vecteurs forment **une base de $\mathbb{R}^3$** ils sont **libres et engendrent** $\mathbb{R}^3$.
Si ce déterminant est égal à 0, alors ces 3 vecteurs sont **liés** et n'engendrent pas $\mathbb{R}^3$.

Si le déterminant $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$ de 2 vecteurs de $\mathbb{R}^2$: s(x,y) , t (x', y') est différent de 0 alors ces 2 vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^2$: ils sont libres et engendrent $\mathbb{R}^2$.
Si ce déterminant est égal à 0, alors ces 2 vecteurs sont liés et n'engendrent pas $\mathbb{R}^2$.

5.3.4 Bases et dimension d'un espace vectoriel

Nous considérerons à partir de ce paragraphe des espaces vectoriels engendrés par un nombre fini de vecteurs.

La notion de ***base*** d'un espace vectoriel est celle d'un ***système générateur minimal***, c'est-à-dire comportant le moins possible de vecteurs : si on ôte un des vecteurs, le système n'est plus générateur.
Remarquons que si un système générateur d'une espace V comprend des vecteurs liés, alors au moins l'un d'entre eux est lui-même combinaison linéaire des autres. Ces autres vecteurs suffisent donc à engendrer tout V. Donc le système générateur considéré n'a pas un nombre minimal de vecteurs.
Réciproquement si un système générateur est libre, alors si on considère un vecteur de ce système, il n'est pas engendré par les autres, qui ne suffisent donc pas à engendrer tout l'espace V.
Un système générateur ayant un nombre minimal de vecteurs est donc un système générateur libre.

Définition - 10: soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, on appelle ***base de V***, tout ***système de vecteurs générateur*** de V ***et libre.***

Propriété -10: un système de vecteurs B est une base d'un espace vectoriel V , si et seulement si ***tout vecteur de V*** peut s'écrire ***de façon unique*** comme ***combinaison linéaire d'éléments de B***.

Soit, si B = (e_1,e_2,...e_n) **tout vecteur X de V s'écrit X =** $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ **et les α_i sont uniques**.

C'est l'intérêt majeur des bases par rapport aux systèmes générateurs en général.
Ainsi les vecteurs (1,2) (1,1) (1, -1) forment un système générateur (à montrer en exercice) de IR^2, mais ils ne forment pas une base de IR^2, car par exemple (3, 2) = 1(1, 2) + 1(1,1) + 1(1,-1) est aussi égal à 3(1, 2) - 2(1,1) + 2(1,-1) : on a au moins deux solutions pour les λ_i : λ_1 =1=λ_2 = λ_3 et λ_1=3, λ_2= -2, λ_3=2
Démontrons cette propriété:

a) Supposons que B = (e_1,e_2, ... e_n) soit générateur et libre.

Soit X $\in$V, puisque B est générateur il existe des réels α_1, α_2, ...α_n tels que X = $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$.

Supposons que cette décomposition ne soit pas unique et montrons que c'est absurde ;

soit donc $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i' e_i$ une autre décomposition de X . On a donc $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha'_i e_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \alpha'_i) e_i = 0_V$

et l'un au moins des α_i est différent du α'_i correspondant, ce qui contredit le fait que B soit libre. C'est impossible.

b) Réciproque : supposons que tout vecteur de V se décompose de façon unique à l'aide des vecteurs de B et montrons que B est générateur et libre.

B est donc évidemment générateur.

D'autre part si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = 0_V$, on a donc $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = 0_V = \sum_{i=1}^{n} 0 e_i$, la décomposition étant unique, on en déduit que $\lambda_i = 0$ pour tout i =1,2, ...n. B est donc libre.

Définition - 11: les coefficients λ_i intervenant dans la décomposition de X suivant la base B sont appelés ***coordonnées de X dans la base B.*** Ces coordonnées dépendent évidemment de la base choisie.

On représente en général les coordonnées d'un vecteur X dans une base sous la forme d'un ***vecteur colonne :***
$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Par exemple , dans IR ^{2} , on peut considérer les 3 bases suivantes :
B_1 formée de (1,1) et (2,1)   B formée de (1,0) et (0,1)   et B_2 formée de (7,5) et (0,4)
soit le vecteur u = (7,5)

Coordonnées dans B_1 : (7, 5) = 3(1,1) + 2(2,1) . Donc u a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ dans B_1

Coordonnées dans B : (7,5) = 7 (1,0) + 5 (0,1) . Ses coordonnées dans la base B sont $\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$

Coordonnées dans B_2 : (7,5) = 1 (7,5) + 0 (0,1) . Ses coordonnées dans B_2 sont $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Attention donc à **ne pas confondre le vecteur (7,5) , avec ses coordonnées dans une base, qui dépendent de la base choisie :** $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ dans B_1 , $\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$ dans B, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans B_2.

B = ((1,0) , (0,1)) apparaît comme étant la base naturelle de IR ^{2} , aussi on l'appelle la ***base canonique de*** IR ^{2} .
Dans cette base le vecteur (x,y) a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

De même B' = ((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et dans cette base (x,y,z) a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Cela peut se généraliser à $\mathbb{R}^n$.

Définition - 12:
B ((1,0,0, ...0), (0,1,0,0,...,0), ... , (0,0, ... ,0,1)) est appelée la ***base canonique*** de $\mathbb{R}^n$.

Si X = $(x_1,x_2, ...x_n)$, alors X = $x_1(1,0,0, ...,0) + x_2(0,1,0, ... , 0) + ... +x_n(0,0, ... ,1)$

et les coordonnées de X dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ sont : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$

Exercice -10 *:* soit B = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)) la base canonique de $\mathbb{R}^3$; soit B'=((1,1,0),(0,1,0),(1,1,1)).
Montrer que B' est une base de $\mathbb{R}^3$ et si X = (x,y,z) est un élément quelconque de $\mathbb{R}^3$, donner ses coordonnées dans B puis dans B'.

Nous allons montrer que toutes les bases d'un même espace vectoriel comportent le même nombre d'éléments. Commençons par prouver le lemme suivant :

Lemme: si G = $(X_1, X_2, ...,X_m)$ est un système générateur de V et si L = $(Y_1,Y_2, ...,Y_r)$ est un système libre de V. alors $r \leq m$.

Preuve : supposons que r > m et montrons L est forcément lié.

G étant un système générateur de l'espace vectoriel V, tous les vecteurs de V sont des combinaisons linéaires de $X_1, X_2, ...X_n$. En particulier il existe m nombres $a_{1,1}, a_{1,2}, \dots a_{1,m}$ solutions de $Y_1 = a_{1,1} X_1 + a_{1,2} X_2 + \dots a_{1,m} X_m$, et pour tout entier k compris entre 1 et r, il existe m nombres $a_{k,1}, a_{k,2}, \dots a_{k,m}$ solutions de $Y_k = a_{k,1} X_1 + a_{k,2} X_2 + \dots a_{k,m} X_m$.

pour vérifier si L est lié ou libre, résolvons l'équation (E) $b_1 Y_1 + b_1 Y_2 + \dots + b_r Y_r = 0_V$

(E) ⇔ $b_1(a_{1,1} X_1 + a_{1,2} X_2 + \dots a_{1,m} X_m) + b_2(a_{2,1} X_1 + a_{2,2} X_2 + \dots a_{2,m} X_m) + \dots + b_r(a_r,1 X_1 + a_r,2 X_2 + \dots a_{r,m} X_m) = 0_V$

(E) ⇔ $(b_1 a_{1,1} + b_2 a_{2,1} + \dots + b_r a_{r,1}) X_1 + (b_1 a_{1,2} + b_2 a_{2,2} + \dots + b_r a_{r,2}) X_2 + \dots + (b_1 a_{1,m} + b_2 a_{2,m} + \dots + b_r a_{r,m}) X_m = 0_V$

pour que cette équation soit satisfaite , il **suffit** que tous les coefficients multipliant les X_i soient nuls, c'est-à-dire

$$\begin{cases} b_1 a_{1,1} + b_2 a_{2,1} + \dots + b_r a_{r,1} & = 0 \\ b_1 a_{1,2} + b_2 a_{2,2} + \dots + b_r a_{r,2} & = 0 \\ \dots \\ b_1 a_{1,m} + b_2 a_{2,m} + \dots + b_r a_{r,m} & = 0 \end{cases}$$ c'est un système de m équations à r inconnues $b_1, b_2, \dots b_r$.

Si r > m, ce système aucune solution ou une infinité. Or il en a au moins une : $b_1 = b_2 = \dots = b_r = 0$. Donc il a une infinité d'autres solutions, et puisque ces solutions sont différentes, au moins un des coefficients b est différent de 0.

On en déduit le théorème et la définition suivants:

Propriété -11 : si un espace vectoriel (ne possédant pas que le vecteur nul) est engendré par un nombre fini de vecteurs, alors il possède des bases, et celles-ci ont toutes le même nombre de vecteurs

Définition - 13 : DIMENSION
a Si un espace vectoriel possède une base finie, le nombre de vecteurs de cette base est appelé la **dimension de l'espace vectoriel** considéré. D'après le théorème précédant toute autre base de cet espace aura le même nombre de vecteurs
b L'espace vectoriel formé du seul vecteur nul ne possède pas de base . On pose, par définition, que **sa dimension est 0**.

Démonstration de la propriété 11 :

a) supposons que l'espace vectoriel soit engendré par $(X_1, X_2, \ldots X_r)$. Montrons qu'on peut construire une base.
Si $(X_1, X_2, \ldots X_r)$ est libre, c'est une base.
Sinon, il y a au moins 1 des r vecteurs qui est engendré par les autres. Les (r-1) autres engendrent donc tout l'espace. Ils forment une famille génératrice de (r-1) vecteurs. On peut réitérer ce procédé, ôter un vecteur tant qu'on n'obtient pas une famille libre, et en au plus (r-1) étape – car un vecteur non nul seul forme une famille libre – on obtient une famille génératrice et libre , donc une base.

b) soient $B = (X_1, X_2, \ldots X_n)$ et $B' = (Y_1, Y_2, \ldots Y_p)$ deux bases, donc deux systèmes générateurs libres. Donc, en particulier, B est un système générateur et B' est un système libre, et d'après le lemme $p \leq n$. Mais on peut dire aussi que B' est générateur et que B est libre, donc que $n \geq p$. Donc $n = p$.

Propriété -12 *:*Dans un espace vectoriel V de dimension n,
1) toute famille libre de V a au plus n éléments
2) toute famille génératrice de V a au moins n éléments
2) toute famille libre de V, de n éléments, est une base de V
3) toute famille génératrice de V, de n éléments, est une base de V
4) Si S est une famille de vecteurs de V , alors $\dim\langle S\rangle = \text{rang } S$

Exemple 12 *:* Dans l'espace vectoriel des vecteurs du plan, la dimension est 2. On peut en déduire que :

- Toute famille génératrice a au moins 2 éléments
- Toute famille libre en a au plus 2 (à partir de 3, au moins l'un d'eux est combinaison linéaire des autres)
- Si vous connaissez une famille libre de 2 vecteurs, alors puisque la dimension de l'espace est 2, vous pouvez en déduire que cette famille est une base : elle est donc aussi génératrice.

Cas particuliers importants:

1) Dans $\mathbb{R}^3$, la dimension est 3 (car la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est faite de 3 vecteurs). Donc toute famille libre de 3 vecteurs est aussi une base . On peut donc justifier le résultat du paragraphe précédent : Dans $\mathbb{R}^3$, le déterminant d'une famille de 3 vecteurs est différent de 0 si et seulement si cette famille est une base de $\mathbb{R}^3$ (c'est -à-dire un famille libre et génératrice)

2) de la même façon , dans $\mathbb{R}^2$, le déterminant d'une famille de 2 vecteurs est différent de 0 si et seulement si cette famille est une base de $\mathbb{R}^2$.

De façon générale, pour tout n entier naturel, il existe un déterminant défini pour toute famille de n vecteurs (hors programme cette année, mais vous pourrez le rencontrer dans le futur) . Il est différent de 0, si et seulement si la famille est une base de $\mathbb{R}^n$.
Une propriété fort utile *:* A démontrer en exercice.

Propriété -13: inclusion, égalité, et dimension.
a) Si W est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel V de dimension finie , alors :
$$\dim W \leq \dim V$$
b) Si W est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel V de dimension finie et dim W = dim V, alors
$$W = V$$

Propriétés -14: rang et dimension Pour tout système $S = \{X_1, X_2, \ldots X_p\}$ de p vecteurs d'un espace vectoriel V de dimension n, on a les propriétés suivantes:

*rang $S \leq n$
*(rang $S = n$) $\Leftrightarrow$ (S est un système générateur de V)
*(rang $S= n$ et $p =n$) $\Leftrightarrow$ (S est une base de V)
*(rang $S = n$ et $p \geq n$) $\Leftrightarrow$ (on peut extraire de S une base de V)

Propriété -15. Théorème de la base incomplète.
Si S est un système de vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n
et si rang S = r, avec $r<n$
alors on peut construire une base de V contenant r vecteurs de S

Autrement dit, puisque S est de rang r, S contient r vecteurs $X_1, X_2, \dots X_r$ indépendants. Ces r vecteurs forment un système libre qui peut être ***complété*** par (n-r) vecteurs pour former une base de V : $(X_1, X_2, \dots, X_r, e_1, e_2, \dots e_{n-r})$

Démonstration en exercice. Montrer d'abord que si $(u_1, u_2, \dots u_k)$ est une famille libre et v n'est pas combinaison linéaire de $u_1, u_2, \dots u_k$, alors $(u_1, u_2, \dots u_k, v)$ est une famille libre. Montrer ensuite qu'on peut compléter une famille libre en prenant des vecteurs dans une quelconque des bases de l'espace vectoriel.

Voici un théorème qui permet (en utilisant les notions de rang et noyau d'une application linéaire) de justifier la méthode de Gauss :

Propriété -16: le rang d'un système de vecteurs $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ reste inchangé si l'on remplace un des vecteurs X_i par une combinaison linéaire de la forme $\alpha X_i + \beta X_j$ avec $\alpha \neq 0$ et X_j vecteur du système différent de X_i

Démonstration :

Soient $S = (X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_P)$ et $S' = (X_1, X_2, \dots, \alpha X_i + \beta X_j, \dots, X_p)$.

Notons $\langle S \rangle$ et $\langle S' \rangle$ les sous-espaces vectoriels engendrés par S et S' .On a donc dim $\langle S \rangle$ = rangS et dim $\langle S' \rangle$ = rangS '.Pour montrer ce théorème il nous suffit donc de montrer que $\langle S \rangle = \langle S' \rangle$.

Si $X \in \langle S \rangle$, $X = a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_iX_i + \dots + a_iX_i + \dots + a_nX_n$ et puisque $\alpha \neq 0$

$X = a_1X_1 + \dots + (\alpha X_i + \beta X_j) + \dots + (a_j - \ ) X_j + \dots + \alpha_n X_n$

X appartient donc à $\langle S' \rangle$ et on a montré que $\langle S \rangle \subseteq \langle S' \rangle$.

Réciproquement si $Y \in \langle S' \rangle$, alors $Y = b_1X_1 + \dots + b_i(\alpha X_i + \beta X_j) + \dots + b_j X_j + \dots + b_nX_n$.

soit $Y = b_1X_1 + \dots + b_i\alpha X_i + \dots + (\beta b_i + b_j) X_j + \dots + b_nX_n$ donc $Y \in \langle S \rangle$ et $\langle S' \rangle \subseteq \langle S \rangle$

Donc $\langle S \rangle = \langle S' \rangle$ et le théorème est montré.

Exercice -11 :Soient $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x + 2y = 0 \}$ et $B = \{(a+b,b,b-a)$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \}$

1. Montrer que A et B sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
2. Trouver un système générateur de A et un système générateur de B.
3. Une autre façon de trouver un système générateur de B:
   a) montrer que $(2;1;0) \in B$ et $(0;1;2) \in B$.
   b) montrer que dim B < 3
   c) montrer que dim B = 2
   d) montrer que $B = \langle (2;1;0) , (0;1;2) \rangle$
4. Montrer que (2, 1, 0) appartient à B.
5. Donner les coordonnées de (2, 1, 0) en tant que vecteur de $\mathbb{R}^3$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$,
6. et puis les coordonnées de ce même vecteur, en tant que vecteur de B, dans la base de B