université PARIS-SACLAY
FACULTÉ JEAN MONNET
DROIT-ÉCONOMIE-GESTION

Licence Economie gestion 1ère année.
2024 2025.

Cours de mathématiques 1 de P.Beau

Chapitre 3 - Dérivée, primitive, différentielle. Première partie.

3.1 Taux d'accroissement

Soient deux variables x et y dépendant l'une de l'autre. Par exemple y est une production obtenue par un nombre d'heures de travail x.

Pour une valeur x_{initial} d'x on observe une valeur y_{initial} d'y. Pour une valeur x_{final} d'x on observe une valeur y_{final} d'y.

Définition 1

Le **taux d'accroissement** d'y par rapport à x entre ces 2 valeurs est :

taux d'accroissement = $\dfrac{y_{final}-y_{initial}}{t_{final}-t_{initial}}=\dfrac{variation\ \ d'y}{variation\ \ d'x}$. On note habituellement une variation entre 2 valeurs par la lettre grecque Delta Δ . Le taux d'accroissement se note alors : taux d'accroissement = $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

Si y est une fonction d' x , $y=f(\text{x})$, alors **le taux d'accroissement de f entre x_{initial} et x_{final}** est

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_{final})-f(x_{initial})}{x_{final}-x_{initial}} .$$

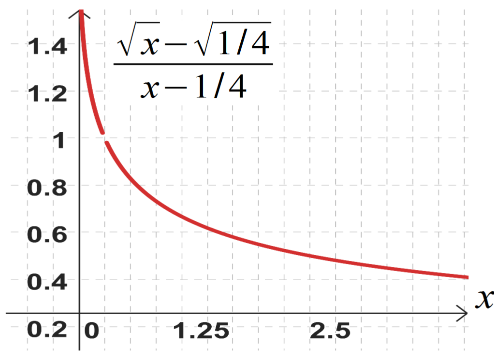
Par exemple, si $f(x)=x^2$, $x_{\text{initial}}=1$, $x_{\text{final}}=3$, alors $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\dfrac{3^2-1^2}{3-1}=\dfrac{8}{2}=4$

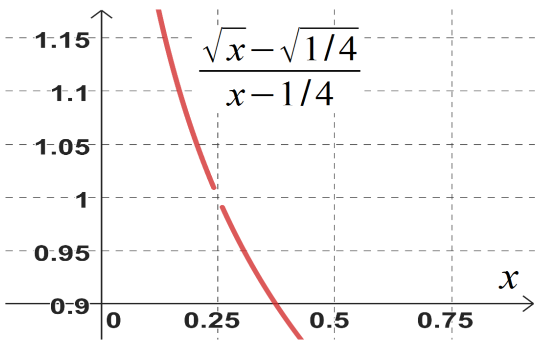
3.2 Nombre dérivé

Exemple 1

Considérons la fonction $\sqrt{\ }$. Son **taux d'accroissement** entre $\dfrac{1}{4}$ et une valeur x de $]0,+\infty[$ s'exprime ainsi :

$$\frac{\Delta\sqrt{}}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{1/4}}{x-1/4} \text{ , ou encore } \frac{\sqrt{x}-1/2}{x-1/4} .$$





Voilà une **représentation graphique de ce taux d'accroissement.** Attention ce n'est pas une représentation graphique de la fonction $\sqrt{}$!

La voici agrandie autour du point d'abscisse $x = 1/4$.

Pourquoi la courbe est-elle interrompue ? **Le taux est-il défini en *¼ ?* Que devient-il lorsque *x* s'approche de ¼ ?**

3.2.1 Limite d'un taux d'accroissement, pour un accroissement de la variable s'approchant de 0.

Il arrive couramment – mais ce n'est pas obligatoire – qu'en fixant une valeur x_0 d'x et observant $f(x)$ sur des valeurs de plus en plus proches d'x_0 ,

le taux d'accroissement $\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ **s'approche aussi près qu'on veut d'un nombre fixe *m* , dès lors qu'on se restreint à des valeurs *x* suffisamment proches de x_0 .**

Une définition plus précise sera donnée au chapitre suivant, limites de fonctions. On emploiera la notation suivante :

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)=m$$

Dans l'exemple 1 , le graphique semble indiquer que $\lim_{x\to 1/4}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{1/4}}{x-1/4}\right)=1$. Cette égalité sera prouvée à l'exemple 2 en dessous.

3.2.2 Définition du nombre dérivé

Définition 2

Si

- $$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)=m$$
- c'est-à-dire que le taux d'accroissement, entre une valeur fixée x_0 et une autre x, s'approche d'un nombre fixe m avec n'importe quelle précision , aussi fine soit-elle, du moment qu'on restreint *f* à des valeurs assez proches de *x*.

Alors m est appelé le **nombre dérivé de f en x_0** et est noté $f'(x_0)$:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right) \qquad =\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}$$

En notant *h* la quantité $x - x_0$, cela s'écrit aussi $f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

<u>**Notation différentielle:**</u> $f'(x_0)$ se note aussi $\frac{df}{dx}(x_0)$

Exemple 2: Calcul du nombre dérivé en ¼ de la fonction racine carrée.
Pour tout *x* nombre de [0, 1/4[U]1/4, + ∞[, le taux d'accroissement de la fonction racine carrée entre ¼ et *x* est :

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{1/4}}{x-1/4}$$

Avant de chercher si cette expression s'approche d'une valeur fixe lorsque *x* s'approche de ¼, on peut déjà s**e faire une idée** d'une limite évnetuelle – attention <u>**ce n'est pas une preuve !**</u> – en traçant son graphe autour de l'abscisse ¼ , ou bien en l'évaluant pour quelques valeurs d'*x* que l'on juge – c'est très subjectif – proche de ¼.

- Le graphe a été construit à l'exemple 1 et il semble indiquer que, lorsque *x* s'approche de ¼, cette expression s'approche de 1
- Voici quelques valeurs numériques qui **semblent** cohérentes avec cette limite :

x	0,23	0,24	0,2499	0,2501
$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{1/4}}{x-1/4}$	1,0208	1,0102	1,0001	0,9999

Voici **la preuve** que cette expression a pour limite 1 en ¼.

$$\underbrace{\frac{\sqrt{x}-\sqrt{1/4}}{x-1/4}}_{taux\ d'accroissement\ entre\ 1/4\ et\ x} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{1/4}}{\sqrt{x}^2-(1/2)^2} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{1/4}}{(\sqrt{x}-1/2)(\sqrt{x}+1/2)} = \frac{\sqrt{x}-1/2}{(\sqrt{x}-1/2)(\sqrt{x}+1/2)}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{x}+1/2)}$$

Donc lorsque x s'approche de ¼ , $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{1/4}}{x-1/4}$ **s'approche de** $\frac{1}{(\sqrt{1/4}+1/2)} = \frac{1}{(1/2+1/2)} = \frac{1}{1} = \mathbf{1}$

Exemple 3: **Un autre exemple de calcul du nombre dérivé d'une fonction en 1 point à l'aide d'une limite**

Prenons f définie sur tout ℝ par : $f(x) = x^2$, et $x_0 = 3$: $f(x) = x^2$, $f(3) = 9$.

Cherchons $f'(3)$.
Bien sûr , la méthode la plus simple consisterait à utiliser les formules de dérivation d'une fonction polynôme, puis de remplacer x par 3. Mais ici , pour revenir à la définition du nombre dérivé, on imagine qu'on ne connaît pas ces formules. On va **trouver un nombre dérivé f ' (3) en déterminant d'abord une limite**.

Le **taux d'accroissement** de f entre 3 et x est , pour tout x différent de 3 : $\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \frac{x^2-9}{x-3}$

x	2,9	2,99	3,001	2,999
$\frac{x^2-9}{x-3}$	5,9000	5,9900	6,0010	5,9990

On cherche la limite en 3 de ce taux d'accroissement pour trouver le nombre dérivé $f'(3)$.
Pour **se donner une idée** de l'existence d'une limite à cette expression, on pourrait commencer par tracer un graphe, essayez donc il est particulier. On peut aussi évaluer cette expression pour quelques valeurs proches de 3, là aussi vous remarquerez peut-être qu'elle est particulière.

Il y a une limite en 3 à ce taux, en voici deux preuves :
1ère méthode :

pour tout x différent de 3 : $\frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = x+3$.

Or $\lim_{x\to 3}(x+3)=3+3=6$.

Donc $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=6$ donc **$f'(3) = 6$.**

2nde méthode :

Ici l'égalité $x^2-9=(x+3)(x-3)$ a bien aidé , mais elle est particulière à cet exemple. Voilà une autre façon, plus générale, de chercher cette limite : $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$

puisque l'on cherche une **limite en 3**, introduisons la quantité h définie par : $\boldsymbol{x = 3 + h}$, ou encore $h = x - 3$.
x s'approche de 3 lorsque $\boldsymbol{h}$, différence entre 3 et x , **s'approche de 0**.

Chercher une limite en 3 à $\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$ revient donc à chercher **une limite en h=0** à $\frac{f(3+h)-f(3)}{(3+h)-3}$

Or pour tout $h \neq 0$, $\frac{f(3+h)-f(3)}{(3+h)-3} = \frac{(3+h)^2-9}{3+h-3} = \frac{9+6h+h^2-9}{3+h-3} = \frac{6h+h^2}{h} = 6+h$

De plus $\lim_{h\to 0}(6+h)=6$. Donc $\lim_{x\to 3}\frac{f(3+h)-f(3)}{(3+h)-3}=6$, doù **$f'(3) = 6$.**

Exemple 4: Calcul d'une limite à l'aide du nombre dérivé d'une fonction en 1 point.

On cherche une limite : $\lim_{x\to 5} \frac{x^3-125}{x-5}$. Cette fois on va **trouver une limite en déterminant d'abord un nombre dérivé.** Pour cela , contrairement à l'exemple précédent, on suppose que l'**on connaît les formules de dérivation des fonctions usuelles**.

On remarque que $125 = 5^3$. Donc , pour tout x différent de 5, $\frac{x^3-125}{x-5} = \frac{f(x)-f(5)}{x-5}$, en posant $f(x) = x^3$.

Donc $\lim_{x\to 5} \frac{x^3-125}{x-5} = \lim_{x\to 5} \left(\frac{f(x)-f(5)}{x-5}\right)$. **Ceci est $f'(5)$.**

Or $f(x) = x^3$ pour tout x de $\mathbb{R}$, donc pour tout x $f'(x) = 3x^2$, et $f'(5) = 3 \times 5^2 = 75$.

Donc $\lim_{x\to 5} \frac{x^3-125}{x-5} = 75$

3.3 Approximation par une fonction affine. Tangente.

3.3.1 Tendance naturelle à une évolution linéaire

Dans la nature ([1]), un corps libéré de toute contrainte tend à suivre une droite. Comme illustration, vous pouvez par exemple consulter : http://phymain.unisciel.fr/une-bille-prend-la-tangente/

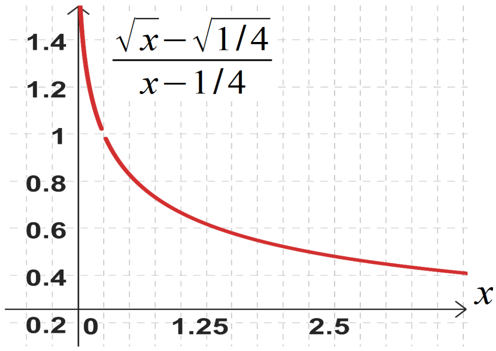
De ce fait, lorsqu'une courbe décrit un phénomène, on sent naturellement que le phénomène possède une tendance, qui pourrait s'exprimer s'il était libéré de toute contrainte, et dont la représentation graphique serait une droite, qui tendrait à se confondre avec la courbe au point où les contraintes seraient levées.

Cette droite, qui représente la **tendance naturelle du phénomène en un point,** est la **tangente à la courbe** en ce point. Elle est au centre de ce paragraphe.

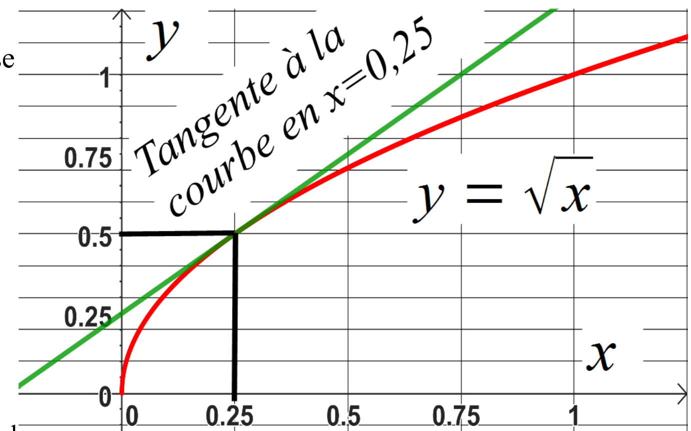
3.3.2 Nombre dérivé d'une fonction en une valeur et graphe en cette valeur.

Le fait qu'une fonction f admette un nombre dérivé m en une valeur x_0 se traduire

➔ sur le **graphe de son taux d'accroissement** entre x_0 et une autre valeur $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ comme à l'exemple 1 : à mesure que l'abscisse x s'approche de x_0 , l'ordonnée s'approche de m lorsque l'abscisse s'approche x_0. Cela a permis d'illustrer le paragraphe précédent, mais cela est inutile pour la suite.



➔ mais aussi sur le **graphe de la fonction :** en s'approchant de plus en plus près du point d'abscisse x_0 , **la courbe représentative de f s'approche d'une droite de coefficient directeur m.** Cette droite est appelée la **tangente à la courbe de f au point d'abscisse x_0 .**



1 En observant dans ce que la physique nomme un référentiel Galiléen. Ce peut être en première approximation en utilisant un repère fixe par rapport à la Terre. Mais il est plus précis de choisir un repère fixe par rapport au soleil, et plus encore un repère fixe par rapport au centre de gravité de notre galaxie....

3.3.3 Droite tangente à une courbe en un point.

***Définition* 3**

Si une fonction f admet un nombre dérivé en une valeur x_0, alors on appelle **droite tangente** au point d'abscisse x_0 la droite passant par le point de coordonnées (x_0, $f(x_0)$) et de coefficient directeur f' (x_0).

La droite T tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $\mathbf{x_0}$ a donc pour équation :

M (x, y) appartient à T si, et seulement si $\boldsymbol{y = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)}$.

Cette équation peut aussi se trouver ainsi :

M (x, y) , différent de (x_0 , y_0) appartient à T si, et seulement si

$$\underbrace{\frac{\boldsymbol{y - f(x_0)}}{\boldsymbol{x - x_0}}}_{\textbf{\textit{taux d'accroissement sur la droite, constant}}} = \underbrace{\boldsymbol{f'(x_0)}}_{\textbf{\textit{dérivée de f en }}\boldsymbol{x_0}}$$

Sur le graphe la courbe semble s'approcher de cette droite lorsque x s'approche de x_0 , précisons de quelle façon:

à mesure que x s'approche de x_0 , $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ *s'approche de m , donc* $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - m$ *s'approche de 0. Nommons* $\varepsilon(x)$ *cette quantité* $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - m = \varepsilon(x)$ *. On a donc , sur un intervalle I contenant x_0:*

(pour tout x de I) $f(x) - f(x_0) - m \times (x - x_0) = (x - x_0) \times \varepsilon(x)$ *. D'où :*

(pour tout x de I) $f(x) - f(x_0) = m \times (x - x_0) + (x - x_0) \times \varepsilon(x)$ *(E1) . Cette égalité sera utilisée plus loin.*

D'où (pour tout x de I) $f(x) = m \times x - m \times x_0 + f(x_0) + (x - x_0) \times \varepsilon(x)$

*la fonction qui à x associe mx – mx_0 + f(x_0) est une **fonction affine**, le terme* $(x - x_0) \times \varepsilon(x)$ *est le produit de 2 facteurs qui tendent tous les 2 vers 0 lorsque x tend vers x_0. Dans le chapitre suivant on l'appellera un infiniment petit d'ordre supérieur à x – x_0 .*

*f s'approche donc d'une fonction affine lorsque x s'approche de x_0. La différence entre f et la fonction affine est le **produit** de 2 termes qui tendent **tous les deux** vers 0 à mesure que x tend vers x_0. Son graphe s'approche donc de celui d'une droite.*

Exemple 5:

pour f définie sur ℝ par $f(x) = x^2$, et pour $x_0 = 3$, $f(x_0) = f(3) = 9$ et $f'(3) = 6$ – voir l'exemple 3 –

d'où $6 = \lim\limits_{x \to 3} \left(\dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3} \right) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$.

Donc pour x assez proche de 3,

$$\frac{f(x) - f(3)}{x - 3} \approx 6 \ ,$$

d'où $f(x) - f(3) \approx 6(x - 3)$ et $\boldsymbol{f(x) \approx} f(3) + 6(x - 3) = 9 + 6\text{x} - 18 = \boldsymbol{6x - 9}$ (E 2)

Au voisinage de $x = 3$, f s'approche d'une fonction affine : celle qui **à tout *x* associe 6 *x* - 9**. Cette fonction affine est appelée **l'approximation affine de *f* au voisinage de *x*= 3.**

De façon générale, si une fonction f est dérivable en une valeur x_0, alors f s'approche, au voisinage de x_0 , d'une fonction affine, appelée **l'approximation affine de *f* au voisinage de *x*= $\boldsymbol{x_0}$.**

Voilà une description plus précise de l 'approximation affine :

D'après l'égalité (E1) du paragraphe 3.2,
Si f est dérivable en x_0 , de dérivée $f'(x_0)$ en x_0 , alors

$$\boldsymbol{f(x) = \underbrace{f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0)}_{\text{partie affine}} + \underbrace{(x-x_0)\varepsilon(x)}_{\text{reste}}}$$

- $f(x_0), f'(x_0)$ sont constantes , donc ce qui a été nommé **partie affine** dans l'équation (E2) est $f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0) = \underbrace{x\,f'(x_0)}_{x \text{ multiplié par une constante}} + \underbrace{f(x_0)-x_0 f'(x_0)}_{+\text{ une autre constante}}$, c'est **une fonction affine** d'x
- $\varepsilon(x) = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)$ est une expression qui tend vers 0 lorsque x tend vers x_0.
- **le reste** $(x-x_0)\varepsilon(x)$ est le produit de 2 **fonctions tendant toute les 2 -vers 0** lorsque x tend vers 0 : $(x-x_0)$ et $\varepsilon(x)$. C'est ce qu'on appelle au chapitre 2 un **infiniment petit devant** $(x-x_0)$.

Pour revenir à l'exemple de $f(x) = x^2$ et $x_0 = 3$:

$$f(x) = \underbrace{9+(x-3)\times 6}_{\text{partie affine}} + \underbrace{(x-3)\varepsilon(x)}_{\text{reste}} = \underbrace{\mathbf{6x-9}}_{\textbf{partie affine}} + \underbrace{\mathbf{(x-3)\varepsilon(x)}}_{\textbf{reste}} \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0 \ .$$

La partie affine est une fonction affine d'x. Le reste est le **produit** de 2 facteurs qui tendent tous les deux vers 0 lorsque x tend vers 3 : x-3 et $\varepsilon(x)$. Au chapitre 2 une telle expression est appelée un **infiniment petit devant x-3 au voisinage de x = 3**.
Ainsi :

Propriété 1

une fonction définie sur un intervalle I : $x \in I \mapsto f(x)$ est dérivable en une valeur x_0 si et seulement si dans un intervalle contenant x_0 , f est la somme
- d'une fonction affine : **l'approximation affine** de f au voisinage de x_0.
- et d'un reste infiniment petit devant la différence $x-x_0$.

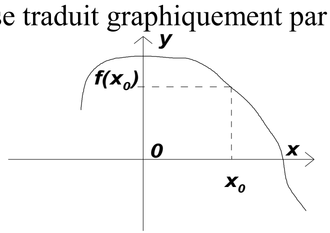
L'approximation affine de f au voisinage de x_0 peut être déterminée de l'une quelconque des façons suivantes :
- elle est obtenue en remplaçant $\approx$ par = et f par l'approximation affine de f dans l'égalité $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} \approx f'(x_0)$: $\dfrac{\Delta \text{ approximation affine } f(x)}{\Delta x} = f'(x_0)$
- c'est la fonction affine (x a pour image $a\,x + b$)
  - dont le taux d'accroissement a est égal à $f'(x_0)$
  - et dont la constante additive b est déterminée par $a\,x_0 + b = f(x_0)$
- c'est la fonction affine qui à tout x associe $f(x_0) + f'(x_0) \times (x - x_0)$
- c'est la fonction affine dont le graphe est la droite tangente à la courbe de f au point d'abscisse x_0 .

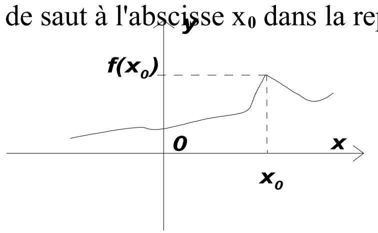
3.4 Dérivabilité et continuité d'une fonction d'une variable

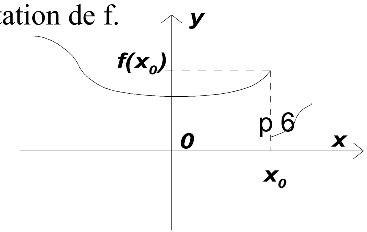
Rappel du chapitre 2 : une fonction f est continue en une valeur x_0 si

- elle est définie en x_0 et sur un intervalle contenant x_0 ,
- et $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Cela se traduit graphiquement par l'absence de saut à l'abscisse x_0 dans la représentation de f.







Fonction continue en x_0 **Fonction continue en x_0** **Fonction discontinue en x_0**

Propriété 2: **si** f est dérivable en x_0 **alors** f est continue en x_0

Preuve: si f est dérivable en x_0, alors f est définie en x_0 et d'après le paragraphe 3.3.3 :

$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + (x - x_0).\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x)=0$ *d'où*

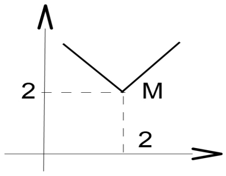
$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)+0\,f'(x_0)+0\times 0=f(x_0)$$

Attention : en revanche, une fonction continue n'est pas forcément dérivable :

Par exemple : soit f la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x)=4-x & si\ x\leq 2 \\ f(x)=x & si\ x\geq 2 \end{cases}$$

f est continue en 2 mais n'y est pas dérivable car elle n'a pas de tangente au point M (2 ; 2) .



Graphe d'une fonction continue et non dérivable.

3.5 Fonction dérivée

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, on dit que f est dérivable sur I si et seulement si elle est dérivable en tout point de I. Dans ce cas, l'application qui à tout x de I associe f '(x), le nombre dérivé de f en x, s'appelle la **fonction dérivée de f** (ou dérivée de f), notée **f '** .

$$f' : \quad I \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f'(x)$$

! Attention ! : une fonction n'est pas forcément dérivable sur tout son domaine de définition. Il faut se demander sur quel ensemble elle est dérivable **avant** de calculer sa dérivée. Une erreur souvent rencontrée consiste à: chercher l'expression de la dérivée de la fonction , puis à chercher sur quel ensemble cette expression est définie.

Exemple: soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$ pour $x <1$, $f(1) = 0$, $f(x) = x^2 +2$ pour $x > 1$
Sur quel ensemble f est-elle dérivable ? Quelle est , sur cet ensemble, l'expression de la dérivée f' ?
Sur quel ensemble cette expression peut-elle être définie?

Evaluer $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$. Que penser de la dérivabilité de f en 1 ?

3.5.1 Fonctions dérivées à connaître

D(f)	IR	IR	IR	IR^*	] 0 ; +∞[	[0, + ∞[
f(x)	C,constante	a*x* + b	x^n , n entier positif	x^n , n entier négatif	x^a , a nombre réel	$\sqrt{x} = x^{1/2}$
D' (f)	IR	IR	IR	IR^*	] 0 ; +∞[	] 0 ; +∞[
f ' (x)	0	a	$n\,x^{n-1}$	$n\,x^{n-1}$	$a\,x^{a-1}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

D(f)	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}\setminus\{\pi/2 + k\pi , k \in \mathbb{Z}\}$	]0 ; +∞[	$\mathbb{R}$
f(x)	sin x	cos x	tan x	ln x	exp(a x), a nombre réel
D' (f)	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}\setminus\{\pi/2 + k\pi , k \in \mathbb{Z}\}$	]0 ; +∞[	$\mathbb{R}$
f ' (x)	cos x	- sin x	$1 + \tan^2 x$	1/x	a exp(ax)

D(f) désigne l'ensemble de définition de f et D ' (f) l'ensemble de dérivabilité de f , c'est-à-dire l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles f est dérivable.

3.5.2 Opérations

Propriété 3 si f et g sont deux fonctions dérivables sur l'intervalle I, alors f+g, f.g ,af ($a\in\mathbb{R}$), f^n ($n\in\mathbb{N}$) sont dérivables sur I et on a:

Fonction	f + g	f.g	af ($a \in \mathbb{R}$)	f^n , n entier >0	exp(f), $a \in \mathbb{R}$	ln(f), si f >0 sur son domaine de définition.
Dérivée	f ' + g '	f ' . g + f . g'	af '	$n f^{n-1} f'$	f ' exp(f)	$\frac{f'}{f}$

si de plus **g ne s'annule pas sur I**, $\frac{1}{g}$, $\frac{f}{g}$ et g^k ($k \in \mathbb{Z}$), sont dérivables sur I et :

Fonction	$\frac{1}{g}$	$\frac{f}{g}$	g^k ($k \in \mathbb{Z}$)
Dérivée	$\frac{-1}{g^2}$	$\frac{f'g-fg'}{g^2}$	$k g^{k-1} g'$

3.6 Différentielle d'une fonction d'une variable

Exemple 6: Considérez à nouveau la fonction f définie ainsi: $f(x) = x^2$ pour tout x de $\mathbb{R}$. Prenons $x_0 = 300$, $f(300) = 90\,000$, $f'(300) = 2 \times 300 = 600$,

on a donc : $600 = \lim_{x\to 300} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$,

Δx désigne $x - 300$, la variation de la variable de 300 à une autre valeur x ,
et $\Delta f(x)$ désigne $f(x) - f(300)$, la variation de $f(x)$ qui en résulte.

Si x représente une quantité produite et $f(x)$ son coût en Euros , alors

- 300 unités produites coûtent 90 000 euros ,
- à partir de 300 unités , une variation de la production de Δx pièces occasionne une variation du coût de $\Delta f(x)$, et $\Delta f(x) \approx 600\,\Delta x$, **la variation du coût est à peu près proportionnelle à la variation de la production**, environ 600 Euros par pièce supplémentaire produite, cette proportionnalité est approximative, mais **cette approximation est d'autant plus précise que Δx est petite**.

La fonction qui à tout nombre Δx associe $600\ \Delta x$

- est une fonction linéaire
- est une approximation de la variation $\Delta f(x)$ résultant de la variation Δx , d'autant plus précise que Δx est petite.

Cette fonction linéaire est appelée la **différentielle de f en 300**. Elle est notée **df_{300}**.

De façon générale,

3.6.1 Définition. Fonction différentielle d'une variable réelle.

Définition *4*

si f est une fonction dérivable en une valeur x_0 , alors on appelle **différentielle de f en x_0 et on note df_{x_0}**, la fonction linéaire qui à tout nombre associe ce nombre multiplié par $f'(x_0)$.

$$df_{x_0} : h \in \mathbb{R} \mapsto h f'(x_0)$$

Si à partir de x_0, la variable x varie d'une quantité Δx, alors f(x) varie approximativement de $df_{x0}(\Delta x)=(f'(x_0))\times\Delta x$, cette approximation étant d'autant meilleure que Δx tend vers 0.

Autre exemple : posons $f(x)=\sqrt{x}=x^{1/2}$ pour tout x de $\mathbb{R}^+$. Cette fonction est dérivable dur]0, + ∞[– attention pas en 0 – , pour tout x de]0, + ∞[, $f'(x)$ $\frac{1}{2}x^{-1/2}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, en particulier $f'(9)=$ $\frac{1}{6}$, donc la différentielle de f en 9 est la fonction linéaire qui à tout nombre h associe $\frac{1}{6}h$ – on n'a pas appelé la variable x pour ne pas faire de confusion avec f –.

3.6.2 Notation dx

Considérons la fonction *identité* qui à tout nombre lui associe lui-même : $x\in\mathbb{R}\mapsto x$.

On peut aussi bien désigner par un autre nom que x les nombres sur lesquels agit cette fonction. Ici ils seront plutôt notés h , vous verrez dans quelques lignes pourquoi c'est plus pratique.

La fonction *identité* associe à chaque nombre h lui-même : $h\in\mathbb{R}\mapsto h$.

On note couramment **d*x*** cette fonction **:** dx est la fonction qui à tout nombre h associe h lui-même.

Or la fonction $f'(x_0)\times dx$ fait la même chose : à tout nombre h elle associe $f'(x_0)\times dx(h)=f'(x_0)\times h$
On a donc **l'égalité entre fonctions** : $df_{x0}=f'(x_0)\times dx$, pour tout nombre x_0, *que l'on écrit plus simplement*

$$\mathbf{d}f_x=f'(x)\times\mathbf{d}x$$

Par exemple, la différentielle en 2 de la fonction $g:\ x\in\mathbb{R}\longmapsto x^2$ est $dg_2=g'(2)dx=4\,dx$. C'est la fonction qui à tout nombre lui associe 4 fois ce nombre : $dg_2(h)=4\mathrm{h}$ *pour tout nombre h*

3.6.3 Notation f ' (x) dx pour une fonction d'une variable réelle.

Pour $f(x)=x^2$ et $x_0=5$, $f'(x)=2x$, $f'(5)=10$,
D'après le paragraphe 3.6.1, la fonction différentielle de f en 5 est la fonction linéaire, notée df_5 , qui à tout nombre h associe $10\times h$.
$df_5(1)=10\times1=10$, $df_5(0{,}03)=10\times0{,}03=0{,}3$, $df_5(-0{,}03)=10\times(-0{,}03)=-0{,}3$.
De façon générale, pour tout nombre x_0 , $df_{x0}(h)=f'(x_0)\times h$.

On peut donc écrire $df_{x0}(h)=f'(x_0)\,dx_x(h)$ pour tout nombre h, d'où **l'égalité entre fonctions** :

$$\underbrace{df_{x0}}_{\text{ceci est une fonction}}=\underbrace{f'(x_0)}_{\text{ceci est un nombre}}\times\underbrace{dx}_{\text{ceci est la fonction identité}}$$

ce que l'on écrit plus brièvement :

$$\boxed{\underbrace{df}_{\text{la fonction différentielle de } f}=\underbrace{f'(x)}_{\text{le nombre } f'(x)}\times\underbrace{dx}_{\text{la fonction identité}}}$$

3.6.4 Notations de la différentielle et de la dérivée

$df(x)=f'(x)dx$ justifie la notation courante $\boldsymbol{f'(x)=\frac{df}{dx}}$

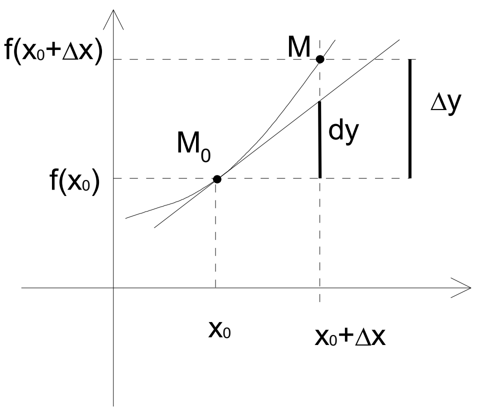
3.6.5 Un exemple : pour $f : x \mapsto f(x) = x^2$.

- Expression de la différentielle :
  f '(x) = $2x$ pour tout x de $\mathbb{R}$, d'où $$\underbrace{df}_{\text{fonction différentielle de } f} = \underbrace{2x}_{f'(x)} \underbrace{dx}_{\text{fonction identité}}$$
- Différentielle en une valeur :
  en particulier la différentielle de f en 5 est $df_5 = 10\,dx$
  c'est la fonction linéaire qui à tout h de $\mathbb{R}$ associe $10\,h$
- Signification :
  sachant que $f(5) = 5^2 = 25$, cette différentielle indique que, à partir de $x = 5$, si x évolue d'une variation h , alors **$f(5+h)$ s'approche de $25+ 10h$** à mesure que h s'approche de 0.
- Exemple numérique :
  cette différentielle indique que f(5,001) = 5,001² doit être proche de $25 + 10 \times 0{,}001 =$ **25,01** .
  Or on peut vérifier que 5,001² = 25,010001 ≈ **25,01** .

3.6.6 Interprétation

- Les **utilisateurs** des mathématiques, mais **pas les mathématicien(ne)s**, interprètent dx comme une variation infinitésimale, c'est-à-dire infiniment petite mais pas nulle, de la variable x, et df comme la variation infiniment petite de f qui en résulte.
- Mais pour les mathématiques standard ([2]), il n'y a pas de nombres fixes infiniment petits mais non nuls. A leur place, on utilise donc des fonctions (df, dx…) qui s'appliquent à des nombres, non fixés, qu'on peut faire tendre vers 0 en les prenant **aussi petits qu'on veut**.
- On retient que pour un accroissement dx assez petit de la variable autour d'une valeur fixée x_0, la fonction varie à peu près proportionnellement à dx. Le coefficient de proportionnalité est f ' (x_0).

3.6.7 Représentation graphique de la différentielle



Exercice 1*:* soit $f(x) = x^2 - 3x + 6$

1°) Calculer la différentielle df

2°) Calculer l'accroissement $\Delta f = f(x) - f(x_0)$

3°) Quelle est l'erreur commise en approximant Δf par df quand x passe de 2 à 2,05 ?

3.6.8 Propriétés des différentielles de fonctions d'une variable

Elles découlent des propriétés des dérivées. Pour , u , v fonctions dérivables sur un intervalle I :

$d(u+v) = dv + dv$ $d(au) = a.du$ (pour tout a de $\mathbb{R}$)

$d(u\,v) = u.dv + v.du$ $d(u/v) = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}$

$d(u^r) = r\,u^{r-1}.du$, pour tout r de $\mathbb{R}^*$, et pour $u \neq 0$ dans le cas où r entier négatif, pour $u > 0$ dans le cas où r n'est pas entier.

---

2 *Il existe une Analyse non standard qui utilise des objets que l'on peut assimiler à des nombres infiniment petits mais pas nuls.*

Exercice 2: En utilisant ces propriétés, exprimer les différentielles des fonctions suivantes .

$f_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto f_1(x) = x e^{3x}$ $\quad f_2 : x \in \mathbb{R} \mapsto f_2(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$ $\quad f_3 : x \in \mathbb{R} \mapsto f_3(x) = \sqrt{x^2+4} = (x^2+4)^{1/2}$

3.7 Dérivées successives d'une fonction d'1 variable réelle.

Soit f une fonction dérivable sur I. Si f ' est elle-même dérivable sur I, sa dérivée est appelée **dérivée seconde** de f et est notée f '' ou $f^{(2)}$. On dit alors que f est **deux fois dérivable** sur I.

En itérant on obtient:

$f^{(3)}$, dérivée de f '' est la dérivée troisième (ou d'ordre 3) de f ... etc.

$\mathbf{f^{(n)}}$, dérivée de $f^{(n-1)}$ est la **dérivée nième** (ou **d'ordre n**) de f.

Exemple 7 Soit *f* définie sur ℝ par : $x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = 3x^2 + 5x - 2$

Alors pour tout x de ℝ , $f'(x) = 6x + 5$; $f''(x) = 6$, $f'''(x) = 0$ et pour tout n > 3 , $f^{(p)}(x) = 0$.

3.8 Dérivées partielles d'une fonction numérique de 2 variables

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ $f: (x,y) \mapsto 3yx^2$.
Pour un x fixé à x_0 , la fonction d'y : $y \in \mathbb{R} \longmapsto 3x_0^2 y$ est une fonction linéaire d'y : elle a pour dérivée : $y \in \mathbb{R} \longmapsto 3x_0^2$

Pour y fixé à y_0, la fonction d'x : $x \in \mathbb{R} \longmapsto 3x^2 y_0$ a pour dérivée : $x \in \mathbb{R} \longmapsto 6xy_0$

Définition *5*

Pour une fonction numérique de 2 variables $(x,y) \in D_f \longmapsto f(x,y)$ et un élément de IR^2 (x_0, y_0), on considère la fonction d'une seule variable $x \longmapsto f(x, y_0)$

<u>*Si*</u> cette fonction est dérivable en $x = x_0$, on appelle cette dérivée la dérivée partielle de f par rapport à la 1ère variable, au point (x_0, y_0). Elle est notée $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ – ou $f'_x(x_0, y_0)$ mais cette notation est déconseillée dans un premier temps, pour ne pas la confondre avec celle-ci : « $f'(x_0, y_0)$ » , qui n'aurait pas de sens – .

On considère d'autre part la fonction d'une seule variable $y \longmapsto f(x_0, y)$

<u>*Si*</u> cette fonction est dérivable en $y = y_0$, on appelle cette dérivée la dérivée partielle de f par rapport à la 2nde variable, au point (x_0, y_0). Elle est notée $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ – ou $f'_y(x_0, y_0)$, déconseillée dans un premier temps – .

Exemple 8 : calculer les dérivées partielles en (1, 2) de $f:(x,y) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto x^2 y + 3y^2$

Définition *6*

Une fonction de deux variables ayant des **dérivées partielles continues** sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}^2$ est dite **de classe C^1 sur D**.

3.9 Fonction différentielle d'une fonction numérique de 2 variables réelles

Soit la fonction $f_1 : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x+2y)^2$. Observons comment elle se comporte au voisinage de (3,1) .
Considérons pour x une autre valeur. Pour bine marquer sa disatnce à 3 notons-là $x = 3 + h$. Considérons pour y une autre valeur $y = 1 + k$.
pour tout (h, k) de $\mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{f_1(3+h, 1+k)} = (3+h + 2(1+k))^2 = (5 + h + 2k)^2 = \underline{\mathbf{25}} + \underline{\mathbf{10}h + \mathbf{20}k} + \underline{h^2 + 4k^2 + 4\,kh}$
Dans cette expression :

- <u>**25**</u> est $f_1(3,1)$
- l'application $(h,k) \in \mathbb{R}^2 \mapsto$ <u>**10*h* +20 *k***</u> est une application **linéaire** de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^1$.
  C'est un infiniment petit en 0 : $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} (10h + 20k) = 0$
- $(h,k) \in \mathbb{R}^2 \mapsto$ <u>$h^2 + k^2 + 4\,kh$</u> est un infiniment petit d'ordre supérieur à $10h + 20k$:
  $h^2 + k^2 + 4\,kh \underset{(h,k)\to(0,0)}{\ll} 10|h| + 20|k|$
  <u>l'application $(h, k) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbf{10}h + \mathbf{20}k$</u>, est appelée différentielle de f au point (3, 1).

Définition 7 . Différentielle de fonction de 2 variables. Une fonction f définie dans domaine D de $\mathbb{R}^2$ contenant un pavé ouvert, contenant lui-même (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$, est dite différentiable en (x_0, y_0) s' il existe 2 nombres a, b et une fonction φ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

pour tout (h, k) de D, $f(x_0 + h, y_0 + k) = \underbrace{f(x_{0,} y_0)}_{valeur\ en\ x_{0,}y_0} + \underbrace{a\,h + b\,k}_{fonction\ linéaire\ de\, 2\ variables} + \underbrace{(|h| + |k|)\varphi(h, k)}_{infiniment\ petit\, devant\ 10\,h + 20\text{k}}$

avec $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} (\phi(h,k)) = 0$

La fonction **linéaire** de 2 variables : g : $\boldsymbol{(h,k)} \mapsto$ **a $\boldsymbol{h}$ + b$\boldsymbol{k}$** est appelée **différentielle de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{(x_0, y_0)}$**

$\varphi(h, k)$ désigne une fonction infiniment petite devant en (0,0) , elle peut s'écrire aussi o (h,k) pour indiquer qu'elle est infiniment petite devant h et infiniment petite devant k, au voisinage de (h, k) = (0,0)

f_1 est donc différentiable en (3,1) , de différentielle $df_1 : (h,k) \mapsto 10h + 20k$

Notations : La différentielle d'une fonction f est notée **d$\boldsymbol{f}$**.

On note **d$\boldsymbol{x}$** l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$: $(h, k) \mapsto h$

et **d$\boldsymbol{y}$** l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$: $(h, k) \mapsto k$

Pour la fonction f_1 précédente, sa différentielle se note donc $\mathbf{d}\boldsymbol{f}_{\mathbf{1}\ (3,1)} = \mathbf{10\ d}\boldsymbol{x} + \mathbf{20\ d}\boldsymbol{y}$

De façon générale, au point (x,y), $\mathbf{d}\boldsymbol{f}_1 = \mathbf{2\ (}\boldsymbol{x}\mathbf{+ 2}\boldsymbol{y}\mathbf{)d}\boldsymbol{x} \mathbf{+ 4\ (}\boldsymbol{x}\mathbf{+2}\boldsymbol{y}\mathbf{)\ d}\boldsymbol{y}$

Le théorème suivant permet de calculer la différentielle.

3.9.1 Différentiabilité, dérivées partielles, continuité

Propriété 4

Si f est différentiable au point $(x_{0,} y_0)$, alors f admet des dérivées partielles et

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

Propriété 5 Si f , définie au voisinage de (x_0, y_0), admet 2 dérivées partielles **continues** en (x_0,y_0), alors f est différentiable en (x_0, y_0), et $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$.

Propriété 6 Si f est différentiable en (x_0, y_0), alors f est continue en (x_0,y_0).

Exemple. Reprenons la fonction f_1 qui a servi d'exemple jusqu'ici :

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) = 2\times1\times(x + 2y) = 2(x + 2\text{y}) \quad , \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = 2\times2\times(x + 2y) = 4(x + 2\text{y})$$

En particulier $\frac{\partial f_1}{\partial x}(3,1) = 2(3 + 2\times1) = 10$, $\frac{\partial f_1}{\partial y}(3,1) = 4(3 + 2\times1) = 20$

On retrouve bien $df_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x} dx + \frac{\partial f_1}{\partial y} dy$, $df_{1\ (3,1)} = 10\,dx + 20\,dy$

Licence Economie gestion 1ère année.
2024 2025.
Cours de mathématiques 1 de P.Beau
Chapitre 3. 2nde partie.

3.10 Dérivée d'une fonction composée. Dérivation en chaîne.

3.10.1 Fonction composée.

1. Définissons trois fonctions *f*, *g*, *k* ainsi : $$\begin{aligned}&(\textit{pour tout } x \textit{ de } \mathbb{R}) \quad k(x)=\sqrt{1+x^2}\\ &(\textit{pour tout } x \textit{ de } \mathbb{R}) \quad f(x)=1+x^2\\ &(\textit{pour tout } y \textit{ de } \mathbb{R}) \quad g(y)=\sqrt{y}\end{aligned}$$
   Remarquons que pour calculer $k(x)$ pour un nombre x , on calcule d'abord $f(x) = x^2 + 1$, ensuite on applique g à cette valeur :

   $$\boldsymbol{k(x)}=\sqrt{1+x^2}=\sqrt{f(x)}=\boldsymbol{g(f(x))}$$

   On dit dans ce cas que
   k* est la fonction composée de *f* par *g ,
   et on le note $\boldsymbol{k=g\circ f}$

   $$\begin{tikzcd} & 1+x^2 \arrow[dr, mapsto, "g"] & \\ x \arrow[ur, mapsto, "f"] \arrow[rr, mapsto, "k"] & & \sqrt{1+x^2} \end{tikzcd}$$

   $$k = g \circ f$$

2. De la même façon, la fonction j qui à tout x de $\mathbb{R}$ associe $j(x)=2(1+x^2)+\dfrac{1}{1+x^2}+\exp(-(1+x^2))$

   est la composée de la fonction f par la fonction w qui à tout y de $\mathbb{R}$ associe $w(y)=2y+\dfrac{1}{y}+\exp(-y)$

   (pour tout x de $\mathbb{R}$) $\quad j(x) = w(f(x)) = (w\circ f)(x)$

3. Si $u(q)$ mesure l'utilité ressentie par un consommateur de la possession d'une quantité q d'un produit, et si x est le prix de la quantité q de produit, alors la dépense d'une quantité x de monnaie procure une utilité
   $$u(q(x)) = (u\circ q)(x)$$

4. En particulier, supposons que
   - L'utilité procurée par une quantité q de produit est $\sqrt{q}$,
   - et que chaque unité de ce produit coûte 10 (1 + $\dfrac{1}{1+x}$) = $10\dfrac{2+x}{1+x}$. Le terme décroissant $\dfrac{1}{1+x}$ rend compte des économies d'échelle : le prix unitaire diminue pour de grandes quantités.

   La quantité procurée par x unités monétaires est donc
   $q(x)=\dfrac{x}{\textit{prix unitaire}}=\dfrac{x}{10(2+x)/(1+x)}=\dfrac{x(1+x)}{10(2+x)}$ et l'utilité procurée est
   $$u(x)=\sqrt{q(x)}=\sqrt{\frac{x(1+x)}{10(2+x)}}$$

3.10.2 Dérivée d'une fonction composée.

Propriété 7 1ère forme. Règle de dérivation en chaîne**.** Si f est dérivable sur l'intervalle ouvert I et g dérivable sur f(I), alors $g \circ f$ est dérivable sur I et
pour tout x de I, $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$

Preuve :
Exprimons le taux d'accroissement de $g \circ f$ correspondant à une variation de la variable de x à (x+h) :

$$\frac{\text{variation de } g \circ f}{\text{variation d'}x} = \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} = \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)} \times \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Donc $$\lim_{h \to 0}\left(\frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h}\right) = \lim_{h \to 0}\left(\frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)}\right) \times \lim_{h \to 0}\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right)$$

Donc $$\boldsymbol{(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)}$$

3.10.2.1 Application aux exemples du paragraphe précédent :

1. pour tout x de $\mathbb{R}$ $f'(x) = 2x$, pour tout y de $]0, +\infty[$, $g'(y) = 1/(2\sqrt{y})$, et $k = g \circ f$,
   donc k est dérivable sur tout $\mathbb{R}$, et pour tout x de $\mathbb{R}$,
   $$k'(x) = (g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x)) = 2x \times \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}$$
2. w est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout y de $\mathbb{R}$ $w'(y) = 2 - 1/y^2 - \exp(-y)$, donc j est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$, $j'(x) = (w \circ f)'(x) = f'(x) \times w'(f(x)) = 2x \times \left(2 - \frac{1}{(1+x^2)} - \exp(-(1+x^2))\right)$
3. si u est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et q est définie et dérivable sur $[0, +\infty[$, alors pour tout x de $[0, +\infty[$,
   $(u \circ q)'(x) = q'(x) \times u'(q(x))$

3.10.2.2 Expression de cette propriété avec la notation différentielle

Utilisons la notation différentielle du paragraphe 3.6.4.

k désigne, comme au paragraphe précédent, la fonction $g \circ f$, ou encore $g(f)$.

k est une fonction d'x, puisque $k = g(f(x))$. Sa dérivée par rapport à x, notée $\frac{dk}{dx}$ est $(g \circ f)'(x)$.

k est aussi une fonction de $f(x)$, puisque $k = g(f(x))$. Sa dérivée par rapport à $f(x)$, notée $\frac{dk}{df}$, est $g'(f(x))$

enfin la dérivée de f en x est notée $\frac{df}{dx}$.

En notant ces trois dérivées sous cette forme, la propriété 7 s'écrit :

Propriété 7 2nde forme. Si f est dérivable sur l'intervalle ouvert I et g dérivable sur f(I), alors $k = g \circ f$ est dérivable sur I alors
pour tout x de I, $$\boldsymbol{\frac{dk}{dx} = \frac{dk}{df} \times \frac{df}{dx}}$$

Exemple 9 :Utilisons cette notation pour traiter les exemples précédents :

1. $\frac{dk}{df} = \frac{1}{2} f^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{f}}$, $\frac{df}{dx} = 2x$, d'où $\frac{dk}{dx} = \frac{dk}{df}\frac{df}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \times 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

2. $$\frac{dj}{dx}=\frac{dj}{df}\times\frac{df}{dx}=\left(2-\frac{1}{f(x)^2}-\exp(-f(x))\right)\times 2x=\left(2-\frac{1}{1+x^2}-\exp(-1-x^2)\right)\times 2x$$

3. pour tout x de $[0,+\infty[$ $\quad \frac{du}{dx}=\frac{du}{dq}\times\frac{dq}{dx}$

4. $\frac{du}{dq}=\frac{1}{2\sqrt{q}}$ $\quad \frac{dq}{dx}=\frac{(1+2x)\times 10(2+x)-(x+x^2)\times 10x}{(10(2+x))^2}=\frac{2+5x+x^2-x^3}{10(2+x)^2}$, donc

$$\frac{du}{dx}=\frac{du}{dq}\times\frac{dq}{dx}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{10(2+x)}{x(1+x)}}\times\frac{2+5x+x^2-x^3}{10(2+x)^2}$$

Cas particulier : dérivée de $x\in\,]0,+\infty[\;\mapsto x^r$, r nombre réel.

La dérivée est connue lorsque r est un nombre entier, montrons que l'expression est la même pour n'importe quel nombre r réel.

Pour tout x de $]0,+\infty[$, $\quad x^r=\exp(r\ln x)$. Posons $\quad f(x)=r\ln(x)$, $\quad k(x)=\exp(f(x))=\exp(r\ln x)$

Alors pour tout x de $]0,+\infty[$, $\quad k'(x)=\frac{dk}{dx}=\frac{dk}{df}\times\frac{df}{dx}=\exp'(f(x))\times f'(x)=\exp(r\ln x)\times\frac{r}{x}=\frac{x^r\times r}{x}=r\,x^{r-1}$

L'expression est la même que pour r entier.

2nd cas particulier : dérivée logarithmique.

La dérivée logarithmique d'une fonction f ne s'annulant pas est la dérivée de ln (|f|), soit $\frac{f'}{f}$.

Exemple 10: Soit , pour tout x de $[0,+\infty[$, $\quad f(x)=(1+x^2)\sqrt{x}$.
La dérivée logarithmique, définie sur $]0,+\infty[$, s'exprime par

$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{d}{dx}\ln\left((1+x^2)\sqrt{x}\right)=\frac{d}{dx}\left(\ln(1+x^2)+\ln\sqrt{x}\right)=\frac{2x}{1+x^2}+\frac{1}{2x}$. C'est la somme des dérivées logarithmiques de $\quad x\longmapsto\ln(1+x^2)$ et de $\quad x\longmapsto\sqrt{x}$

Notation différentielle : $\quad d(\ln|f|)=\frac{df}{f}$

Propriétés 7 : d(ln $|f.g|$) = $\frac{df}{f}+\frac{dg}{g}$ = d (ln$|f|$) + d (ln$|g|$)

d (ln | $\frac{f}{g}$ |) = $\frac{df}{f}-\frac{dg}{g}$ = d(ln$|f|$) - d(ln$|g|$)

d(ln | f^n |) = n . $\frac{f'}{f}$ = n . d(ln$|f|$)

3.11 Dérivée d'une fonction réciproque

Rappel : une application f est une ***bijection*** d'un ensemble A dans un ensemble B si et seulement si tout élément de B a un et un seul antécédent par f dans A.
C'est-à-dire que pour tout y de B donné, l'équation

$$y = f(x)$$

a une seule solution x dans A . On définit ainsi une nouvelle fonction qui à tout y de B associe x de A solution de $f(x) = y$. On note $x = f^{-1}(y)$. f^{-1} s'appelle la ***fonction réciproque*** de f.

$$x \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} y \qquad\qquad (y=f(x)) \;\Leftrightarrow\; (x=f^{-1}(y))$$

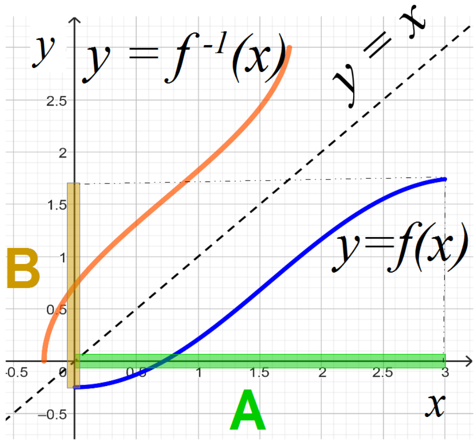
Exemple 11 :

Définissons la fonction f de $[0 , +\infty[$ dans $[1, +\infty[$ par : $x \in [0 , +\infty[$ a pour image $f(x) = x^2 +1$.
Pour tout x de $[0, +\infty[$ et tout y de $[1, +\infty[$ on a :
$y = f(x) \Leftrightarrow y = x^2+1$, d'où
$y = f(x) \Leftrightarrow x^2 = y - 1$, y étant dans $[1, +\infty[$ cette équation a toujours des solutions x dans IR, d'autre part puisqu'on a restreint x à l'intervalle $[0, +\infty[$, il n'y a qu'une seule solution, $x=\sqrt{y-1}$.
Donc $\mathbf{y = f(x) \Leftrightarrow x=\sqrt{y-1}}$

f admet donc une fonction réciproque : $f^{-1} : y \in [1 , +\infty[$ a pour image $x=\sqrt{y-1} \in [0 , +\infty[$

f_1 est une bijection de A vers B $\qquad$ f_2 n'est pas une bijection de A vers B $\qquad$ f_3 n'est pas une bijection de A vers B

On passe de la représentation de f à celle de f^{-1} en échangeant l'ordonnée y et l'abscisse x. Ces deux représentations sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Si f est une bijection de l'intervalle A sur l'intervalle B, et qu'elle est dérivable en x_0 , on peut se demander si f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$.

Supposons que f soit dérivable en x_0 de l'intervalle A, alors f $\quad f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Soit $y_0 = f(x_0)$. Alors pour tout y de B, différent de y_0

$$\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}=\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{f(f^{-1}(y))-f(x_0)}=\frac{1}{\left(\dfrac{f(f^{-1}(y))-f(x_0)}{f^{-1}(y)-x_0}\right)}$$

On montre d'autre part que, si f est bijective et continue en x_0 , alors f^{-1} est continue en $f(x_0) = y_0$, donc $\lim\limits_{y\to y_0} f^{-1}(y)=f^{-1}(y_0)=x_0$. Donc , **si** $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est différente de 0, **alors**

$$\lim_{y\to y_0}\frac{f(f^{-1}(y))-f(x_0)}{f^{-1}(y)-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$$ et **si** $f'(x_0)\neq 0$, alors

$$\lim_{y\to y_0}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}=\lim_{y\to y_0}\frac{1}{\left(\dfrac{f(f^{-1}(y))-f(x_0)}{f^{-1}(y)-x_0}\right)}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}=\frac{1}{f'(x_0)}$$, donc f^{-1} est dérivable

en y_0 et $f'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$

> **Propriété 8**
> si une fonction f est dérivable sur un intervalle A et bijective , alors
>
> 1. en tout point y_0 de l'image de A, tel que $f\ '(f^{-1}(y_0))\neq 0$, f^{-1} est dérivable et
> $$f^{-1}{}'(y_0)=\frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$
> 2. En posant $y=f(x_0)$, cela s'écrit : si $f'(x_0)\neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en y_0 et
> $$f^{-1}{}'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$$
> 3. En utilisant la notation différentielle , cela s'écrit : si $\dfrac{dy}{dx}\neq 0$, alors $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}$

Exemple 12 :

Définissons la fonction f de $[0,+\infty[$ dans $[1,+\infty[$ par : $x\in[0,+\infty[\ \mapsto\ f(x)=x^2+1$.

f est dérivable sur $[0,+\infty[$, de dérivée f' : $x\in[0,+\infty[\ \mapsto f\ '(x)=2x$.

- montrons que f admet une réciproque.
  Pour tout x de $[0,+\infty[$ et tout y de $[1,+\infty[$ on a :
  $y=f(x)\Leftrightarrow y=x^2+1$, d'où $y=f(x)\Leftrightarrow x^2=y-1$, y étant dans $[1,+\infty[$ cette équation a toujours des solutions x dans IR, d'autre part puisqu'on a restreint x à l'intervalle $[0,+\infty[$, il n'y a qu'une seule solution,
  $x=\sqrt{y-1}$. Donc $y=f(x)\Leftrightarrow x=\sqrt{y-1}$
  f admet donc une fonction réciproque : f^{-1} : $y\in[1,+\infty[\ \mapsto\ x=\sqrt{y-1}\ \in[0,+\infty[$
- La 1ère expression de la propriété 8 indique :
  pour tout y de $[1,+\infty[$ satisfaisant à $2\sqrt{y-1}\neq 0$, c'est-à-dire pour tout y de $]1,+\infty[$, f^{-1} est dérivable en y , de dérivée $f^{-1}{}'(y)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}=\dfrac{1}{2f^{-1}(y)}=\dfrac{1}{2\sqrt{y-1}}$
- La 2nde expression de cette propriété indique : si $y=x^2+1$ et $2x\neq 0$, c'est-à-dire si y appartient à $]1,+\infty[$, alors f^{-1} est dérivable en y, et dérivée $f^{-1}{}'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}=\dfrac{1}{2x}=\dfrac{1}{2\sqrt{y-1}}$
- La 3ème expression indique : si $2x\neq 0$, c'est-à-dire si $x\neq 0$,
  $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2x}$, ce qui est égal, bien sûr, à $\dfrac{1}{2\sqrt{y-1}}$

Exemple 13: il arrive qu'une fonction ait une réciproque qu'on ne peut pas exprimer comme composée de fonctions usuelles. On peut malgré cela calculer sa dérivée en certains points.

Considérons la fonction s définie sur ℝ par : $s: x \in \mathbb{R} \mapsto x + e^x$

Son tableau de variations montre que s est strictement croissante sur ℝ, qu'elle a pour limites - ∞ en - ∞ et + ∞ en + ∞. De plus s est continue sur ℝ. Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires – voir le chapitre 2 – , s admet une fonction réciproque :

pour tout y de ℝ, il existe un, seul, $x = s^{-1}(y)$ de ℝ solution de $x + e^x = y$.

On ne peut pas exprimer $s^{-1}(y)$ en fonction d'y à l'aide de fonctions usuelles. On peut remarquer toutefois que $s(0) = 0 + e^0 = 1$, donc que $s^{-1}(1) = 0$.

Enfin, $s'(x) = 1 + e^x$ et $s'(0) = 1 + e^0 = 2 \neq 0$.

D'après la propriété 8 , $s^{-1}{}'(1) = \frac{1}{s'(0)} = \frac{1}{2}$. Sans connaître d'expression de $s^{-1}(y)$ en fonction d'y, on a pu déterminer $s^{-1}{}'(1)$.

3.12 Variations, extrema

Si une fonction f est définie et dérivable sur un intervalle I alors :

Propriété 9 :
f est croissante (au sens large) sur I si et seulement si f ' est positive (ou nulle) sur I

Démonstration : a) Supposons que f est croissante sur I ;
Soit x_0 appartenant à I. Pour tout x de I, on a :
soit $x > x_0$, alors $f(x) \geq f(x_0)$, donc $x - x_0 > 0$ et $f(x) - f(x_0) \geq 0$, d'où ≥0
soit $x < x_0$; alors $f(x) - f(x_0) \leq 0$, donc $x - x_0 < 0$ et $f(x) - f(x_0) \leq 0$, d'où ≥0
Donc pour tout x de I, différent de x_0, ≥0. D'où ≥ 0 .
Donc $f'(x_0) \geq 0$
b) Il reste à prouver que si f ' est positive sur tout I, alors f est croissante sur I. Pour cela, le plus simple est d'utiliser le théorème de Rolle qui sera vu au chapitre 4.

Si f ' est **strictement** positive sur I , **alors** f est **strictement** croissante sur I.
La preuve est identique à la partie b) de la démonstration précédente.

La réciproque est fausse : f peut être strictement croissante sur I sans que f ' soit strictement positive : on peut considérer par exemple la fonction définie sur]-∞ , + ∞ [par : $x \in \mathbb{R} \mapsto x^3$. Elle est strictement croissante , pourtant $f'(0) = 0$.
De même ,
f est décroissante sur I si et seulement si f ' est négative sur I.
Si f ' est strictement négative sur I, alors f est strictement décroissante sur I.
Preuve : Il suffit de poser g = - f , on a alors : f décroissante sur I si et seulement si g est croissante sur I, si et seulement si g ' est positive sur I, si et seulement si f ' = - g' est négative sur I.

Utilisation pratique:
pour étudier les variations d'une fonction définie et dérivable sur un ou des intervalles I, on étudie le signe de sa dérivée .
Pour cela on dresse un tableau de signe, technique que vous avez abondamment pratiquée en 1ère et Terminale.
Une question courante en économie et en gestion est la recherche de minima et de maxima d'une fonction dérivable.
Pour cela, on recherche les points où **la dérivée s'annule <u>en changeant de signe</u>** . Le fait qu'elle s'annule n'est pas suffisant !!
Chacun de ces points est un **extremum local** , c'est-à-dire qu'il existe un intervalle J inclus dans I sur lequel ce point est un maximum, ou un minimum.
Pour chercher un **extremum global** (sur tout le domaine de définition), n'oubliez pas que

- si I n'est pas ouvert, f peut atteindre un extremum à une borne de I, sans que la dérivée s'annule . Par exemple : la fonction définie sur [-2; 5] par $x \in [-2; 5] \mapsto 2x^3+3x^2$ atteint son maximum global en 5. Sa dérivée en 5 vaut $6 \times 5^2 + 6 \times 5 = 180 \neq 0$

- f n'atteint pas forcément un maximum ou un minimum global (sur tout I).

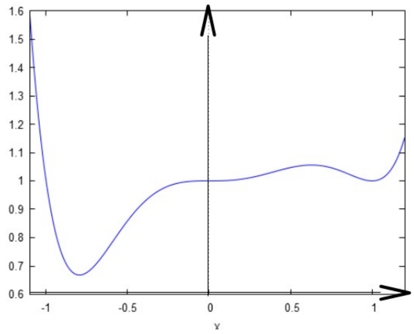
  Par exemple la fonction définie par la même expression $x \mapsto 2x^3+3x^2$ sur]-2 ; 5[, et la fonction définie sur tout $\mathbb{R}$ par cette expression, n'admettent pas de maximum global.

Pour chercher un extremum global il faudra donc considérer tous les extrema locaux et éventuellement les bornes du domaine de définition, puis vérifier si en l'une de ces valeurs, f admet un extremum global..

Exemple 14: Voici le graphe de la fonction définie sur [-1.1, 1.2] par $x \in [-1.1, 1.2] \mapsto 1+x^3(x-1)^2(x+1)^2$

La dérivée s'annule en -1, $-\sqrt{\dfrac{3}{5}}$, 0, $\sqrt{\dfrac{3}{5}}$, 1

Il y a 1 maximum global en 1,2 , pour lequel la dérivée ne s'annule pas, et 1 minimum global, $-\sqrt{\dfrac{3}{5}}$. Il y a un maximum local en $\sqrt{\dfrac{3}{5}}$.



3.13 Différentielles secondes et d'ordres supérieurs

On a défini $(df)_{x0} = f\,'(x_0)\,dx$, ce qui signifie qu'en tout x_0 , on considère la fonction qui à tout nombre associe le nombre $f\,'(x_0).\Delta x$, approximation de l'accroissement $f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$;
on l'a noté de façon plus brève $df = f\,'(x)\,dx$.

De la même façon, on définit en tout x_0 la ***différentielle seconde*** $(\mathbf{d^2}\boldsymbol{f})_{\boldsymbol{x0}} = f\,''(x_0)\,(dx)^2$ ce qui signifie qu'en tout point x_0 , on considère la fonction qui à tout nombre $x_0 + \Delta x$ associe le nombre $f\,''(x_0)\,.\,(\Delta x)^2$.
Comme pour la différentielle, on notera plus brièvement $\mathbf{d^2}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}\,\mathbf{''}\,(\boldsymbol{x})\,\mathbf{d}\boldsymbol{x}^\mathbf{2}$.

Idée de la justification :
En x_0 on associe par la différentielle, à un accroissement Δx de x le nombre $f'(x_0)\,.\,\Delta x$
En $x_0 + \Delta x$, on associerait le nombre $f'(x_0+\Delta x)\,.\Delta x$
L'accroissement de ce nombre est donc $f'(x_0+\Delta x).\Delta x - f'(x_0)\,.\Delta x = (f'(x_0+\Delta x) - f'(x_0)).\Delta x$

$$= (f''(x_0).\Delta x + \Delta x.\varepsilon(\Delta x)).\,\Delta x$$
$$= f''(x_0)\,.\,(\Delta x)^2 + (\Delta x)^2\,.\varepsilon(\Delta x)$$

avec $\varepsilon(\Delta x) = 0$. L'accroissement considéré pour la différentielle est donc composé de 2 termes:
le premier est $f''(x_0).(\Delta x)^2$, et le second est un infiniment petit d'ordre supérieur en Δx.
Le premier terme décrit donc une " différentielle de la différentielle" qui est la différentielle seconde.
Plus généralement, si f est n fois dérivable, on définit la ***différentielle n-ième***: $\mathbf{d^n}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}^{\mathbf{(n)}}(\boldsymbol{x})\,.\,\mathbf{d}\boldsymbol{x}^\mathbf{n}$
ce qui signifie qu'en tout nombre x_0 où elle est définie, on associe à tout nombre $x_0+\Delta x$ le nombre

$$(\mathbf{d^n}\boldsymbol{f})_{\boldsymbol{x0}}\,(\boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}^{\mathbf{(n)}}(\boldsymbol{x_0})\,.\,(\Delta\boldsymbol{x})^\mathbf{n}$$

3.14 Applications économiques de dérivées et différentielles de fonctions numériques à 1 variable réelle

3.14.1 Taux marginal de substitution

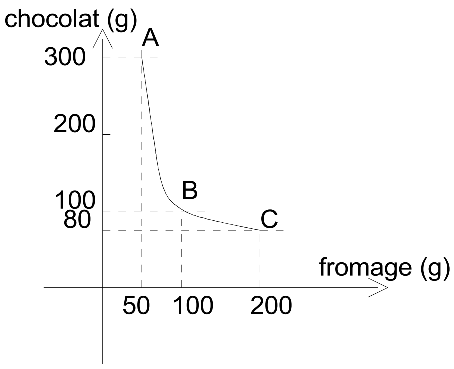
La théorie des choix du consommateur est fondée sur une représentation des choix d'un individu rationnel, en termes de préférence.

On représente graphiquement l'ensemble des choix préférés et des choix indifférents au moyen de courbes d'indifférence. Ces courbes tiennent compte d'un certain nombre de critères dits "axiomes de comportement", qui seront vus en cours d'économie.

La courbe d'indifférence ci-dessous décrit la totalité des assortiments de deux biens, chocolat et fromage, jugés équivalents par un consommateur. Par exemple le consommateur sera indifférent (cela lui procurera autant de satisfaction) aux assortiments (on dit aussi "paniers") de biens suivants:

Panier A: $\begin{cases} 300\, g \text{ de chocolat} \\ 50\, g \text{ de fromage} \end{cases}$

Panier B : $\begin{cases} 100\, g \text{ de chocolat} \\ 100\, g \text{ de fromage} \end{cases}$



Lorsqu'il passe du panier A au panier B le consommateur reste sur la même courbe d'indifférence mais il opère une certaine substitution entre deux biens. Ainsi de A à B il consomme 200g de moins de chocolat et 50g de plus de fromage.

On définit alors le ***taux de substitution*** entre les biens chocolat et fromage, comme le rapport de la quantité de bien cédé (chocolat) à la quantité de bien obtenu (fromage) qui laisse le consommateur à un même niveau de satisfaction, c'est-à-dire sur la même courbe d'indifférence.

Par exemple:

Lors du passage de A à B ce taux est : $\dfrac{\text{quantité cédée de chocolat}}{\text{quantité obtenue de fromage}} = \dfrac{200}{50} = 4$

Lors du passage de B à C ce taux est : $\dfrac{\text{quantité cédée de chocolat}}{\text{quantité obtenue de fromage}} = \dfrac{30}{100} = 0{,}2$

On remarque que ce taux dépend de l'endroit où on est sur la courbe et qu'il est positif:

$$\text{Taux de substitution} = \left|\frac{\Delta q_{bien\,cédé}}{\Delta q_{bien\,obtenu}}\right|$$

On suppose que la fonction $q_{\text{bien cédé}} = f(q_{\text{bien obtenu}})$ est dérivable , et au lieu de considérer le taux de substitution lors du passage de A à B, on peut s'intéresser à sa limite au voisinage de A, c'est-à-dire au taux de substitution instantané, appelé ***taux marginal de substitution*** et souvent noté ***TMS***.

$$\textbf{TMS} = \lim_{\Delta q_{obtenu} \to 0} \left(\left| \frac{\Delta q_{biencédé}}{\Delta q_{bienobtenu}} \right| \right) = \frac{d\, q_{biencédé}}{d\, q_{bien\,obtenu}}$$

Sur la courbe d'indifférence, le TMS en un point donné est l'opposé de la dérivée en ce point de la fonction $q_{\text{bien cédé}} = f(q_{\text{bien obtenu}})$. Cette dérivée est négative, car la quantité d'un bien doit diminuer pour que celle de l'autre bien augmente. On obtient ainsi un TMS positif.

Remarque 1. le TMS n'est pas constant et une propriété est qu'il est **décroissant** par rapport au bien obtenu.
Mathématiquement, la fonction f est convexe (f '' (x) > 0 pour tout x), donc (- f ') est décroissante.
L'interprétation économique est que lorsqu'un individu dispose d'une grande quantité d'un bien, il est prêt pour obtenir une quantité donnée d'un autre bien, à céder beaucoup plus du premier que s'il en possédait moins.
Ainsi au point A l'individu a beaucoup de chocolat et peu de fromage, il est prêt à céder 200g de chocolat pour 50g de fromage, mais ensuite ,en B il a moins de chocolat et il n'accepte d'en céder que 20g pour obtenir 100g de fromage.

Remarque 2 . On peut envisager les courbes d'indifférence ainsi : Pour un consommateur, il existe une fonction d'utilité u dépendant des 2 variables q_1, quantité de fromage et q_2, quantité de chocolat, qui exprime la satisfaction que lui procure l'obtention de q_1 fromage et q_2 chocolat. Les courbes d'indifférence sont alors des courbes de niveau de la fonction u, définies par des équations u(x,y) = constante.
Si l'on connaît l'expression de u(x,y) en fonction de x et y, les formules que vous verrez aux paragraphes Théorème des fonctions implicites et Courbes de niveau et théorème des fonctions implicites permettent d'écrire :

$$\frac{dq_2}{dq_1} = -\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial q_1}\right)}{\left(\frac{\partial u}{\partial q_2}\right)} .$$

3.14.2 Fonctions totales, moyennes et marginales

Supposons que l'évolution des dépenses d'une entreprise lorsque la production varie se traduise par la fonction suivante :

$C = Q^2 + 4Q + 30$ (C : dépenses, Q: production)

La partie (Q^2 - 4Q) est appelée ***coût variable***, 30 représente les ***coûts fixes*** et la fonction est appelée ***fonction totale*** ou ***coût total***.

Si l'on veut connaître le coût par unité produite, c'est-à-dire le ***coût moyen***, on étudiera la ***fonction moyenne*** : ici .

Enfin si l'on s'intéresse à la modification du coût lorsque la quantité produite varie "légèrement" (cette légère variation correspond en fait à une unité supplémentaire appelée unité marginale), on étudiera la ***fonction marginale*** ou ***coût marginal***. Le coût marginal ou "coût engendré par la dernière unité produite" est donc la dérivée du coût total C = f (Q): ici = 2Q - 4.
Le coût marginal n'est autre que le coût instantané lorsqu'on produit "un tout petit peu plus" c'est-à-dire une unité supplémentaire.

3.14.3 Pente d'une droite de budget, pente d'une droite d' isocoût

La courbe d'indifférence que nous avons rencontrée précédemment est le lieu des points (représentatifs de paniers de consommation) indifférents à un consommateur, c'est-à-dire qui lui procurent la même satisfaction.

Mais si du point de vue de la satisfaction de ses besoins notre consommateur apprécie autant (300g de chocolat, 50g de fromage) ou (80g de chocolat, 200g de fromage), il n'est pas certain qu'il pourra se procurer ces deux paniers. Tout dépend du prix de chaque bien et de la somme d'argent le budget) dont il dispose.

Comment représenter graphiquement la ***courbe de budget***, c'est-à-dire la contrainte monétaire à laquelle doit faire face le consommateur?

Supposons que notre individu ait un budget de 20€ et que les prix des biens soient respectivement:
$p_{chocolat}$ = 60 €/kg et $p_{fromage}$ = 40 €/kg.

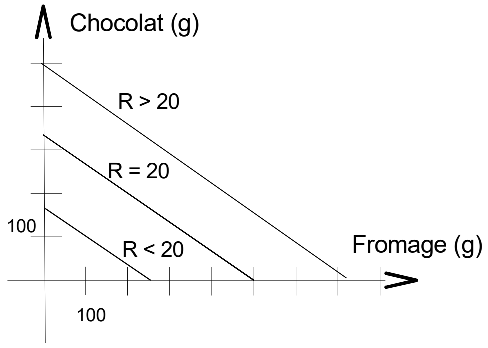
Si y est la quantité de chocolat acheté en g et x la quantité de fromage acheté en g , alors:

$$20 = \frac{60}{1000}y + \frac{40}{1000}x \qquad \text{soit } 2x + 3y - 1000 = 0.$$

La représentation graphique est donc un segment de droite de pente - d'extrémités A(0 ;) et B(500,0). La droite (AB) est appelée la ***droite de budget*** , c'est le lieu des paniers qu'il est financièrement possible d'acquérir en tenant compte du prix des biens et du budget alloué.

Plus généralement, si l'on dispose d'un budget R, on obtient une droite de budget parallèle à (AB).

En effet on a alors l'équation:
2x + 3y - 50 R = 0. Plus R est grand, plus l'ordonnée à l'origine augmente.



On peut donc remarquer que la pente de la droite de budget est non seulement la dérivée de la fonction f telle que quantité de chocolat = *f* (quantité de fromage) – la droite de budget est la représentation graphique de cette fonction – mais aussi le rapport du prix du bien obtenu par le prix du bien cédé: $|\frac{dy}{dx}|=\frac{p_{fromage}}{p_{chocolat}}=\frac{2}{3}$

Ce rapport est aussi $\left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|$, $\frac{quantité\,cédée}{quantité\,obtenue}$ car *f* est affine.

De façon plus générale, considérons deux biens 1 et 2 et notons x la quantité consommée du bien 1, y la quantité consommée du bien 2, p_x le prix unitaire du bien 1 et p_y celui du bien 2. Soit R le budget alloué. L'équation de la droite de budget est : $R = p_x . x + p_y.y$ ou

$$y=\frac{-p_x}{p_y}x+\frac{R}{p_y}$$

d'où $\left|\frac{dy}{dx}\right|=\frac{p_x}{p_y}$

On pourra retenir que la valeur absolue de la pente de la droite de budget d'équation $R = p_x .x + p_y.y$ est égale au rapport des prix $\frac{p_x}{p_y}$ (x quantité du bien en abscisse, y quantité du bien en ordonnée)

3.14.4 Elasticité. Exemple de l'élasticité de la demande par rapport au prix

On suppose que l'on connaît la ***fonction de demande*** q(p) d'un consommateur, c'est-à-dire la fonction qui exprime le lien entre les quantités demandées "q" et le prix "p" d'un bien.

Un indicateur intéressant, qui traduira la sensibilité de la demande aux variations de prix est le rapport $\frac{\Delta q}{\Delta p}$. Il permet de répondre à la question: "quelle est la variation de quantité qui correspond à une variation de prix Δp ?". Mais nous ne le retiendrons pas car il y a un problème d'unités. En effet Δq est exprimée en unités physiques (litres, kilogrammes, exemplaires, etc. ...) et en unités monétaires. Le rapport a donc une dimension (l/€ , kg/€, ...) .

Nous préférerions un indicateur **sans dimension** pour **comparer les demandes de biens différents**, exprimés dans des unités différentes. Il s'agit de répondre à la question : « de quel pourcentage varie la quantité demandée d'un bien lorsque son prix varie d'un pourcentage donné ? ».

Ainsi au lieu du rapport des accroissements, nous considérons le rapport des accroissements relatifs $\frac{\Delta q}{q}$ et $\frac{\Delta p}{p}$.

On définit l'élasticité de la demande q d'un bien par rapport à son prix p:

$$\frac{\Delta q/q}{\Delta p/p}=\frac{accroissement\,relatif\,de\,la\,quantité}{accroissement\,relatif\,du\,prix}$$

Lorsque nous calculons l'élasticité **ε en un point** de la courbe de demande, c'est-à-dire pour un accroissement infinitésimal du prix, on obtient une formule qui fait intervenir dp et dq à la place de Δp et Δq:

$$\frac{\frac{dq}{q}}{\frac{dp}{p}}=\frac{d(lnq)}{d(\ln p)}=\frac{dq}{dp}\times\frac{p}{q}=q'(p)\frac{p}{q}$$

Cela revient à prendre la limite de $\frac{\Delta q/q}{\Delta p/q}$ quand Δp tend vers 0. C'est toujours la même idée de fonction moyenne et fonction marginale. En effet, si on considère la fonction f : p ↦ f(p) = q, $\frac{dq}{dp}$ est la fonction marginale en termes économiques – la dérivée en termes mathématiques – de f et $\frac{p}{q}$ est l'inverse de la fonction moyenne de f. On pourra retenir: $\frac{dq/q}{dp/p} = \frac{fonction\,marginale}{fonction\,moyenne}$

D'ordinaire lorsque le prix d'un bien augmente on en consomme moins, ce qui veut dire que ε est négatif. Mais comme pour le taux marginal de substitution les économistes préfèrent souvent exprimer le résultat en **valeur absolue**:

$$\varepsilon = \left|\frac{dq/q}{dp/p}\right| = \left|\frac{dq}{dp} \times \frac{p}{q}\right|$$

* Si ε = 0 : les prix ont beau varier, la demande ne varie pas. Un tel bien est dit parfaitement inélastique (dq/dp = 0 et q = constante)

* Si 0 <ε<1 une augmentation de prix de n% s'accompagne d'une baisse de la demande de moins de n%. De même une baisse de prix de n% entraîne une augmentation de demande de moins de n%. Le bien est dit inélastique.

* Si ε = 1 les variations du prix et de la quantité sont égales en pourcentage.

* Si ε > 1 la variation relative de la quantité est supérieure à la variation relative de prix. Le bien est dit élastique.

*Si ε →+∞, une variation infime du prix du bien entraîne une variation gigantesque de la demande. Le bien est dit parfaitement élastique.

3.14.5 Fonctions composées de fonctions de 2 variables

1er cas ; fonctions composées de fonctions de deux variables :
pour 2 variables : f(x,y) = g(u(x,y), v(x,y))

par exemple : $f(x,y)=(x+2\mathrm{y})(x-y^2)$
on peut remarquer que $f(x,y)=g(u(x,y),v(x,y))$ en posant $g:(u,v)\in\mathbb{R}^2\mapsto uv$

On peut calculer ses dérivées partielles de deux façons: en développant et en dérivant directement par rapport à x et y :

$f(x,y)=-2\mathrm{y}^3+x^2-xy^2+2\mathrm{xy}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2\mathrm{x}-y^2+2y$ $\dfrac{\partial f}{\partial y}=-6y^2-2xy+2x$

Ou bien en posant $u(x,y)=x+2\mathrm{y}, v(x,y)=x-y^2$.
$f(x,y)=u(x,y).v(x,y)=g(u(x,y),v(x,y))$ en posant $g:(u,v)\in\mathbb{R}^2\longmapsto uv$. La propriété suivante explique comment dériver cette expression.

Propriété 10: Si u, v sont 2 fonctions numériques de 2 variables, définies et différentiables sur un domaine D ouvert, et g est une fonction numérique de 2 variables, définie et différentiable sur un ouvert E avec $u(\mathrm{D})\times v(\mathrm{D})\subset \mathrm{E}$,

alors : $f:(x,y)\in\mathrm{IR}^2\mapsto g(u(x,y),v(x,y))$ est différentiable sur D, avec

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial u}\times\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial v}\times\frac{\partial v}{\partial x}\quad\text{et}\quad\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial g}{\partial u}\times\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial v}\times\frac{\partial v}{\partial y}$$

Pour la fonction de l'exemple, $\dfrac{\partial g}{\partial v}=u$, $\dfrac{\partial g}{\partial u}=v$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}=1$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=2$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}=1$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}=-2y$.

D'où $\dfrac{\partial f}{\partial x}=v\times 1+u\times 1=2x+2y-y^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial y}=v\times 2+u\times(-2\mathrm{y})=2(x-y^2)-2y(x+2y)=-6y^2-2xy+2x$$

2nd cas : Fonction composée d'une fonction numérique de deux variables f(u, v), elles- mêmes fonctions d'une même variable.

F(t) = g(u(t), v(t)) . *F est nue fonction d'une seule variable*

C'est un **cas particulier du précédent**, où il n'y a **qu'une seule variable, t :**. Ici t joue le rôle d'x dans le cas précédent, et il n'y a pas d'y. On utilise les m^mes formules , à ceci près que : les dérivées partielles par rapport à x sont remplacées par des dérivées – simples, pas partielles – par rapport à t , les dérivées partielles par rapport à y sont supprimées.

On considère la fonction d'une seule variable : $F:t\mapsto F(t)=g(u(t),v(t))$

Si g est différentiable sur un domaine D ouvert et que les fonctions t $\mapsto$ u(t) , t $\mapsto$ v(t) sont dérivables sur un domaine E tel que $f(\mathrm{E})\subset \mathrm{D}$, alors F est dérivable sur E , et

$$F'(t)=u'(t)\times\frac{\partial g}{\partial u}(u(t),v(t))+v'(t)\frac{\partial g}{\partial v}(u(t),v(t))$$

Exemple : $g(u,v)=u^2v+3uv$, on pose $u(t)=e^t$ et $v(t)=4t$

Exprimer $F(t)=g(e^t,4\mathrm{t})$, puis $F'(t)$ en faisant intervenir la formule précédente.

3ème cas : f (x,y) = G(u (x,y))

C'est un cas particulier du 1er cas, où G est une fonction d'une variable u seulement. Il n'y a pas de v.

Exemple : $\mathrm{G}:t\in\mathbb{R}\mapsto \mathrm{G}(t)=t\,\mathrm{e}^{-t}$ et $u:(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto xy^2$

alors $f(x,y) = xy^2\ e^{-xy^2}$

Si u est définie et différentiable sur un domaine D (de $\mathbb{R}^2$) ouvert et G définie et dérivable sur un domaine E (de $\mathbb{R}$) tel que u(D) $\subset$ E, alors $f = G \circ u$ est différentiable sur D, avec $\frac{\partial f}{\partial x}=G'(u(x,y))\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=G'(u(x,y))\frac{\partial u}{\partial y}$

3.14.6 Dérivées partielles d'ordre supérieur à 1

Si les dérivées partielles d'une fonction sur un domaine admettent elles-mêmes des dérivées partielles en un point, on obtient des dérivées partielles secondes , c'est-à-dire d'ordre 2, et on peut recommencer , tant que l'on obtient des fonctions admettant des dérivées partielles, jusqu'à un ordre n quelconque.
Les dérivées d'ordre 2 interviendront dans la recherche d'extrema.

Par exemple sur $\mathbb{R}^2$ la fonction $f : (x, y) \in \mathrm{IR}^2 \mapsto x^2y + y^2e^{3x}$ admet sur tout $\mathbb{R}^2$ 2 dérivées partielles d'ordre 1:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xy+3y^2e^{3x} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=x^2+2ye^{3x}$$

elle admet aussi des dérivées secondes , a priori il y en a 4 :

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$, notée $\frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}$ ou $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ou encore f''_{xx} , vaut $2y+9y^2e^{3x}$

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$, notée pour l'instant $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ ou encore f''_{xy} , vaut $2x+6ye^{3x}$

$\frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2} = 2\ e^{3x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 2x + 6ye^{3x}$

On remarque que deux d'entre elles sont égales, c'est une propriété générale :

3.14.7 Théorème de Schwarz

Propriété 11, théorème de Schwarz

Si une fonction f admet, au voisinage d'un point A (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$ des dérivées partielles secondes par rapport aux variables x et y, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ et que ces dérivées partielles secondes sont continues en A **, alors** : $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0, y_0)$

Un **voisinage** d'un point $(x_à , y_0)$ de $\mathbb{R}^2$ est un ensemble de $\mathbb{R}^2$ contenant tout un disque de rayon non nul, centré en (x_0 , y_0) .

L'ordre de dérivation n'influe pas sur les dérivées partielles secondes continues.

Il n'y a donc, <u>si toutes les dérivées partielles secondes sont continues</u> , que 3 différentielles partielles secondes pour une fonction de 2 variables, et non 4

De la même façon, si une fonction f a des dérivées partielles d'ordre n continues en un point A, alors l'ordre des dérivations n'importe pas . Ainsi $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial x}$ ...

3.14.7.1 Une réciproque, dans certains cas : théorème de Poincaré

On peut se demander si cette condition $(x_0, y_0)= (x_0, y_0)$ est aussi suffisante pour que f soit différentiable en (x_0, y_0)**.**
Cela est vrai dans certains cas, c'est ce qu'indique le théorème de Poincaré.

Propriété 12, Théorème de Poincaré
Soient 2 fonctions de 2 variables, u et v définies sur un sous-ensemble E de $\mathbb{R}^2$, avec

- E ouvert : pour tout point M de E , il existe un disque centré en M, de rayon non nul, contenu dans E
- E étoilé : il existe un point P_0 pour lequel tout point M , le segment $[P_0M]$ tout entier est dans E .
- u et v différentiables, de dérivées partielles continues.
- $\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$ pour tout (x,y) de E

Alors, d'après le théorème de Poincaré
Il existe (au moins) une fonction f définie et différentiable sur l'ensemble E, telle que pour (x,y) de $\mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=u(x,y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=v(x,y)$$

Exemple 15 : a) Pour quelle(s) valeur(s) du nombre m l'expression suivante :

$$m\,xy\,\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y$$

peut-elle être la différentielle d'une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$?
b) cette expression est-elle la différentielle d'une fonction ?

3.14.8 Théorème des fonctions implicites

1er exemple : définition d'une fonction implicite par les méthodes du chapitre 2 .

Considérons la fonction de 2 variables $f:(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto f(x,y)=\frac{\sin y}{2}+x+2y$.

Pour ***x* fixé**, on peut montrer avec les méthodes du chapitre 2 – on utilise le théorème des valeurs intermédiaires et le fait que la fonction $y\in\mathbb{R}\mapsto \frac{\sin y}{2}+2y$ est strictement croissante – qu'il existe un, seul, y de $\mathbb{R}$ tel que

$\frac{\sin y}{2}+2y=-x$, c'est-à-dire tel que (E) $\frac{\sin y}{2}+2y+x=0$.

On ne peut pas définir y sous la forme $y = g(x)$, où g serait une composition des fonctions usuelles. Pourtant, l'équation (E) définit bien un y pour tout x de IR, c'est-à-dire y comme fonction d' x.
On dit que cette égalité détermine y comme **fonction implicite d'*x***.

2nd exemple : les théorèmes du chapitre 2 sont en général plus délicats à utiliser, par exemple pour :

$$\text{(E')} \quad \frac{\sin(xy)}{2}+x+2\mathrm{y}=0 \ .$$

Pour x fixé avec $|x| < 4$, la fonction d'y obtenue est strictement monotone et on peut utiliser les théorèmes du chapitre 2, mais ce n'est pas le cas pour $|x| > 4$.

De plus, ces théorèmes ne permettent pas de préciser l'influence d'une variation d'x sur celle de la solution y obtenue. Le théorème suivant est plus général. Nous ne verrons cette année que le cas de 2 variables.
3ème exemple : Pour tout (x, y) de $\mathbb{R}$, posons $w(x,y) = x \sin(x+y)$
Cherchons si l'égalité (E'') $x \sin(x+y) = 0$ permet de définir y comme fonction de x :
Remarquons déjà que pour $x = 0$, il y a une infinité de solutions y : en fait, l'égalité est satisfaite pour tout y de $\mathbb{R}$.
Dans ce cas, on ne peut pas définir y comme fonction d'x. Il serait nécessaire, et suffisant, qu'il existe pour chaque x une seule solution y.
Remarquons ensuite que pour $x \neq 0$, il y a encore une infinité de solutions y : $y = - x + k\pi$, pour tout k entier. Cette égalité ne permet donc pas non plus, à elle seule, de définir y comme fonction d'x .
Mais si on impose que ***y* soit dans un certain intervalle assez petit**, par exemple
$]-x + \pi/2 ; -x + 3\pi/2[$ il n'existe, pour chaque x fixé, **qu'un seul *y*** satisfaisant à (E'') $x\sin(x+y) = 0$. Associer à chaque x de $\mathbb{R}$ cette valeur correspondante d'y permet de définir y comme fonction d'x.

Propriété 13. Théorème des fonctions implicites.

Si une fonction f

- est définie et a des dérivées partielles continues sur un ensemble ouvert Ω contenant (x_0, y_0),
- vérifie $f(x_0, y_0) = m$, m étant un nombre fixé
- satisfait à $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$

Alors,

1°) il existe un intervalle ouvert A contenant x_0, un intervalle ouvert B contenant y_0, avec A×B inclus dans Ω , et une fonction $\varphi : x \in A \mapsto \varphi(x)$ définie, continue sur A , telle que pour tout (x,y) de A× B , $f(x, y) = m \Leftrightarrow y = \varphi(x)$

2°) De plus, φ est dérivable sur A , avec pour tout x de A :

$$\phi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \phi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \phi(x))}$$

3°) En particulier, φ est dérivable en x_0, avec $\phi'(x_0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, \phi(x_0))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \phi(x_0))}$

Preuve : *cf.*Analyse mathématique pour économistes, G. Archinard et B. Guerrien, Economica, 4e édition, chap XVIII, p.302.

Remarque : il existe aussi un résultat utilisant à la place de la condition a, la condition moins restrictive a' suivante : f est définie, continue sur un ensemble ouvert Ω contenant (x_0,y_0), admet une dérivée partielle relativement à y, continue sur Ω, et admet une dérivée partielle par rapport à x en (x_0, y_0).
Dans ce cas les conclusions **1°)** et **3°)** restent valables (mais pas 2°).

Exemple 16 : Soit la fonction $f(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{\sin(xy)}{2} + x + 2y$. On remarque que $f(0, 3) = 6$, f est définie, continue, sur $\mathbb{R}^2$, elle possède des dérivées partielles continues sur $\mathbb{R}^2$ et en particulier en (0, 3),

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y}{2}\cos(xy) + 1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{2}\cos(xy) + 2$, de plus $\frac{\partial f}{\partial y}(0,3) = 2 \neq 0$

Donc l'équation (E') $\frac{\sin(xy)}{2} + x + 2y = 6$ définit, sur un ouvert contenant (0, 3) , une fonction implicite φ par : $\frac{\sin(x\phi(x))}{2} + x + 2\phi(x) = 6$

De plus, bien qu'on ne puisse exprimer explicitement φ , on peut indiquer que φ est dérivable en 0, avec :

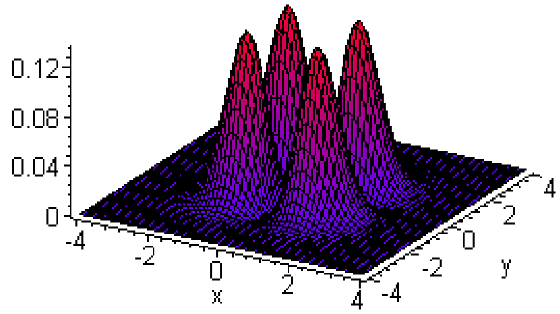
$\phi'(0) = -\frac{1}{2}$.

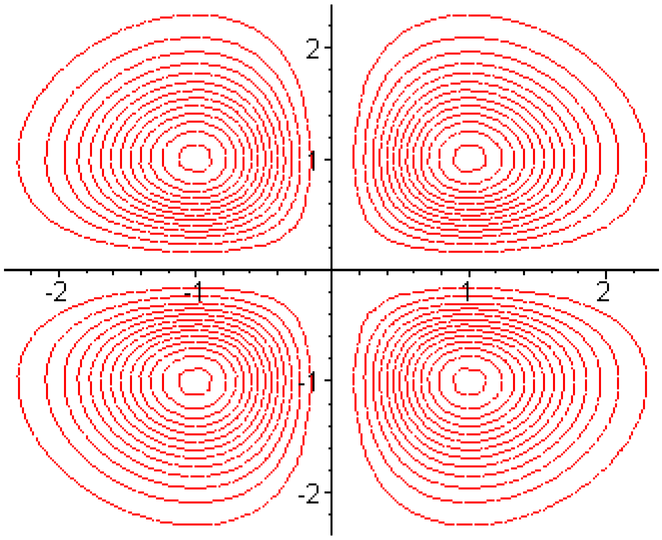
3.14.9 Courbes de niveau et théorème des fonctions implicites

Considérons une fonction de 2 variables g : $(x, y) \in D_g \mapsto g(x,y)$.

Pour une valeur fixée z_0, on peut s'intéresser à l'ensemble des points du plan, de coordonnée (x,y), tels que (E) : $g(x,y) = z_0$,
qu'on peut écrire aussi : (E') : $g(x,y) - z_0 = 0$

S'il y a des solutions, cet ensemble est appelé **la courbe de niveau z_0 de g**.





Voici le graphe d'une fonction de deux variables

Et voici les courbes de niveau correspondantes

L'équation (E) définit cet ensemble de manière implicite, c'est-à-dire qu'elle n'explique pas comment obtenir y en fonction de x, en donnant une fonction h telle que (E) $\Leftrightarrow$y =h(x) ou telle que (E) $\Leftrightarrow$x =h(y).
Le théorème des fonctions implicites indique que, *si on connaît une valeur z_0 atteinte par un couple (x_0, y_0)*, et si les hypothèses du théorème sont satisfaites, alors il existe un voisinage de (x_0, y_0) dans lequel (E'), et donc aussi (E), est équivalente à la donnée explicite d'y en fonction d'x .
Posons f(x,y) = g(x,y) – z_0.Si les hypothèses du théorème des fonctions implicites sont satisfaites par f en (x_0, y_0) , c'est-à-dire si les conditions a. et c. sont satisfaites par g, alors il existe un voisinage de (x_0, y_0) et une fonction φ définie dans ce voisinage telle que, pour tout (x,y) de ce voisinage, on ait : (E') $\Leftrightarrow$ y = φ (x).

Ce théorème indique donc que

localement – c'est-à-dire sur ce voisinage de (x_0, y_0) , pas forcément sur tout l'ensemble de définition de la fonction f – la courbe de niveau peut être définie par une équation cartésienne y = φ(x).

Malheureusement, ce théorème ne donne pas la fonction φ.
mais il indique la pente de la tangente à la courbe de niveau en (x_0, y_0) :

$$y'(x)=\phi'(x_0)= -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_{0,}\phi(x_0))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_{0,}\phi(x_0))}$$

Dans l'exemple, considérons la courbe de niveau 0,01. L'équation (E) g(x,y) – 0,01 = 0 ne permet pas de définir y comme fonction d'x sur R^2 car d'après le graphique pour x = 2, il y a 4 valeurs y solutions, et pour x = 0, il n'y en a aucune . En revanche, si l'on restreint x à l'intervalle]1, 2[et y à l'intervalle]1, 3[l'équation (E) définit y comme fonction d'x : pour chaque valeur d'x de]1, 2[, il y a un, et un seul y solution.

Comme illustration, choisissons un cas exceptionnel, où on peut expliciter φ :
Considérons g : (x,y) ∊ $\mathbb{R}^2$ $\mapsto$ g(x,y) = x^2+y^2. Pour le point ($x_0=3$, $y_0=4$), on a g(3,4) = 25
On peut s'intéresser à l'ensemble des points (x,y) de $\mathbb{R}^2$ pour lesquels g(x,y)=25.
La courbe de niveau 25 est donc la courbe d'équation $x^2+y^2 = 25$, c'est-à-dire le cercle de centre O et de rayon 5.
Posons f(x,y)= g(x,y) – 25.
a. Cette fonction est définie et a des dérivées partielles continues sur tout $\mathbb{R}^2$:
$\frac{\partial f}{\partial x}$ (x,y) = 2x et $\frac{\partial f}{\partial y}$ (x,y)=2y

b. $f(3,4) = 0$

c. $\dfrac{\partial f}{\partial y}(3,4) = 8 \neq 0$

On peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites, qui indique qu'il existe un voisinage de (3,4) et une fonction φ d'une variable réelle, tels que pour tout(x,y) de ce voisinage, g(x,y) = 25 ⇔ y = φ(x).

Le théorème n'indique pas de quel voisinage et de quelle fonction φ il s'agit. Dans cet exemple, exceptionnellement, on peut les préciser.

On peut prendre, par exemple, mais il existe d'autres possibilités,

pour voisinage de (3,4) : V ={(x,y)∈ $\mathbb{R}^2$; x>0 et y >0}

Et pour fonction φ : x ∈ $\mathbb{R}^{+*}$ ↦ $\sqrt{25-x^2}$

On a bien, pour tout (x,y) de V, $x^2 + y^2 = 25 \Leftrightarrow y = \sqrt{25-x^2}$

Remarquons qu'on ne peut pas de trouver une telle fonction φ permettant de prendre pour voisinage tout $\mathbb{R}^2$: pour pouvoir écrire $x^2 + y^2 = 25 \Leftrightarrow y = \varphi(x)$, il faut qu'il y ait , pour chaque x, une seule solution en y à l'équation $y^2 = 25 - x^2$, ce qui n'est pas vrai sur $\mathbb{R}^2$.

A titre d'exercice, on peut calculer φ' (3) et $-\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(3,4)}{\frac{\partial f}{\partial y}(3,4)}$ pour vérifier qu'il s'agit de la même valeur.

3.14.10 Taux marginal de substitution

Deux variables économiques déterminent un résultat, par exemple une quantité de travail *x* et une quantité de capital *y* déterminent une production z (x,y) , ou encore les quantités consommées *x* et *y* de 2 produits déterminent un coût z(x,y).

A partir de valeurs x_0 , y_0 , $z(x_0, y_0)$ fixées, une variable *x* évolue. On peut s'intéresser à l'évolution d'*y* qui en résulte pour conserver *z*(*x*,*y*) constant. Par exemple, la quantité de main d'oeuvre *x* évolue, on s'intéresse à la variation du capital investi *y* pour conserver la même production . Ou alors, on s'intéresse à la variation de la quantité *y* d'un second produit, lorsque la quantité *x* d'un premier produit évolue, pour conserver un même coût total *z*(*x*, *y*).

Si la fonction *z* satisfait aux conditions du théorème des fonctions implicites au voisinage de (x_0, y_0), en particulier si $\dfrac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, on peut alors affirmer qu'il existe, au voisinage de $x = x_0$ et $y = y_0$ une fonction $y = y(x)$ permettant de compenser les variations d'*x*. Pour conserver la valeur de *z* (*x* , *y*) constante.

La dérivée de cette fonction *y* est définie par : $y'(x) = -\dfrac{\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)}$. Elle est dans la plupart des cas négative – par exemple si la quantité d'un produit augmente, alors pour conserver le même budget il faut diminuer la quantité de l'autre produit – , les économistes considèrent plutôt son opposé et le nomment Taux marginal de substitution

$\boldsymbol{TMS} = -y'(x) = +\dfrac{\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)}$ c'est l'opposé de la variation marginale d'*y* en fonction d'*x* , en (x_0, y_0) sur la courbe de niveau de la fonction *z* dépendant d'*x* et *y*.

Chapitre 3 - Dérivée, primitive, différentielle. 3ème partie.

3.15 Primitives de fonctions numériques d'une variable réelle

3.15.1 Définition et premières propriétés

Définition 8

F et f sont deux fonctions définies sur un ensemble de définition D. F est dite primitive de f sur D si f est la dérivée de F.

Exemple : la fonction $F_1 : x \in IR \alpha x^2$ est une primitive sur IR de la fonction f: $x \in IR \alpha 2x$.
la fonction $F_2 : x \in IR \alpha x^2 +3$ est aussi une primitive de f sur IR.

Propriété 14 : Si F est une primitive de f sur un intervalle I, alors toutes les primitives de f sur cet intervalle sont de la forme F + constante.

Attention pour appliquer ce théorème il faut s'assurer que l'ensemble de définition envisagé est un intervalle.
Preuve du théorème :
Soit F une primitive d'une fonction f sur un intervalle I
a) Si F et G sont deux primitives d'une même fonction f sur un intervalle I, alors pour tout z de I, (G- F) ' (z) = G'(z) - F'(z) = f(z) - f(z) = 0. Soit a un nombre de I. Posons C = G(a) - F(a). Pour tout x de I, on a d'après le théorème de Rolle (cf. chap. 3): il existe un nombre z , dépendant de x, compris entre x et a , tel que (G-F) (x) - (G-F)(a) = (x - a) (G-F)' (z) . D'où (G-F) (x) - (G-F)(a) = (x-a) (G'(z) - F'(z))=(x-a) (f(s) -f(z)=0. Donc G(x) = F(x) + C , pour tout x de I.
b) Réciproquement, si G est une fonction définie par G(x) = F(x) + C pour tout x de I, où C est un nombre constant, alors bien sûr G' = F' , donc G est une primitive de f sur I
Remarque : si on cherche une primitive sur une réunion d'intervalles disjoints, il peut y avoir une constante différente sur chaque intervalle.
Exemple : considérons la fonction définie sur IR^* par $f(x) = 2x$ pour $x < 0$, $f(x) = 1/x^2$ pour $x>0$.
La fonction F définie par $F(x) = x^2$ pour $x < 0$, $F(x) = -1/x$ pour $x> 0$ est une primitive de f sur IR^* ,
G définie par $G(x) = x^2 +4$ pour $x < 0$, $G(x) = -1/x + 6$ pour $x> 0$ est une autre primitive de f sur IR^*.
Propriété 15 : si f est une fonction continue sur un intervalle I, alors elle admet au moins une primitive F sur I
Ce théorème sera prouvé par le théorème 5 un peu plus loin.
Remarques :
Il y a donc aussi une infinité d'autres primitives
Si f est continue par morceaux, elle admet (au moins) une primitive sur chacun des intervalles, en les regroupant on obtient une primitive de F sur la réunion de ces intervalles. C'est le cas de la fonction f de l'exemple précédent , qui est continue sur]-∞ , 0 [U] 0 , +∞ [mais pas en 0. Elle admet comme primitive F sur]-∞ , 0 [U] 0 , +∞ [.
Pour une fonction f construite à l'aide des fonctions usuelles, il peut arriver que ses primitives s'expriment aussi simplement à l'aide des fonctions usuelles : par exemple une primitive de f : $x \in [1,10[\alpha 2x + 1$ est F: $x \in [1,10[\alpha x^2+ x + C$, où C est n'importe quelle constante. Mais cela n'est pas toujours le cas, par exemple la fonction $x \in IR \alpha e^{x2}$ est continue sur IR et admet donc des primitives sur IR mais on ne peut pas les exprimer à l'aide d'opérations simples sur les fonctions usuelles.
Propriété 16: si f est une fonction continue sur un intervalle, x_0 est un nombre de cet intervalle, y_0 un nombre réel, il existe une, seule, primitive de f sur cet intervalle prenant en x_0 la valeur y_0.

Preuve : d'après le thé 2, f a au moins une primitive F_1 sur cet intervalle. La fonction $F = F_1 - F_1(x_0) +y_0$ est aussi une primitive de f sur I, avec $F(x_0) = y_0$. De plus toute autre primitive G de f sur I s'écrit F + c , où c est un nombre constant. En particulier $G(x_0) = F(x_0) + c = y_0+ c$. Donc G ne prend la valeur y_0 en x_0 que si c = 0, c'est-à-dire si G = F.
Application : Définition de la fonction ln :
La fonction f : $x \in]0,+\infty[\alpha 1/x$ est continue sur]0, +∞[. Elle admet donc une, seule, primitive F sur cet intervalle telle que F(1) = 0. Cette primitive est appelée la fonction ln.

Propriété 17 : Si F et G sont des primitives de f et g sur un ensemble de définition D, alors pour tous nombres réels a,b, aF + bG est une primitive de af + bg sur D.
La preuve est très simple : (aF + bG) ' = a F' + b G' = af + bg
Attention ! En revanche FG n'est , bien sûr, pas forcément une primitive de fg !

3.15.2 Primitives usuelles

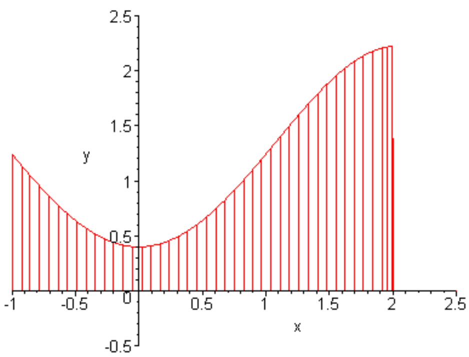
il suffit d'inverser le tableau des dérivées

Fonction	Primitive	Définie sur
a, constant	ax + cste	IR
x^n, $n \neq -1$ En particulier, $= x^{1/2}$	+cste $x^{3/2}$ + cste	$\mathbb{R}$ si n entier >0, $\mathbb{R}^*$ si n entier ≤ 0 $\mathbb{R}_+^*$ si n non entier $\mathbb{R}_+$
	ln (|x|) + cste	$\mathbb{R}^*$

Fonction	Primitive	définie sur
e^{ax}	$\frac{1}{a}e^{ax}$ + cste	IR
ln(x)	xln(x)- x+cste	$\mathbb{R}_+^*$
cos x	sin x + cste	IR
sin x	-cos x+cste	IR
$f' f^k$, $k \neq -1$	$\frac{1}{k+1} f^{k+1}$	k non entier : ensemble où f >0 k entier <0 : ensemble où f$\neq$ 0 k entier $\geq$ 0 : domaine de déf d'f
	ln(|f|)	Ensemble où f $\neq$ 0
$f' e^f$	e^f	Domaine de déf d'f

3.15.3 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Une fonction continue par morceaux est une fonction dont l'ensemble de définition est la réunion d'un nombre fini d'intervalles, sur lesquels la fonction est continue.
Cas d'une fonction positive :
f désigne une fonction définie sur un intervalle fermé [a;b], qui prend des valeurs toutes de même signe.
On s'intéresse à l'aire, si elle existe , délimitée par l'intervalle [a,b], la courbe représentative de f et l'axe des abscisses.



Si f est définie sur la réunion d'intervalles fermés $I = I_1 \cup I_2 \cup ... \cup I_n$, l'aire ainsi définie sur I est la somme des aires sur les intervalles $I_1, I_2, ... I_n$
Cas d'une fonction n'ayant pas un signe constant
Si on peut découper l'intervalle de définition en intervalles sur lesquels f a un signe constant, on affecte à chaque aire le signe de f, et on considère que l'aire totale est la somme de ces aires munies de ces signes , si cette somme est un nombre fini.
.
Définition 9 : dans tous les cas, si cette aire existe et qu'elle est finie , on dit que ***f est intégrable sur I***., l'aire calculée est appelée **l'intégrale de f sur I,** on la note
Par exemple, . C'est l'aire du triangle hachuré.
Remarques
Cette aire est un nombre fixe, la lettre x dans la notation ne désigne pas un nombre en particulier, son seul rôle est de décrire la fonction f .On peut tout aussi bien écrire : ou ou ...
Entre un point isolé et l'axe des abscisses, il y a un segment. Un segment a une aire nulle (c'est l'aire d'un rectangle de largeur nulle). Donc si l'on change la valeur de f en ***1 seul point*** (ou en un nombre fini de points), la valeur de l'aire ***est inchangée.***

3.15.4 Cas d'une fonction continue f sur un intervalle [a,b]

Propriété 18 : Si f est continue sur [a,b] , elle y admet (au moins) une primitive F sur [a,b] et : = F(b) - F(a)
Ce théorème est prouvé par le th 5, en prenant x = b.
Remarque : f admet une infinité de primitives sur[a,b], mais elles ne diffèrent toutes que d'une constante, la différence F(b) - F(a) ne dépend donc pas de la primitive F choisie.
Fonction f continue sur un intervalle ouvert]a, b[:
f admet encore une primitive , sur]a,b[

Définition 10

Si F(x) et F(x) existent et sont finies, alors on pose
= F(x) - F(x)

3.15.5 Fonction f continue par morceaux

f, définie sur un intervalle I= $[a_1, a_{n+1}]$, est continue sur $[a_1, a_2[$,
$]a_2, a_3[$, ... $]a_k, a_{k+1}]$, mais pas en a_2, a_3, ...a_k.
On peut calculer les aires, si elles existent, sur ces intervalles.
L'aire sur I est alors la somme des aires sur ces intervalles.

3.15.6 Opérations

si b > a, on définit : de plus, , on alors :
propriété 0 : pour toute fonction f intégrable sur I, pour tous a,b,c de I:

Attention ceci est vrai quels que soient a,b,c, dans I , même si a<c<b par exemple.
si f, g sont intégrables sur [a,b] ,α , β réels, alors

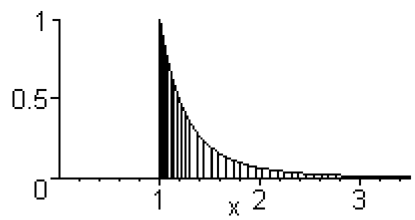
3.15.7 Intégrale fonction d'une borne

Si f est intégrable sur I = [a,b] , on peut définir pour tout x de I . :
Théorème 0 : (i) si f est continue sur I= [a,b], la fonction F : x I est dérivable sur I , de dérivée f.
(ii) F est *la* primitive de f sur I s'annulant en a .

Preuve de (i) : Il suffit de prouver que F est dérivable, ,avec F' =f.
. Soit x_0 un nombre de [a, b]. On suppose que f est continue sur [a,b] , donc en x_0. Donc : $f(x_0+u) = f(x_0) + \varepsilon(u)$, avec $\varepsilon(u) = 0$.
a) Posons M(h) =si h >0 ou M(h) =si h < 0. On a donc M(h) = 0. (1)
b) F(x+h)=== F(x) + =F(x) + h $f(x_0)$+ , Donc = $f(x_0)$ + . (2)
c) Or - $|M(h)| \leq \varepsilon(u) \leq |M(h)|$, pour tout u de [x,x+h] ou [x+h, x] donc , d'où - $|M(h)| \leq \leq |M(h)|$, donc, d'après (1), =0. (3)
d) D'après (2) et (3), **= f(x_0)**. Donc F est dérivable en x_0, avec $F'(x_0) = f(x_0)$.
Preuve de (ii) F(a) = . De plus, d'après le th1 , il n'y a pas d'autre primitive de f sur [a,b] telle que F(a) = 0.

3.15.8 Intégrales généralisées

Si existe , et est finie, on pose par **définition** :
=
De même, on définit = si cette limite existe
Enfin, on pose = + si ces deux intégrales existent.
De même , si f n'est pas définie en b mais que existe ,
on définit =
Exemples :
a) = - - (-), donc =



b) =1 - cos x. Ceci n'a pas de limite finie en $+\infty$. On ne pourrait donc pas définir

3.15.9 Intégration par parties

Il s'agit d'une méthode de calcul qui permet parfois de trouver une primitive — et donc de calculer une intégrale — qui ne se trouve pas directement dans la table des primitives usuelles.
Théorème 0 : Si F et G sont deux fonctions dérivables , de dérivées continues sur un intervalle I, alors pour tous a,b de I, avec a < b,

Preuve : remarquons que , cette intégrale étant bien définie puisque (FG)'= F'G+ FG' est continue sur I
d'où
d'où .
donc

Remarque : on peut énoncer le même théorème pour des intégrales généralisées :

.Si les limites ,,existent et sont finies.
Exemple : calculer .: On cherche à dériver le facteur 2t , car sa dérivée est simple, en intégrant le facteur e^{3t}, dont on connaît une primitive simple: $e^{3t}/3$. On pose $F(t) = 2t$, $G'(t) = e^{3t}$, $F'(t) = 2$, $G(t) = e^{3t} / 3$
$=20\ e^{30}/3 - 0 - (e^{30} - 1)$.

Références bibliographiques
Cet ouvrage est simple à lire et riche en applications économiques:
[1] Les mathématiques de l'économiste , G. Poulalion et G. Pupion, 2e édition, Vuibert.
Cet ouvrage est plus complet et plus précis :
[2] Analyse mathématique pour économistes, G.Archinard et B. Guerrien, Economica