université PARIS-SACLAY
FACULTÉ JEAN MONNET
DROIT-ÉCONOMIE-GESTION

Licence Economie gestion 1ère année. Cours de mathématiques 1 de P.Beau Chapitre 4- Accroissements finis et développements limités.

1 Accroissements finis

Le nombre dérivé décrit un accroissement infiniment petit d'une fonction résultant d'un accroissement infiniment petit de la variable. On s'intéresse ici à un **accroissement** de la variable qui n'est **pas infiniment petit**. La fonction dérivée intervient à nouveau.

Théorème de ROLLE. Théorème 1.

Si a,b sont deux nombres réels distincts, f une fonction: $x \in [a; b] \mapsto f(x)$ définie et continue sur [a;b], dérivable sur]a;b[et telle que $f(a) = f(b)$,
alors il existe au moins une valeur c de l'intervalle ouvert]a;b[qui vérifie $f'(c) = 0$.

Démonstration: si f est constante sur [a,b] , alors pour tout c de]a,b[$f'(c) = 0$.
Supposons f non constante.

Puisque f est continue, l'image par f de l'intervalle [a; b] est un intervalle. De plus, (propriété admise) l'image par une fonction continue d'un intervalle fermé est un intervalle fermé (attention, en revanche il n'y a pas de propriété analogue pour des intervalles ouverts).
Il existe donc m et M réels tels que f([a,b]) = [m,M] et il existe donc c1 et c2 tels que f(c1)=m et f(c2)=M.
Or f est non constante, et f(a) = f(b). Donc au moins un des 2 nombres m,M est différent de f(a).

Si $M \neq f(a)$, f atteint son maximum M en c2 de]a;b[, donc f '(c2)=0.

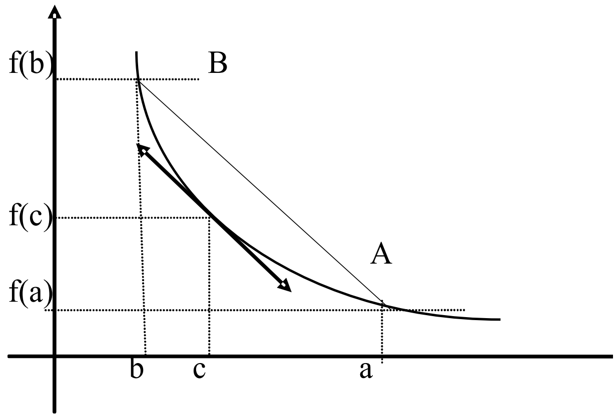
Si $m \neq f(a)$, f atteint son minimum m en c1 de]a;b[, donc f '(c1)=0

Théorème 2, des accroissements finis

Si une fonction $f : x \in [a;b] \mapsto f(x)$ est définie et continue sur le segment [a;b] , dérivable sur l'intervalle]a;b[, il existe alors au moins une valeur c de]a;b[telle que : ***f (b) - f(a) = (b - a) f ' (c)***

Interprétation géométrique de ce théorème:

Le théorème indique qu'il existe un nombre c de]a ; b[pour lequel la tangente en (c, f(c)) à la courbe est parallèle à la droite passant par A (a, *f*(a)) et B (b, *f* (b)),
car f ' (c) , coefficient directeur de cette tangente est égal à $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$,
coefficient directeur de la droite (AB)



Démonstration : il suffit d'appliquer le théorème de Rolle à la fonction Φ définie ainsi :

$\Phi(x) = f(x)-(x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}+f(a)$, après avoir vérifié que toutes les hypothèses du théorème sont satisfaites.

2 Développements limités de fonctions d'une variable réelle

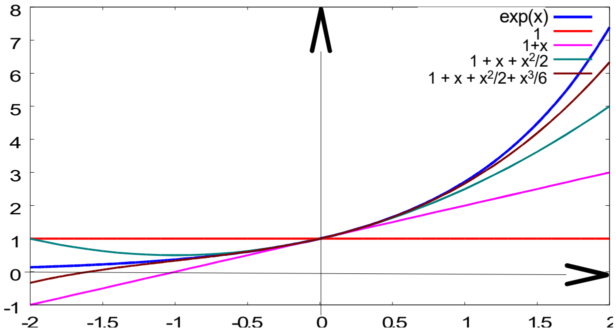
2.1 Développements limités

Exemple 1 Des approximations successives de exp(x).

- Posons r_0(x) = exp(x) – 1. On a alors $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{r_0(x)}{1}\right)=\lim\limits_{x\to 0}(e^x-1)=\lim\limits_{x\to 0}(e^x)-1=1-1=0$ donc

  exp(x) = 1 + r₀(x) avec $\boldsymbol{r_0(x)\underset{0}{\ll}1}$.

  La constante 1 est donc, parmi les constantes, l'approximation la plus raisonnable de exp(x) au voisinage de x=0: ce qui lui manque pour être égale à exp(x) est, au voisinage de x=0, un infiniment petit devant elle.



- Posons r_1(x) = exp(x) – 1 – x. On a alors

  $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{r_1(x)}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1-x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}-1\right)=1-1=0$

  Donc **exp(x) = 1 +x +** $\boldsymbol{r_1}$**(x)** avec $\boldsymbol{r_1(x)\underset{0}{\ll}x\underset{0}{\ll}1}$.

  Le polynôme 1+x est donc, parmi les polynômes de degré 1, l'approximation la plus raisonnable de exp(x) : ce qui lui manque pour être égal à exp(x) est , au voisinage de 0, infiniment petit devant chacun de ses 2 termes.

- On peut ensuite montrer que $\boldsymbol{\exp(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+r_2(x)}$ avec $\boldsymbol{r_2(x)\underset{0}{\ll}x^2\underset{0}{\ll}x\underset{0}{\ll}1}$,

  puis que $\boldsymbol{\exp(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+r_3(x)}$ avec $\boldsymbol{r_3(x)\underset{0}{\ll}x^3\underset{0}{\ll}x^2\underset{0}{\ll}x\underset{0}{\ll}1}$

On obtient ainsi 4 polynômes qui forment des approximations de plus en plus fines de exp(x) au voisinage de x=0 : à chaque étape on a ajouté un terme infiniment petit devant les précédents, et qui permet d'approcher plus précisément exp(x).

Remarquons enfin que, en posant $\varepsilon(x)=\frac{r_n(x)}{x^n}$, $r_n(x)\underset{0}{\ll}x^n$ est équivalent à $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$ et

$\exp(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+r_n(x)$ s'écrit aussi

$$\exp(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+x^n\varepsilon(x)$$

l'expression à droite de cette égalité esr appelée un **développement limité de exp(x)**, **à l'ordre n, au voisinage de x = 0.**

De façon générale, pour une fonction *f* définie sur un intervalle ouvert contenant 0 :

Définition 1. Développement limité d'une fonction au voisinage de 0.

On considère une fonction *f* définie sur un intervalle ouvert I contenant 0 ou borné par 0. S'il existe n nombres fixes $a_1, a_2, \ldots a_n$ et une fonction $\varepsilon: x\longmapsto\varepsilon(x)$ satisfaisant à :

$\forall x\in \mathrm{I}\quad f(x)=a_0+a_1x^1+\ldots+a_nx^n+x^n\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$, alors cette expression est nommée ***développement limité de f, d'ordre n au voisinage de 0.***

$a_0+a_1x^1+\ldots+a_nx^n$ s'appelle ***la partie régulière*** du Développement Limité et $x_n\,\varepsilon(x)$ est le ***reste*** de ce développement limité.

Définition 2. Développement limité d'une fonction au voisinage d'un nombre x_0 .

On considère une fonction f définie sur un intervalle ouvert contenant un nombre x_0 , ou borné par un nombre x_0. On note pour tout nombre x, h la différence entre $x - x_0$.
S'il existe n nombres fixes $a_1, a_2, \dots a_n$ et une fonction $\varepsilon : x \longmapsto \varepsilon(x)$ satisfaisant à :
(pour tout $x = x_0 + h$ de I) $f(x_0 + h) = a_0 + a_1 h^1 + a_2 h^2 \dots + a_n h^n + h^n \varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$, alors cette expression est nommée ***développement limité de f, d'ordre n au voisinage de x_0***

Exemple 2
Reprenons le développement limité au voisinage de 0 , à l'ordre 3, de la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \exp(x)$, exposé à l'exemple 1 :

$$(pour\ tout\ x\ de\ \mathbb{R})\ \exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

On a donc , pour tout h de $\mathbb{R}$:

$$\exp(4 + h) = e^4 \times \exp(h) = e^4 (1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + h^3 \varepsilon(h)) = e^4 + e^3 h + \frac{e^4}{2} h^2 + \frac{e^4}{6} h^3 + h^3 \times e^4 \varepsilon(h)$$

$$= e^4 + e^4 h + \frac{e^4}{2} h^2 + \frac{e^4}{6} h^3 + h^3 \varepsilon_2(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h \to 0} \varepsilon_2(h) = 0 \quad \text{, en posant} \quad \varepsilon_2(h) = e^4 \varepsilon(h)$$

.
Ceci est un **développement limité à l'ordre 3, au voisinage de $x = 4$, de la fonction exp.**

2.2 Obtenir un développement limité par la formule de Taylor-Young

Théorème 3.Formule de Taylor et Young. Si une fonction f admet des dérivées jusqu'à l'ordre n en x_0, alors il existe un intervalle V, ouvert contenant 0 tel que :

$(\forall\ h \in V)$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{h}{1} f'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \frac{h^3}{(2 \times 3)} f'''(x_0) \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + h^n \varepsilon(h)$$

avec $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$

$n!$ (factorielle de n) signifie $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n$
Si f admet des dérivées à droite (respectivement : à gauche), jusqu'à l'ordre n, en x_0 , on a une propriété analogue en remplaçant V ouvert par V ouvert à droite (respectivement : à gauche).

Exemple 3 Posons f : $x \in \mathbb{R} \mapsto \exp(x)$. Calculer $f(0), f'(0), f''(0), f'''(0)$ et en déduire le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de f, indiqué à l'exemple 1.
Exemple 4 Posons pour tout x de]-2, + ∞[, w(x) = ln(2+x) . Trouver un développement limité de w , à l'ordre 2 au voisinage de x = 0, à l'aide de laformule de Taylor et Young.
Exemple 5 Posons pour x de] - ∞ , 1 [U] 1, + ∞[, $g(x) = \frac{1}{1-x}$.
a) Calculer pour tout x de $\mathbb{R}$, $(1-x)(1+x+x^2)$, puis $(1-x)(1+x+x^2)+x^3$. En déduire un développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de $g(x)$.
b) Appliquer la formule de Taylor-Young à g , au voisinage de 0, à l'ordre 2, et retrouver le développement limité précédent.

Comme il apparaît à l'exemple 4, la formule de Taylor-Young est un moyen usuel pour déterminer des développements limités mais il peut y avoir d'autres méthodes .

2.3 Opérations simples sur les développements limités

Etant données les parties régulières (PR) des développements limités d'ordre n de deux fonctions f et g au voisinage de x_0 , on a:

- f + g admet un dév. limité d'ordre n au voisinage de x_0 et PR (f +g) = PR (f) + PR(g)
- f.g admet un dév.limité d'ordre n au voisinage de x_0 et PR (f.g) = $(PR(f).PR(g))_n$

où $PR(f).PR(g))_n$ désigne le produit des 2 polynômes de degré n dans lequel on ne garde que les termes de degré inférieur ou égal à n.

$\frac{f}{g}$ admet un D.L. d'ordre n au voisinage de x_0 si $g(x_0) \neq 0$ et PR ($\frac{f}{g}$) = $\left(\frac{PR(f)}{PR(g)}\right)_n$,

quotient des 2 polynômes PR(f) et PR(g) dans la **division suivant les puissances croissantes** quand on s'arrête au degré n.

Exemple 6 : Supposons que $f(x) = 6 + 13x - 2x^2 + x^2 \varepsilon_1(x)$ et $g(x) = 2+5x+2x^2+x^2 \varepsilon_2(x)$

Avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon_1(x) = \lim_{x \to 0} \varepsilon_2(x) = 0$

$$\begin{array}{rrrrr|rrr}
6 & +13x & -2x^2 & & & 2 & +5x & +2x^2 \\ \cline{6-8}
-(6 & +15x & +6x^2) & & & 3 & -x & -3x^2/2 \\
 & -2x & -8x^2 & & & & & \\
 & -(-2x & -5x^2 & -2x^3) & & & & \\
 & & -3x^2 & +2x^3 & & & & \\
 & & -(-3x^2 & -15x^3/2 & -3x^4) & & & \\
 & & & 19x^3/2 & +3x^4 & & &
\end{array}$$

Alors $f(x)/g(x) = 3-x-3x^2/2 + x^2 \varepsilon_3(x)$ avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon_3(x) = 0$

2.4 Dérivation et intégration d'un développement limité

Théorème 4

si la fonction f est dérivable sur un voisinage de x_0 et si f' admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0, alors la fonction f admet au voisinage de x_0 un développement limité d'ordre n+1 dont la partie régulière est la primitive de celle de f' qui prend la valeur $f(x_0)$ en x_0.

Théorème 5

si f est une fonction dérivable au voisinage de $x0$ et si f et f' admettent des développements limités d'ordres respectifs n et n - 1 au voisinage de 0, alors PR(f') est la dérivée de PR (f).

Attention ce théorème n'indique rien dans le cas où vous ne savez pas si f' admet un dév. limité

2.5 Développements limités usuels

Voici les principaux développements limités à connaître. Ce sont des développements limités au voisinage de 0, et dans chacun d'eux ε désigne une fonction définie sur un voisinage de 0 et satisfaisant à $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x)$. A chaque ligne la fonction désignée par ε est évidemment différente de celles des autres lignes.

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + x^n\varepsilon(x)$.

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + x^n \varepsilon(x)$

$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2} x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{2 \times 3} x^3 + ... + \frac{k(k-1)(k-2)...(k-n+1)}{n!} x^n + x^n\varepsilon(x)$ ($k \in \mathbb{R}$)

$e^x = 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+...+\frac{x^n}{n!}+x^n\,\varepsilon(x)$ (rappel : $n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times...\times2\times1$)

$\sin x = x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{5!}+...+(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + 0x^{2k+2} + x^{2k+2}\,\varepsilon(x)$

$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+...+(-1)^k\frac{x^{2k}}{2k!}+0x^{2k+1}+x^{2k+1}\varepsilon(x)$

La plupart de ces D.L. peuvent être obtenus à partir de la formule de Taylor-Young, ou en prenant des primitives d'autres D.L. On pourra le montrer en exercice.

Exemples de calculs de développements limités:

Exemple 7 Déterminer le développement limité, **à l'ordre 2** au voisinage de ***x*= 0** , de **exp(*x*)**.

Il suffit d'appliquer la formule, en posant n = 2.

$$\exp(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon_1(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to0}(\varepsilon_1(x))=0$$

Exemple 8 Déterminer le développement limité, **à l'ordre 3** au voisinage de ***x* = 0**, de **exp (2*x*)**.
L'expression exp (2 *x*) n'est pas dans la liste des développements usuels, mais nous pouvons **poser *t* = 2*x*** : exp (2 *x*) est égale à exp (*t*) et $\lim_{x\to0}(t)=\lim_{x\to0}(2x)=0$. Le développement limité de exp (*t*) au voisinage de *t* = 0 s'applique donc:

$$\exp(2x)=\exp(t)=1+t+\frac{t^2}{2}+t^2\varepsilon_1(t) \quad \text{, avec} \quad \lim_{t\to0}(\varepsilon_1(t))=0 \quad .$$

d' où $\mathbf{\exp(2x)}=1+2x+\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^3}{6}+(2x)^3\varepsilon_1(2x)$

$$= 1+2x+2x^2+\frac{8}{6}x^3+x^3\varepsilon_2(x) = \mathbf{1+2x+2x^2+\frac{4}{3}x^3+x^3\varepsilon_2(x)}$$

On a défini $\varepsilon_2(x)$ par $(2x)^3\varepsilon_1(2x)=8x^3\varepsilon_1(2x)=x^3\varepsilon_2(x)$, c'est-à-dire $\varepsilon_2(x)=8\varepsilon_1(2x)$, cette expression a pour limite 0 au voisinage de *x*= 0 .

Exemple 9 Déterminer le même développement limité, **à l'ordre 3** au voisinage de ***x* = 0**, de **exp (2*x*)**, à l'aide de la formule de Taylor et Young.
Posons pour tout *x* de ℝ , g (*x*) = exp(2 *x*) .
g est dérivable 3 fois sur ℝ, et

g (0) = exp(0) = 1,
pour tout *x* de ℝ, g ' (*x*) = 2 exp (2x) donc g ' (0) = 2,
pour tout *x* de ℝ, g '' (*x*) = 4 exp (2x) donc g '' (0) = 4,
pour tout *x* de ℝ, g ''' (*x*) = 8 exp (2x) donc g ''' (0) = 8.

Donc, d'après la formule de Taylor et Young,

$$\exp(2x)=\underbrace{1}_{g(0)}+\underbrace{2}_{g'(0)}\times x+\underbrace{4}_{g''(0)}\frac{x^2}{2}+\underbrace{8}_{g'''(0)}\times\frac{x^3}{6}+x^3\varepsilon(x) \quad \text{, avec} \quad \lim_{x\to0}\varepsilon(x)=0 \quad ,$$

d'où $\exp(2x)=1+2x+2x^2+\frac{4}{3}x^3+x^3\varepsilon(x)$, avec $\lim_{x\to0}\varepsilon(x)=0$.

Exemple 10 Déterminer le développement limité, à l'ordre 2 au **voisinage de x = 3** , de **exp(x).**

Il s'agit d'abord de poser **x = 3 + h** , ou encore h = x – 3 . On a alors $\lim_{x\to 3}(h)=0$.

D'autre part, $\exp(x)=\exp(3+h)=\exp(3)\times\exp(h)$.

On peut alors utiliser le développement limité de exp (*h*) , à l'ordre 2, au voisinage de *h* = 0.

$$\exp(x)=\exp(3+h)=e^3\left(1+h+\frac{h^2}{2}+h^2\varepsilon_1(h)\right) \quad \text{avec} \quad \lim_{h\to 0}\varepsilon_1(h)=0 \ .$$

D'où $\boldsymbol{\exp(x)=\exp(3+h)=e^3+h\,e^3+h^2\frac{e^3}{2}+h^2\varepsilon_2(h)}$ avec $\lim_{h\to 0}\varepsilon_2(h)=0$ (ici $\varepsilon_2(h)=e^3\varepsilon_1(h)$)

Exemple 11 Attention à une erreur fréquente !

On cherche à établir un développement limité à l'ordre 2 de x ∈]-2, +∞[↦ ln(2+x), au voisinage de x = 0.
Le raisonnement suivant est FAUX ! Trouver l'erreur et établir un raisonnement correct :

« ln(2+x) = ln(1 + 1 +x) = ln(1+ u) en posant u = 1+x
d'où ln(2+x) = u - u^2 + u^2 ε (u) avec $\lim_{u\to 0}\varepsilon(u)$,
d'où ln(2+x) = 1+x -$(1+x)^2$ + x^2 ε_1 (x) avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon_1(x)=0$,
donc ln(2+x) = - x^2 + x^2 ε_1 (x) avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon_1(x)=0$ »

2.6 Application au calcul des limites

Les D.L. permettent de faire une approximation d'une fonction par un polynôme.

Cela permet en particulier de simplifier de nombreux calculs de limites et lever des indéterminations. Rappelons que si l'on peut utiliser des équivalents pour des produits et des quotients de fonctions, on ne peut pas les utiliser dès que des additions interviennent. Seuls les développements limités sont utilisables pour toutes les opérations.

Résolvons à titre d'exemple les exercices suivants:

Exemple 12 Trouver $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\exp(x)+x}{x^2}\right)$.

Solution : numérateur et dénominateur tendent vers 0, c'est une forme *a priori* indéterminée. Levons cette indétermination.

Il existe un développement usuel de exp(*x*) au voisinage de 0, utilisons le :

$$\exp(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+x\,\varepsilon_1(x) \quad \text{, avec} \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon_1(x)=0 \ ,$$

$$\text{d'où} \quad 1-\exp(x)+x \;=\; 1\underbrace{-1-x-\frac{x^2}{2}}_{\textit{ceci est } \exp(x)}-x^2\varepsilon_1(x)+x$$

$$=\frac{-x^2}{2}-x^2\varepsilon_1(x) \ ,$$

$$\text{d'où} \quad \frac{1-\exp(x)+x}{x^2}=\frac{-x^2/2-x^2\varepsilon_1(x)}{x^2}$$

$$=-1/2-\varepsilon_1(x)$$

$$\text{Donc} \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\exp(x)+x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(-1/2-\varepsilon_1(x)\right)=-\frac{1}{2}$$

Exemple 13 Trouver $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\exp(2x)+2x}{x^2}\right)$.

Un développement limité de exp(2x) au voisinage de x = 0, à l'ordre 3, a été établi aux exemples 8 et 6.

$\exp(2x) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)$, avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$, d'où

$1 - \exp(2x) + 2x = 1 - 1 - 2x - 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x) + 2x$

$= -2x^2 + 4x^3/3 + x^3\varepsilon(x)$, d'où

$\frac{1-\exp(2x)+2x}{x^2} = -2 + 4x/3 + x\varepsilon(x)$, avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$, d'où

$\mathbf{\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\exp(2x)+2x}{x^2}\right)} = \lim_{x\to 0}\left(-2 + 4x/3 + x\varepsilon(x)\right) = -2 + 0 + 0 = \mathbf{-2}$

a)

Exemple 14 Trouver $\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 2x)\sin^3 x}{x^4\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)}$

Solution :

Numérateur et dénominateur tendent vers 0 et nous avons affaire à une forme indéterminée. Utilisons les développements limités des fonctions en présence:

Dans le paragraphe suivant, les fonctions $\boldsymbol{\varepsilon_i}$ ont toutes 0 pour limite en 0.

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_1(x)$, d'où $\cos(2x) = 1 - 2x^2 + x^2\varepsilon_2(x)$, donc $1 - \cos 2x = 2x^2 + x^2\varepsilon_3(x)$.

$\sin x = x + x\varepsilon_4(x)$ d'où $\sin^3 x = x^3 + x^3\varepsilon_5(x)$

$\ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = -\ln(1-x) = -(-x + x\varepsilon_6(x)) = x + x\varepsilon_6(x)$.

Donc: $\frac{(1-\cos 2x)\sin^3 x}{x^4\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)} = \frac{(2x^2 + x^2\varepsilon_2(x))(x^3 + x^3\varepsilon_3(x))}{x^4(x + x\varepsilon_6(x))} = \frac{2x^5 + x^5\varepsilon_7(x)}{x^5 + x^5\varepsilon_6(x)} = \frac{2 + \varepsilon_7(x)}{1 + \varepsilon_6(x)}$

et $\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 2x)\sin^3 x}{x^4\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)} = \frac{2}{1} = 2$

Exemple 15 Donner un infiniment petit équivalent à y = $e^{2x+2} - 4\sqrt{6+2x} + 7$ lorsque x tend vers -1.

Solution : posons tout d'abord $x = -1 + h$ pour se ramener à un voisinage de 0.

$e^{2x+2} = e^{2h} = 1 + 2h + \frac{4h^2}{2} + h^2\varepsilon_1(h)$.

$\sqrt{6+2x} = \sqrt{4+h} = \sqrt{4\left(1+\frac{h}{2}\right)} = 2\sqrt{1+\frac{h}{2}} = 2\left(1+\frac{h}{2}\right)^{1/2}$

$= 2\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{h}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}\right)\frac{(h/2)^2}{2} + h^2\varepsilon_2(x)\right)$

$= 2 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{16} + h^2\varepsilon_2(h)$

d ' où $y = (1 + 2h + 2h^2) - 4\left(2 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{16}\right) + 7 + h^2\varepsilon_1(h) - h^2\varepsilon_2(h)$

d'où $y = \frac{9}{4}h^2 + h^2\varepsilon_3(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon_3(x) = 0$

Soit $y \underset{h\to 0}{\sim} \frac{9}{4}h^2$, ou encore $y \underset{x\to -1}{\sim} \frac{9}{4}(x+1)^2$.

On remarque que l'on a développé à l'ordre 2 car les termes de degré 1 s'annulent.

Exercice : trouver $\lim_{x \to 0} (\cos x)^{1/x^2}$

3 Développements limités à l'ordre 2 pour des fonctions numériques de deux variables réelles

Nous nous limiterons aux développements limités d'ordre 2

On dit qu'une fonction f de 2 variables admet un développement limité d'ordre 2 au voisinage de (x_0,y_0) s'il existe un ensemble ouvert contenant (0,0) tel que pour tout (u,v) de cet ensemble,

$$f(x_0+u, y_0+v) = \underbrace{P(u,v)}_{\textit{Polynôme de degré 2}} + \underbrace{(u^2+v^2)\varepsilon(u,v)}_{\textit{Reste}}$$

où P(u,v) est un polynôme des deux variables u et v, de degré 2, c'est-à-dire que

$$P(u,v) = \alpha u^2 + \beta v^2 + \gamma uv + \delta u + \theta v + \varphi$$

et ε (u,v) est une fonction de 2 variables telle que $\lim_{(u,v) \to (0,0)} \varepsilon(u,v) = 0$

C'est-à-dire que le reste est un infiniment petit devant u, v, u^2, et v^2.

Théorème *6*: formule de Taylor à l'ordre 2 pour une fonction de 2 variables

Si une fonction f de 2 variables est définie et a des dérivées partielles secondes continues sur un voisinage convexe —la définition d'un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^2$ est donnée au chapitre 8—de (x_0, y_0), alors :

$$f(x_0+u, y_0+v) = f(x_0, y_0) + u\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + v\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$
$$+ \frac{1}{2}\left(u^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + v^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2uv\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\right) + (u^2+v^2)\varepsilon(u,v)$$

avec $\lim_{(u,v) \to (0,0)} \varepsilon(u,v) = 0$

Cette formule permet de trouver des développements limités, mais on peut aussi utiliser les développements limités usuels, en sachant que tout terme $u^k v^j$ est, au voisinage de (0,0), infiniment petit devant u^2+v^2 dès que $k+j \geq 2$

Exemple 16 : donner un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de (0 ;0) de sin(x+y) + x ln(1+2y)