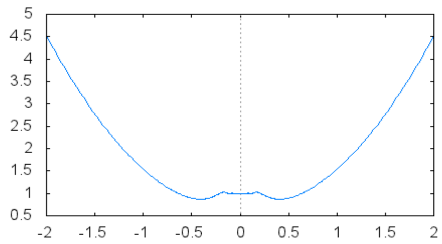
université PARIS-SACLAY
FACULTÉ JEAN MONNET
DROIT-ÉCONOMIE-GESTION

Licence Economie- Gestion 1ère année. Mathématiques.
Cours de P. Beau.

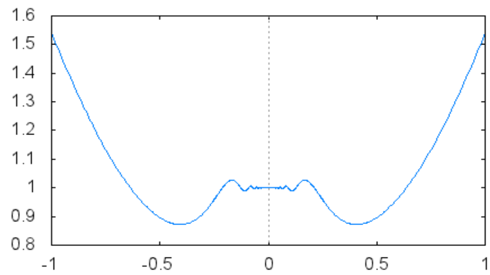
Chapitre 2 . Limites, continuité.

2. 1 Limite finie en un nombre fini

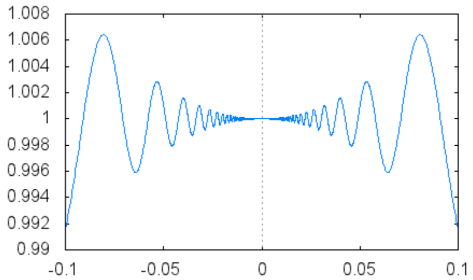
Considérons la fonction , définie sur $I\!R$ * : g : x $\mapsto$ 1+ x² cos(1/x) . Elle **n'est pas définie en 0**. Observons son comportement **au voisinage de x = 0** .
Sur l'intervalle [-2 ; 2] :



$-2 < x < 2$
$-0{,}5 < g(x) < 4{,}5$



$-1 < x < 1$
$0{,}9 < g(x) < 1{,}5$; g(x) ≈ 1 à +/-0,5 près



$-0{,}1 < x < 0{,}1$
$-0{,}99 < g(x) < 1{,}008$; g(x) ≈ 1 à +/-0,01 près

g (x) semble pouvoir rester **aussi près de 1 que l'on veut**, dès que l'on se restreint à **x assez près de 0**.

- **Quelle que soit la précision p choisie, aussi fine soit-elle, pour que g (x) ≈ 1 à +/- p près , il suffit que l'on restreigne x à un intervalle assez petit autour de 0**

- En langage mathématique :
quelle que soit p > 0 , il existe un intervalle I =]0-a , 0+a[, dépendant de p , tel que pour tout x de I différent de 0 : $1-p \leq g(x) \leq 1+p$

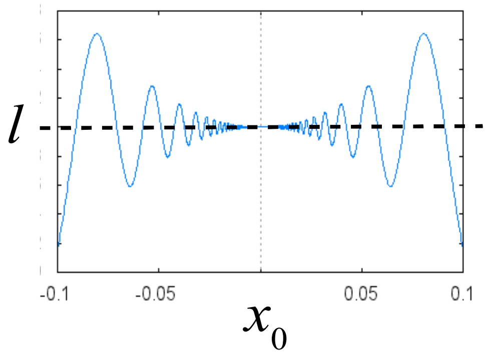
- avec des connecteurs logiques : $\forall\, p>0, \exists a>0 \,/\, \forall\, x \in]-a, a[\setminus\{0\},\ 1-p \leq h(x) \leq 1+p$

Pour s'assurer de cette propriété que suggère le graphe, on peut la prouver :

pour tout nombre $p > 0$, **pour tout *x* de** $]-\sqrt{p}, \sqrt{p}[$, différent de 0 , $0 < x^2 \leq p$,
d'où $-p \leq x^2 \cos(1/x) \leq p$, d'où $1-p \leq 1+x^2 \cos(1/x) \leq 1+p$,
d'où $g(x) \simeq 1$ **à +/- *p* près.**

On écrit que **g a pour limite 1 en 0**, et on le note $\boxed{\lim_{x \to 0} g(x) = 1}$;

Définition 1 limite finie en un nombre fini



On considère un nombre x_0 de $I\!R$, et une fonction f définie sur un intervalle contenant x_0 , mais pas forcément en x_0.

On écrit que f a pour limite L en x_0 , ce que l'on note

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \ ,$$

lorsque

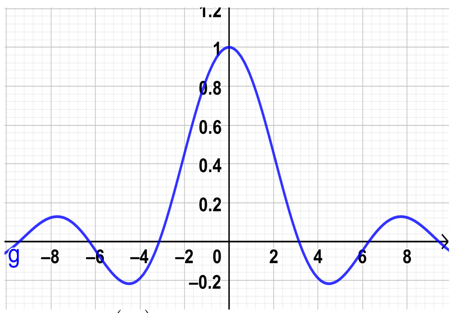
***f*(*x*) approche L aussi précisément qu'on veut, dès qu'on restreint *x* à des valeurs assez proches de x_0.**

Plus précisément :

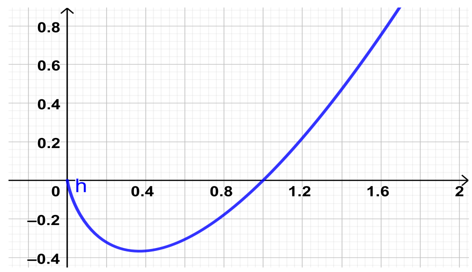
pour tout nombre $p > 0$ (aussi petit soit-il), **il existe un nombre a** (dépendant éventuellement de p) satisfaisant à :

pour tout nombre x de $]x_0 - a \, , x_0 + a[$, différent de x_0, pour lequel f est définie $\quad l - p \leq f(x) \leq l + p$

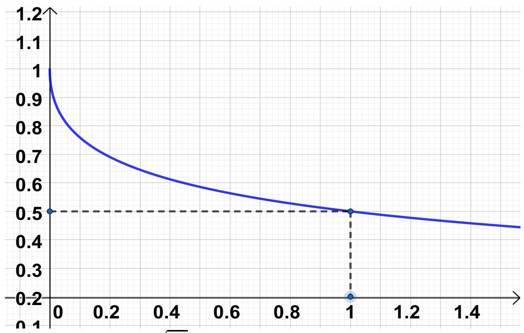
Exemples 1



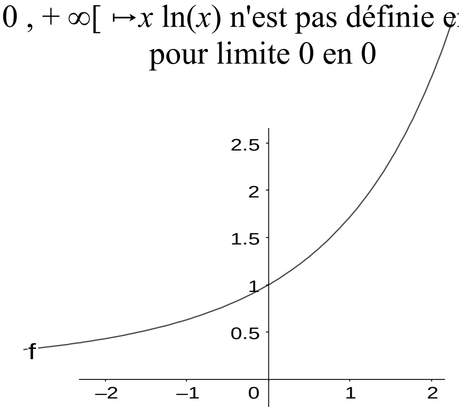
$x \in I\!R^* \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ n'est pas définie en 0 mais a pour limite 1 en 0



$x \in \,]0 \, , +\infty[\ \mapsto x \ln(x)$ n'est pas définie en 0 mais a pour limite 0 en 0



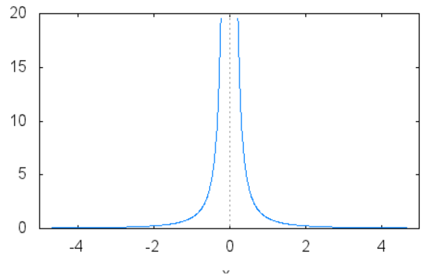
$x \in I\!R^+ - \{1\} \mapsto \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$ n'est pas définie en 1 mais a pour limite 1/2 en 1

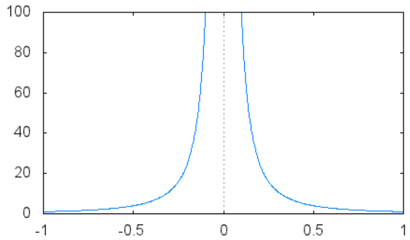


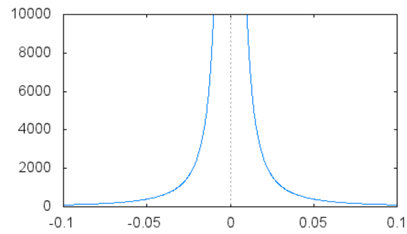
$x \in \mathbb{R}^* \mapsto \dfrac{\exp(x) - 1}{x}$ n'est pas définie en 0 mais a pour limite 1 en 0

2. 2 Limite infinie en un point

2.2.1 Limite + ∞ en 1 valeur finie







Considérons la fonction *j* définie sur *IR* * : ***j* : *x* ∈ *IR* * ↦ *j(x)* = 1/*x*²**
Il semble qu'à mesure que l'**on se restreint à des valeurs d'x de plus en plus proches de 0, on obtient des valeurs de *j* dépassant n'importe quelle borne**.
Ainsi pour tout x de] -0,1 , + 0,1[différent de 0 , $1/x^2 > 1/0{,}1^2 = 100$
pour tout x de]-0,01 ; + 0,01[différent de 0, $1/x^2 > 1/0{,}01^2 = 10\,000$

et de façon générale, quelle que soit la borne $M > 0$ que l'on fixe, aussi grande soit-elle, M est dépassée par toutes les valeurs de $j(x)$ dès que l'on restreint x à l'intervalle $]-1/\sqrt{M}\,;+1/\sqrt{M}[$ .On écrit alors que *j* a pour limite + ∞ en 0, on le note $\lim_{x\to+0} j(x)=+\infty$

Définition 2 limite + ∞ en un nombre fini

On dit qu'une fonction *f* définie sur tout un intervalle I contenant une valeur x_0, sauf éventuellement en x_0 , a pour limite + ∞ en x_0 , et on le note $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ lorsque

pour tout pour toute borne réelle M il existe un intervalle non vide contenant x_0 , $]x_0-a\,,x_0+a[$, dépendant de M, sur lequel **pour tout *x* de cet intervalle**, différent de x_0 , pour lequel f est définie : ***f*(*x*) ≥ M**.

Ce qui peut s'écrire, avec des connecteurs logiques :

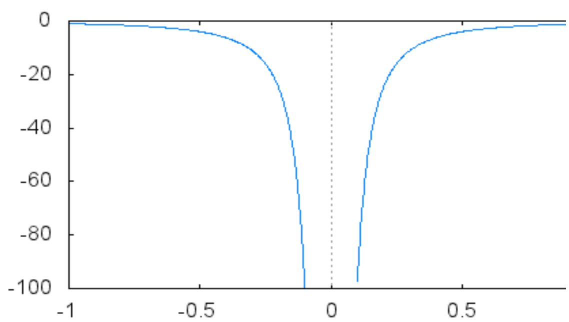
$$\forall M\in\mathbb{R},\exists a>0\ /\forall x\in I\cap]x_0-a\,,x_0+a[\setminus\{x_0\},f(x)\geq M$$

remarquons bien que dans cette définition, le nombre *a* dépend de la borne *M* choisie.

2.2.2 Limite – ∞ en une valeur finie

La fonction k $x\in IR^*\mapsto -1/x^2$ prend des valeurs inférieures à n'importe quelle borne dès qu'on se restreint à des valeur d'*x* assez proches de 0.

(quelle que soit M ∈ $\mathbb{R}^-$, pour tout *x* de [- $\sqrt{|M|}$, + $\sqrt{|M|}$], $k(x) \leq M$)

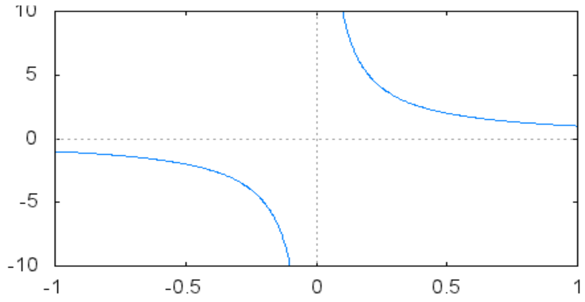


Définition 3 limite - ∞ en un nombre fini

On dit qu'une fonction *f* définie sur tout un intervalle I contenant une valeur x_0 , sauf éventuellement en x_0 , a pour limite - ∞ en x_0 , et on le note $\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty$ lorsque
pour tout pour toute borne réelle M , il existe un intervalle non vide contenant x_0 , $]x_0-a\,,x_0+a[$ sur lequel pour tout *x* de cet intervalle, différent de x_0 , $f(x) \leq M$.

2. 3 Limite à droite, limite à gauche

La fonction m définie sur $\mathbb{R}^*$: $x \in \mathbb{R}^* \mapsto 1/x$ **n'a pas** une limite en 0



En revanche la fonction m_1 restreinte aux nombres positifs : $m_1 : x \in]0,+\infty[\mapsto 1/x$ a pour limite $+\infty$ en 0,

et la fonction m_2 restreinte aux nombres négatifs : $m_2 : x \in]-\infty, 0[\mapsto 1/x$ a pour limite $-\infty$ en 0

On dit que m admet $-\infty$ pour la **limite à gauche** en 0 et $+\infty$ pour **limite à droite** en 0.

on note :
$\lim_{x \to 0-} m(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to 0+} m(x) = +\infty$ ou encore $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} m(x) = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} m(x) = +\infty$

Définition 4 limite à droite, limite à gauche

Lorsque la restriction d'une fonction *f* à un intervalle]a, b[admet une limite l en a (l peut être $+\infty$, $-\infty$, ou un nombre), on écrit que *f* admet l pour **limite à droite en a**, et on le note $\lim_{x \to a+} f(x) = l$ ou $\lim_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = l$

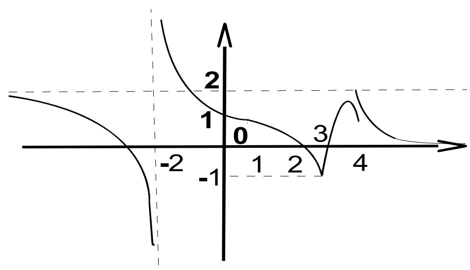
Lorsque la restriction d'une fonction *f* à un intervalle]c, a[admet une limite l en a , on écrit que *f* admet l pour **limite à gauche en a**, et on le note $\lim_{x \to a-} f(x) = l$ ou $\lim_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = l$

Remarque

pour une fonction *f* définie sur un intervalle ouvert contenant un nombre *a*, sauf éventuellement en *a*, on a l'équivalence logique : $\lim_{x \to a} f(x) = l$ si et seulement si $\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x) = l$

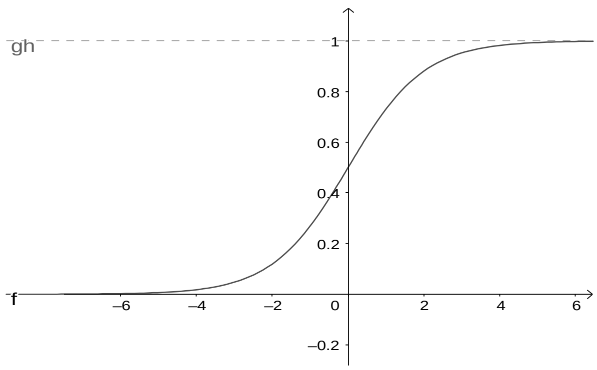
Exemple 2

Ce graphe suggère-t-il des limites en -2, 3, 4 ?



2. 4 Limite finie en + ∞ ou - ∞ :

Considérons la fonction w définie sur $I\!R$ par : $x \in I\!R \mapsto w(x) = \frac{\exp(x)}{\exp(x)+1}$



Sur le graphe il semble que *w(x)* s'approche de la valeur 1, **aussi près que l'on veut**, pourvu qu'**on se restreigne à des valeurs d'x** assez grandes.

D'autre part, *w(x)* s'approche de la valeur 0, aussi près que l'on veut, pourvu qu'on se restreigne à des valeurs d'x assez petites (c'est-à-dire, négatives, avec une grande valeur absolue)

On écrit que $\lim_{x \to +\infty} w(x) = 1$ et $\lim_{x \to -\infty} w(x) = 0$

Prouvons que cette impression est juste :

- au voisinage de + ∞

pour tout x de $I\!R$, on a : $w(x) = \frac{\exp(x)}{\exp(x)+1} = \exp(x)+1-1\exp(x)+1 = \frac{\exp(x)+1}{\exp(x)+1} - \frac{1}{\exp(x)+1} = 1 - \frac{1}{\exp(x)+1}$

d'où :

quelle que soit la précision p>0, aussi petite soit-elle **: pour tout x de] ln(1/p), + ∞[** , x > ln(1/p) ,

d'où exp(x) > 1/p , d'où exp(x) + 1 > 1/p , d'où $0 < \frac{1}{\exp(x)+1} < p$, d'où 1 – p < $1 - \frac{1}{\exp(x)+1}$ < 1,

d'où ***w(x)* ≈ 1 à +/- p près**

- au voisinage de - ∞ **:**

remarquons que pour tout x de $I\!R$, exp*(x)* > 0, d'où exp(*x*) +1 >1, donc $0 \le w(x) = \frac{\exp(x)}{\exp(x)+1} \le \exp(x)$

donc pour toute précision p> 0 , aussi petite soit-elle, et pour tout *x* de] - ∞ , ln(*p*)[: 0 ≤ *w*(x) ≤*p*, d'où *w*(x) ≈ 0 à +/- p près.

Définition 5 limite finie en + infini :

> On considère une fonction définie sur un intervalle dont la borne supérieure est + ∞.
>
> On écrit que *f* a pour limite *l* en + ∞ , ce que l'on note $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$, lorsque
>
> pour tout nombre *p* > 0 (aussi petit soit-il), il existe un nombre *a* (dépendant éventuellement de *p*) satisfaisant à :
>
> pour tout nombre x de]a, + ∞ [, $l - p \le f(x) \le l + p$

Ce qui peut s'écrire, avec des connecteurs logiques : $\forall\, p>0, \exists a>0 \,/\, \forall\, x \in]a, +\infty[,\ l-p \le f(x) \le l+p$

on peut donc écrire $\lim_{x \to +\infty} w(x) = 1$, cette définition s'applique, avec *l* = 1, et pour toute précision *p* , *a* = ln(1/p) = - ln(p)

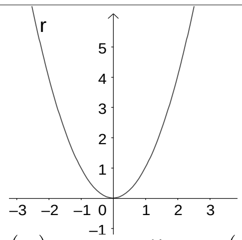
Définition 6 limite finie en - infini :

> On considère une fonction définie sur un intervalle dont la borne inférieure est - ∞.
>
> On écrit que *f* a pour limite *l* en - ∞ , ce que l'on note $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$, lorsque

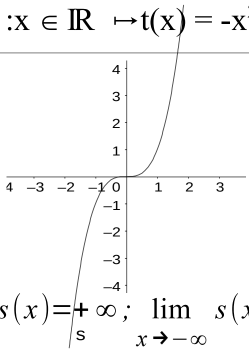
pour tout nombre *p* > 0 (aussi petit soit-il), il existe un nombre *a* (dépendant éventuellement de *p*) satisfaisant à : pour tout nombre x de]- ∞ ; a[, $l - p \le \boldsymbol{f(x)} \le \boldsymbol{l + p}$

2. 5 Limites infinies en + ∞ ou - ∞

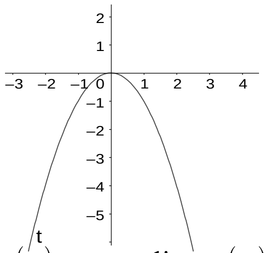
Considérons les 3 fonctions définies sur ℝ r, s, t :
r : x ∈ ℝ ↦ r(x) = x^2 ; s :x ∈ ℝ ↦ s(x) = x^3, t :x ∈ ℝ ↦ t(x) = $-x^2$



$\lim_{x \to +\infty} r(x) = +\infty$; $\lim_{x \to -\infty} r(x) = +\infty$



$\lim_{x \to +\infty} s(x) = +\infty$; $\lim_{x \to -\infty} s(x) = -\infty$



$\lim_{x \to +\infty} t(x) = -\infty$; $\lim_{x \to -\infty} t(x) = -\infty$

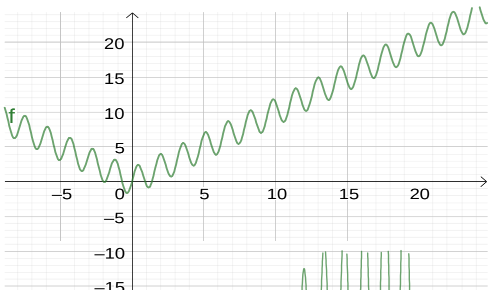
- Au voisinage de + ∞ :
  r(x) et s(x) dépassent n'importe quelle borne fixée aussi grande soit-elle, dès qu'on se restreint à x assez grand.
  Ainsi r(x) > 100 pour tout x de]10, + ∞[, r(x) dépasse 1 000 pour tout x de] $\sqrt{1000}$, + ∞[, et r(x) dépasse toute borne A positive pour tout x de] $\sqrt{A}$, + ∞[
  s(x) dépasse toute borne A positive pour tout x de] $\sqrt[3]{A}$, + ∞[.
  On écrit $\lim_{x \to +\infty} r(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} s(x) = +\infty$
  t(x) reste inférieure à n'importe quelle borne, aussi petite (c'est-à-dire négative avec une grande valeur absolue) soit-elle , dès qu'on se restreint à x assez grand.
  pour n'importe quelle borne A négative, t(x) < A dès qu'on restreint x à] $\sqrt{|A|}$, + ∞[.
  On écrit $\lim_{x \to +\infty} t(x) = -\infty$

- Au voisinage de - ∞ :
  r(x) reste supérieure à n'importe quelle borne fixée, aussi grande soit-elle, dès qu'on se restreint à des valeurs assez petites (c'est-à-dire, négatives avec de grandes valeurs absolues) de x/
  r(x) dépasse n'importe quelle borne A > 0 dès qu'on restreint x à] - ∞ , - $\sqrt{A}$ [
  On écrit $\lim_{x \to -\infty} r(x) = +\infty$
  s(x) et t(x) restent inférieures à n'importe quelle borne fixée, aussi petite soit-elle, dès qu'on se restreint à des valeurs assez petites de x :] - ∞ , - $\sqrt[3]{|A|}$ [pour s,] - ∞ , - $\sqrt{|A|}$ [.
  On écrit $\lim_{x \to +\infty} s(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} t(x) = -\infty$ Exemples

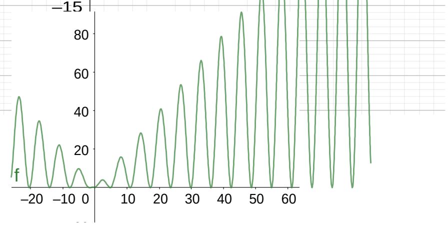
Exemples .

Reprenons l'exemple 2. Ce graphe suggère-t-il une limite en + ∞ ? en - ∞ ?

Exemple 3 Qu'en est-il du graphe de cette fonction ?

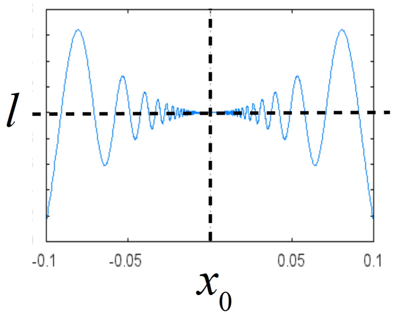
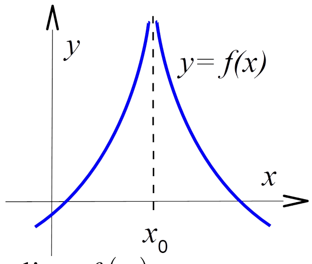
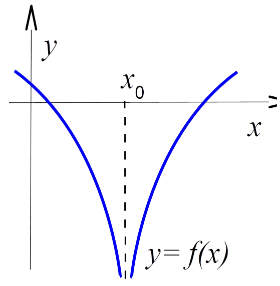
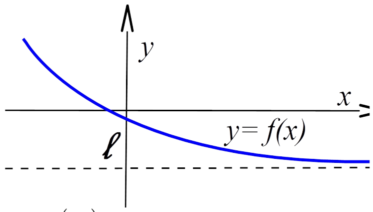
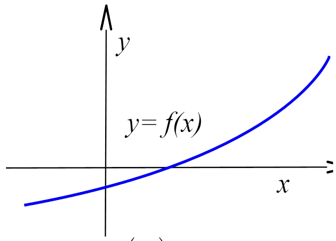
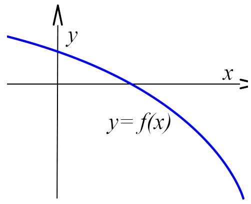
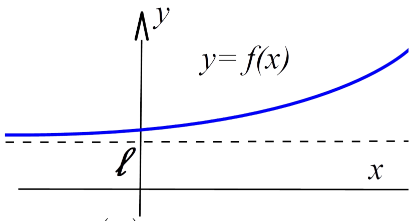
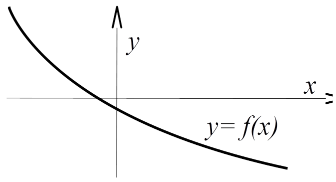
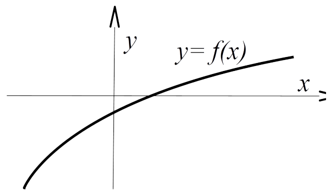


Exemple 4 Et de celui ci ?



2. 6 En bref

$\lim_{x \to a} f(x) = b$ recouvre les cas suivants :

b a	l, nombre	$+\infty$	$-\infty$
x_0, nombre	 $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$	 $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$	 $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$
$+\infty$	 $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$	 $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$	 $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
$-\infty$	 $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$	 $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$	 $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

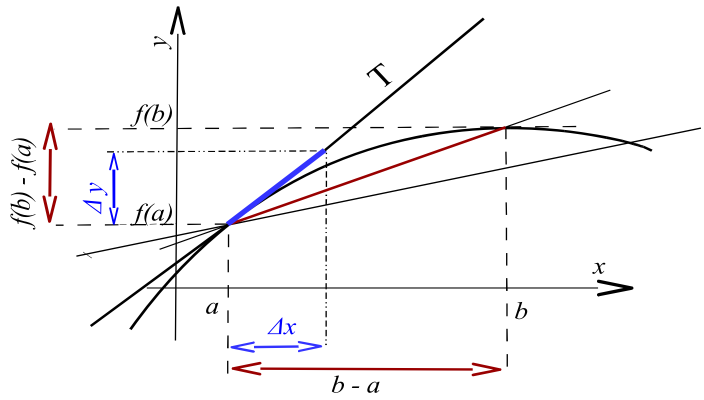
2. 7 Un cas particulier de limite : le nombre dérivé.

Le **taux d'accroissement** d'une fonction f entre deux valeurs a et b différentes est : $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Si ce taux d'accroissement a une limite lorsque b s'approche de a, cette limite est appelée le **nombre dérivé** de f en a. et est noté f ' (a).:

$$f'(a)=\lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ est constant sur la droite T et est égal à $\displaystyle\lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$



Sur la courbe d'équation y = f(x), le taux d'accroissement $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est le coefficient directeur de la droite passant par les points (a, f(a)) et (b , f(b)).

Si $f'(a)=\displaystyle\lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, alors , lorsque b s'approche de a, cette droite s'approche d'une droite fixe : la tangente en (a, f(a)) à la courbe, qui a f ' (a) pour coefficient directeur.

Exemple : considérons la fonction f $x \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^3$ et le taux d'accroissement entre 2 et quelques valeurs

b	3	2,1	2,01	2,001
Taux d'accroissement entre 2 et b	$\dfrac{3^3-2^3}{3-2}=19$	$\dfrac{2{,}1^3-2^3}{2{,}1-2}=12{,}61$	$\dfrac{2{,}01^3-2^3}{2{,}01-2}\approx 12{,}06$	$\dfrac{2{,}001^3-2^3}{2{,}001-2}\approx 12{,}006$

D'autre part, $\displaystyle\lim_{b\to 2}\frac{b^3-2^3}{b-2}=f'(2)=3\cdot 2^2=12$

Cette valeur a été trouvée en utilisant la formule que vous avez apprise au lycée pour la dérivée de la fonction $x \mapsto x^3$, qui est $x \mapsto 3\,x^2$.

Exercice 1 .

En utilisant l'égalité $(2+h)^3=2^3+3\times 2^2\times h+3\times 2\times h^2+h^3$, prouver que $\displaystyle\lim_{b\to 2}\frac{b^3-2^3}{b-2}=12$

Exercice 2 . En utilisant les formules usuelles de dérivation ,

a) étudier (y en a-t-il , si oui de quelles valeurs?) les limites éventuelles en 3 à l'expression $\dfrac{\ln x-\ln 3}{x-3}$

b) étudier les limites éventuelles en 0 à l'expression $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ (remarque $\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\dfrac{\ln(1+x)-\ln(1+0)}{x-0}$)

2. 8 Opérations sur les limites et cas d'indétermination.

On considère deux fonctions *f* et *g* admettant une limite (qui peut être $+\infty$, $-\infty$, ou un nombre fini l) en un point a (qui peut aussi désigner $+\infty$, $-\infty$, ou un nombre fini). **Dans certains cas**, cela suffit pour établir une limite en a aux fonctions $f+g$, $f\,g$, f/g . Dans les autres cas, appelés **cas d'indétermination**, l'existence et la valeur de la limite dépendront des fonctions particulières *f* et *g*. Ce qui ne signifie pas qu'il n'y a pas de limite ou qu'il soit impossible de la trouver !

Addition :

$\lim\limits_a f$	$l_1 \in \mathbb{R}$	$l_1 \in \mathbb{R}$	$l_1 \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_a g$	$l_2 \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_a (f+g)$	l_1+l_2	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**Indétermination**

Exemple 5 : de $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$ on peut déduire $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=+\infty$

En revanche $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-x^2=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} -3x^2=-\infty$,

mais $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+(1-x^2)\right)=1$ alors que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+(-3x^2)\right)=-\infty$

Produit :

$\lim\limits_a f$	$l_1 \in \mathbb{R}$	$l_1 \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$\lim\limits_a g$	$l_2 \in \mathbb{R}$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_a (f\,g)$	$l_1\ l_2$	$+\infty$ ou $-\infty$, selon le signe de l_1 .	$+\infty$ ou $-\infty$ selon les signes de *f* et *g* au voisinage de $+\infty$	**Indétermination**

Exemple 6 : on a vu que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0} x^2=0$, et $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\times x^2\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin(x)\times x\right)=0$,

En revanche, $\lim\limits_{x\to 0} x^2=0$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} x^4=0$, et $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\times\frac{1}{x^2}\right)=1$ alors que $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^4\times\frac{1}{x^2}\right)=0$

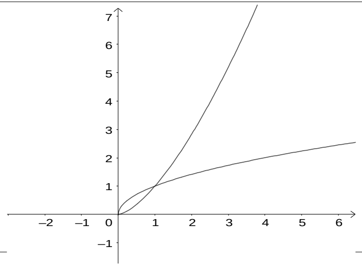
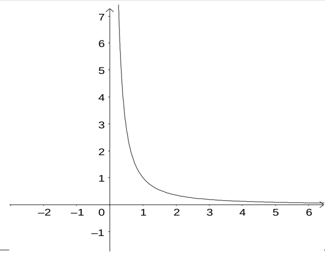
Quotient :

il est nécessaire d'introduire une nouvelle notation : $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0+$ signifie que g a pour limite 0 en a, tout en gardant un signe positif au voisinage de a, et $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0-$ que g a pour limite 0 en a, tout en gardant un signe négatif au voisinage de a.

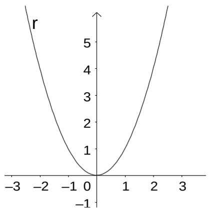
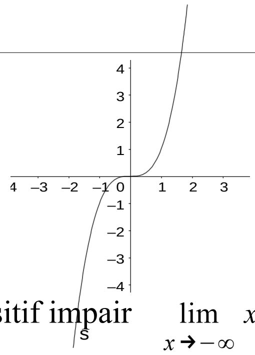
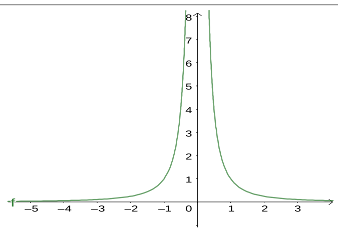
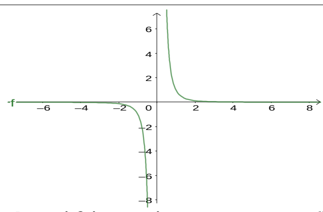
$\lim\limits_a f$	$l_1 \in \mathbb{R}$	$l_1 \in \mathbb{R}$	$l_1 \in \mathbb{R}^*$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	0, 0+ ou 0-
$\lim\limits_a g$	$l_2 \in \mathbb{R}^*$,	$+\infty$ ou $-\infty$	0+ ou 0-	*0+, 0- , ou* $l_2 \in \mathbb{R}^*$	$+\infty$ ou $-\infty$	0, 0+ ou 0-
$\lim\limits_a \left(\frac{f}{g}\right)$	$\frac{l_1}{l_2}$	0	$+\infty$ ou $-\infty$ selon le signe de l_1	$+\infty$ ou $-\infty$	**Indétermination**	

2. 9 Limites des fonctions usuelles

- **Fonction puissance x^r, r $\neq 0$.**

r positif	**r négatif**
$\lim_{x \to +\infty} x^r = +\infty$; 	 $\lim_{x \to 0} x^r = +\infty$; $\lim_{x \to +\infty} x^r = 0$;

Si r est entier, la fonction est définie aussi sur]- ∞, 0[et a une limite en - ∞

r entier > 0 :	 r entier positif pair : $\lim_{x \to -\infty} x^r = +\infty$	 r entier positif impair $\lim_{x \to -\infty} x^r = -\infty$
r entier < 0	 r entier négatif pair : $\lim_{x \to -\infty} x^r = 0$ $\lim_{x \to 0} x^r = +\infty$	 r entier négatif impair : $\lim_{x \to -\infty} x^r = 0$ $\lim_{x \to 0} x^r = +\infty$ $\lim_{x \to 0-} x^r = -\infty$

- **Fonction polynôme**

  Il y a une limite en + ∞ et une limite en - ∞ , qui sont égales aux limites en + ∞ et – ∞ des termes de plus haut degré. Exemple 7 : $\lim_{x \to +\infty} (-3x^2 + x + 1) = \lim_{x \to +\infty} (-3x^2) = -\infty$

- **Fonction rationnelle**

  $x \in D \mapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ **,** P et Q sont 2 polynômes, le degré de Q étant au moins de 1.

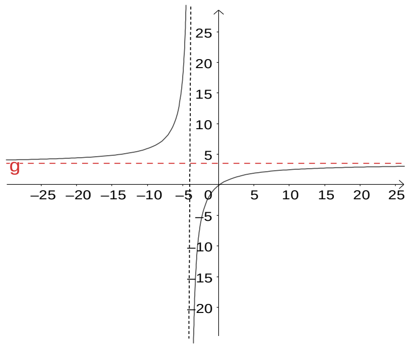
  Il y a une limite en + ∞ et une limite en - ∞ , qui sont les **limites du rapport des termes de plus haut degré**

  Exemple 8 : $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{-3x^5 + 6x + 1}{4x^2 + 3} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{-3x^5}{4x^2} = \lim_{x \to +\infty} (-\dfrac{3}{4} x^3) = -\infty.$

  $$\lim_{x \to +\infty} \frac{-3x^5 + 6x + 1}{4x^7 + 3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-3x^5}{4x^7} = \lim_{x \to +\infty} (-\frac{3}{4x^2}) = 0$$

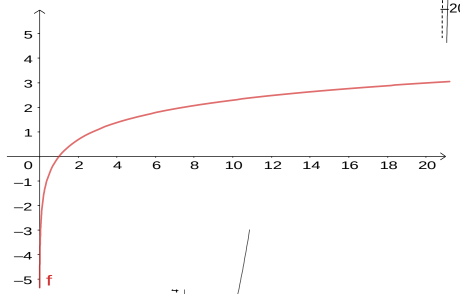
  En chaque racine de Q, il peut y avoir une limite, infinie ou non, ou encore une limite à gauche et une autre à droite.

- **Fonction homographique**
  C'est un cas particulier de fonction rationnelle $x \in \mathbb{R}-\{-d/c\} \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$, avec c ≠ 0 et ad-bc ≠ 0
  $\lim\limits_{x \to +\infty} (\dfrac{ax+b}{cx+d}) = \lim\limits_{x \to +\infty} (\dfrac{ax+b}{cx+d}) = \dfrac{a}{c}$. En -d/c, il n'y a pas une limite simple, mais une limite à drtoie et une limite à gauche.



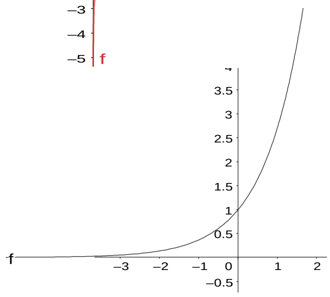
- Fonction logarithme

  $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$



- Fonction exponentielle

$\lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x) = 0 \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$



Quelques cas d'indétermination levés :
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^m - 1}{x-1} = m$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\exp(x)-1}{x} = 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\exp(x)}{x^k} = +\infty$
quel que soit le nombre k , $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$,
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x \ln(x) = 0$

2. 10 Théorème des gendarmes.

***Propriété 1**. Théorème des gendarmes.*

a et *L* désignent + ∞, - ∞, ou un nombre fini et *f*, *g* , *h* sont 3 fonctions définies sur un même intervalle I dont *a* est une borne.
Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L = \lim\limits_{x \to a} h(x)$ et (pour tout nombre *x* de I) $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$
Alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L$

Voici une preuve dans le cas où *a* et *L* sont des nombres finis. On peut aisément s'en inspirer pour prouver la propriété dans les autres cas.

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L = \lim\limits_{x \to a} h(x)$ *alors d'après la définition de la limite en un point, pour toute précision p > 0 il existe deux intervalles* J_1 *et* J_2 *ouverts , dépendants de p, contenant a , tels que pour tout x appartenant à l'intervalle* J_1 *:* $L - p \leq f(x) \leq L + p$ *et pour tout x de* J_2*:* $L - p \leq h(x) \leq L + p$ *.*

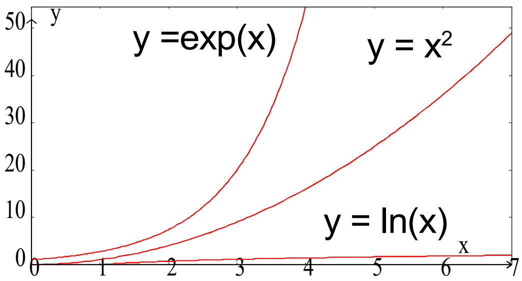
*Donc **pour tout nombre x appartenant à l'intervalle*** J_1 ***ouvert contenant a** ,* $\boldsymbol{L - p \leq f(x) \leq g(x) \leq h(x) \leq L + p}$ *. Donc **g a admet L pour limite en a :*** $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L$ **.**

Exemple 9 : : pour tout *x* de]-∞ , 0[U] 0, + ∞[, $-x^2 \leq x^2 \sin(1/x) \leq x^2$ et $\lim\limits_{x \to 0} (-x^2) = \lim\limits_{x \to 0} (x^2) = 0$

donc $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \sin(1/x) = 0$.

2. 11 Comparaison d'infiniment grands et d'infiniment petits.

Les fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \exp(x)$, $x \mapsto \ln(x)$
ont toutes les trois $+\infty$ pour limite en $+\infty$.
Pourtant elles se comportent différemment .



Définition 7 Infiniment petits, infiniment grands

- On écrit qu'une fonction f est un infiniment grand au voisinage de a (a pouvant être $+\infty$, $-\infty$, ou un nombre de $\mathbb{R}$) lorsque $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$.
- On écrit que f est un infiniment petit au voisinage de a lorsque $\lim_{x \to a} f(x) = 0$

Définition 8 Comparaison

Si deux fonctions f et g sont définies sur un intervalle ouvert borné par a (a pouvant être $+\infty$, $-\infty$, ou un nombre de $\mathbb{R}$), on écrit que f **est infiniment petit devant *g* au voisinage de *a*** , lorsque $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

On le note $f(x) \underset{a}{\ll} g(x)$

Vous pourrez aussi rencontrer cette notation : $f = o(g)$ *au voisinage de a.*

Si f et g sont des infiniment grands en a, on écrit aussi que f est un infiniment grand d'ordre inférieur à g en a.
Si f et g sont des infiniment petits en a, on écrit que f est un infiniment petit d'ordre supérieur à g en a.

Exemple 10 : : $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3}{x^4} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = 0$ donc $2x^3 \underset{+\infty}{\ll} x^4$

***Propriété* 2** Comparaisons à retenir .

a et b désignent deux nombres réels , avec $0 < a < b$.

Au voisinage de + ∞ :
infiniment petits : $\exp(-bx) \underset{+\infty}{<<} \exp(-ax) \underset{+\infty}{<<} x^{-b} \underset{+\infty}{<<} x^{-a} \underset{+\infty}{<<} (\ln(x))^{-b} \underset{+\infty}{<<} (\ln(x))^{-a} \underset{+\infty}{<<} 1$

infiniment grands : $1 \underset{+\infty}{<<} (\ln(x))^a \underset{+\infty}{<<} (\ln(x))^b \underset{+\infty}{<<} x^a \underset{+\infty}{<<} x^b \underset{+\infty}{<<} \exp(ax) \underset{+\infty}{<<} \exp(bx)$

Au voisinage de 0 + :
infiniment petits : $x^b \underset{0+}{<<} x^a \underset{0+}{<<} 1$

infiniment grands : $1 \underset{0+}{<<} (|\ln x|)^a \underset{0+}{<<} (|\ln x|)^b \underset{0+}{<<} x^{-a} \underset{0+}{<<} x^{-b}$

Exemple 11

On cherche à étudier l'existence et la valeur éventuelle de $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-e^{2x}}{x^2+e^x}$

Pour utiliser la propriété 2 il faut faire apparaître les **rapports** intervenant dans les comparaisons usuelles.
Pour cela, on factorise dénominateur et numérateur par les termes dominants. Ici, d'après la propriété 2, le terme dominant du numérateur est e^{2x}, celui du dénominateur est e^x.

(pour tout x de $\mathbb{R}$) $\frac{x^3-e^{2x}}{x^2+e^x} = \frac{e^{2x}}{e^x} \cdot \frac{\frac{x^3}{e^{2x}}-1}{\frac{x^2}{e^x}+1} = e^x \cdot \frac{x^3/e^{2x}-1}{x^2/e^x+1}$

Or $\lim_{x\to+\infty} (\frac{x^3}{e^{2x}})=0$, $\lim_{x\to+\infty} (\frac{x^2}{e^x})=0$, donc $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3/e^{2x}-1}{x^2/e^x+1}\right) = \frac{0-1}{0+1} = -1$ et $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, donc $\lim_{x\to+\infty} \left(e^x \cdot \frac{x^3/e^{2x}-1}{x^2/e^x+1}\right) = -\infty$

Propriété 3 : opérations et comparaisons

Des infiniment petits peuvent se multiplier :
si $f_1(x) \underset{a}{<<} g_1(x)$ et $f_2(x) \underset{a}{<<} g_2(x)$ alors $f_1(x) f_2(x) \underset{a}{<<} g_1(x) g_2(x)$

Ils peuvent s'ajouter , au sens suivant :
si $f_1(x) \underset{a}{<<} g(x)$ et $f_2(x) \underset{a}{<<} g(x)$ alors $f_1(x) + f_2(x) \underset{a}{<<} g(x)$. Remarquez bien que **la même** fonction ***g*** se trouve à droite.

En revanche, **il est possible que** $f_1(x) \underset{a}{<<} g_1(x)$ **et** $f_2(x) \underset{a}{<<} g_2(x)$ **sans que** $f_1(x)+f_2(x) \underset{a}{<<} g_1(x)+g_2(x)$

Exemple 12 : : $x^2 \underset{0}{<<} x$ et $x^3 \underset{0}{<<} -x$ mais $x^2 + x^3$ n'est pas infiniment petit devant $x - x = 0$!

Preuve de la Propriété 3 :
Si cinq fonctions f_1 , f_2 , g, g_1 , g_2 satisfont à $f_1(x) \underset{a}{<<} g_1(x)$ et $f_2(x) \underset{a}{<<} g_2(x)$, alors
$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = 0$ *et* $\lim_{x\to+\infty} \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \cdot \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = 0\times 0 = 0$ donc $f_1(x) f_2(x) \underset{a}{<<} g_1(x) g_2(x)$.
D'autre part , si $f_1(x) \underset{a}{<<} g(x)$ et $f_2(x) \underset{a}{<<} g(x)$, alors $\lim_{x\to+\infty} \frac{f_1(x)}{g(x)} = 0$ *et* $\lim_{x\to+\infty} \frac{f_2(x)}{g(x)} = 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{f_1(x)+f_2(x)}{g(x)}$ = $\lim_{x\to+\infty} \frac{f_1(x)}{g(x)} + \frac{f_2(x)}{g(x)} = 0$

2. 12 Equivalents

Définition 9 équivalents

Lorsque 2 fonctions *f, g* définies sur un intervalle ouvert de borne a ($a = +\infty$, $a = -\infty$, ou $a \in \mathbb{R}$) satisfont à : $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ on écrit que *f* et *g* sont **équivalents** au voisinage de a , on le note
$\boldsymbol{f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)}$

Exemple 13 : : d'après le paragraphe 2. 9, $\lim_{x\to 0}\frac{\exp(x)-1}{x}=1$, donc $\exp(x)-1 \underset{x\to 0}{\sim} x$

La fonction $x \mapsto x$ est une fonction affine, on considère qu'elle est plus simple que la fonction $x \mapsto \exp(x)$ -1.
On emploie alors x comme **équivalent simple** de exp(x) -1 au voisinage de 0.

***Propriété* 4** Des équivalents peuvent se multiplier :
Si $f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x)$ et $f_2(x) \underset{x\to a}{\sim} g_2(x)$ alors $f_1(x)\times f_2(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x)\times g_2(x)$

Preuve : si $f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x)$ et $f_2(x) \underset{x\to a}{\sim} g_2(x)$ alors et $\lim_{x\to a}(\frac{f_2(x)}{g_2(x)})=1$,
donc $\lim_{x\to a}(\frac{f_1(x)f_2(x)}{g_1(x)g_2(x)})=\lim_{x\to a}(\frac{f_1(x)}{g_1(x)})\times\lim_{x\to a}(\frac{f_2(x)}{g_2(x)})=1\times 1=1$

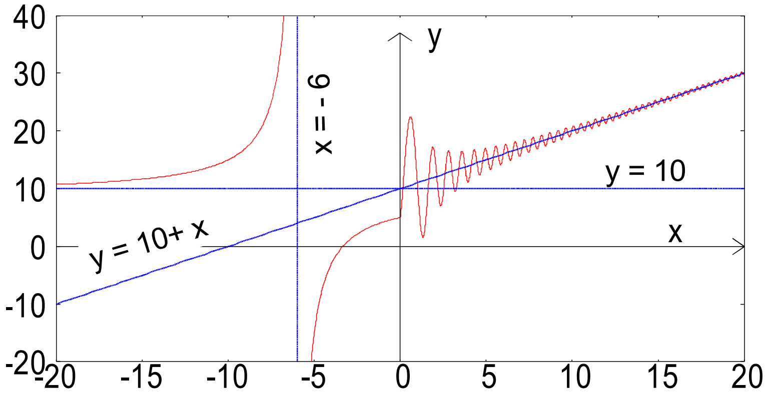
Attention à deux erreurs communes :

- Aucune fonction n'est équivalente à la fonction constante 0 !
- On **ne peut pas ajouter** deux équivalents : il est possible que $f_1(x)\sim g_1(x)$ et $f_2(x)\sim g_2(x)$ sans que $f_1(x)+f_2(x)$ ne soit équivalent, en a, à $g_1(x)+g_2(x)$

2. 13 Asymptotes

Lorsqu'une courbe a tendance à se confondre avec une droite lorsque l'abscisse ou l'ordonnée tend vers l'infini, cette droite est dite asymptote à la courbe.

Cette caractéristique indique **une tendance** de la fonction représentée.



Graphe représentatif d'une fonction *f*

2.13.1 Asymptote verticale.

Lorsque $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$, *a* étant un nombre, on dit que la droite d'équation x = a est asymptote à la courbe

Le graphe laisse supposer que la droite d'équation x = - 6 est asymptote à la courbe de *f*.

2.13.2 Asymptote horizontale.

Lorsqu'une fonction admet une limite **finie** *l* en + ∞ ou en - ∞ , on dit que la droite d'équation $y = l$ est asymptote (horizontale) à la courbe.
Le graphe laisse supposer que la droite d'équation $y = 10$ est asymptote à la courbe.

2.13.3 Asymptote oblique.

On dit que la droite d'équation $y = a\,x + b$ est asymptote à la courbe représentative d'une fonction *f* lorsque

$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ ou $\lim_{x \to -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$

Le graphique laisse supposer que la droite d'équation $y = x + 10$ est asymptote à la courbe représentative de *f*.

Exemple 14

Posons pour x ≠ 4, $f(x) = \dfrac{x^2}{x-4}$ Etudier $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - x)$, $\lim_{x \to -\infty} (f(x) - x)$, $\lim_{x \to -\infty} (f(x) - x - 4)$ $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - x - 4)$.

Le graphe de cette fonction admet des asymptotes, lesquelles ?

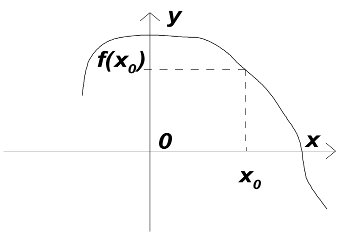
2. 14 Continuité pour une fonction d'une variable réelle.

Définition 10 fonction continue

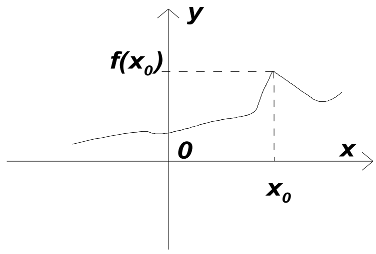
Une fonction définie sur un intervalle ouvert]a, b[contenant le nombre x_0 est dite continue en x_0 lorsque : $$f(x_0)=\lim_{x\to x_0} f(x)$$

Remarque 1 : cette condition est équivalente à : *f* est définie en x_0 et possède une limite en x_0.
Remarque 2 : elle est aussi équivalente à : $\lim_{h\to 0}(f(x_0+h)-f(x_0))=0$

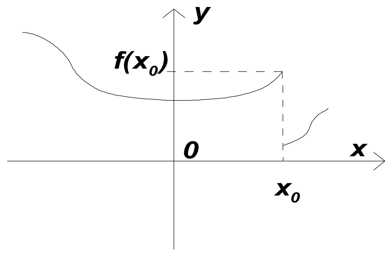
Cela se traduit graphiquement par l'absence de saut à l'abscisse x_0 dans la représentation de f.



Fonction continue en x_0



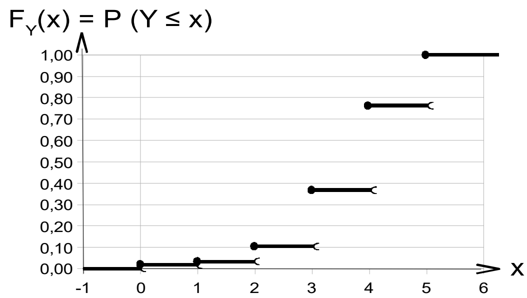
Fonction continue en x_0



Fonction discontinue en x_0

Exemples 15 :

- Les fonctions usuelles : polynômes, fonctions rationnelles, fonctions puissances, exponentielle, logarithme, fonctions trigonométriques, sont continues partout où elles sont définies.
- La fonction *h* définie sur tout *IR* par : $\begin{cases} h(x) = x+1 & pour\ x<0 \\ h(x) = 1 & pour\ x=0 \\ h(x) = \dfrac{2}{x+1} & pour\ x>0 \end{cases}$ n'est pas continue en 0, car elle n'a pas une limite en 0 – elle a une limite à droite : 2 et une limite à gauche : 1 – .
- La fonction de répartition d'une variable aléatoire de loi Binomiale **n'est pas continue**.
Voici le graphe de la fonction de répartition de la loi $B(5,3/4)$. Cette fonction associe à tout nombre x la probabilité P (Y ≤ x), Y étant le nombre de succès dans 5 expériences aléatoires indépendantes de même probabilité de succès ¾ ,par exemple le nombre de fois où l'on obtient une carte cœur, carreau ou trèfle en tirant 5 fois de suite une carte au hasard dans un jeu de 32 ou 64 cartes –donc sans joker – , et en la remettant à chaque fois dans le jeu.



Définition 11 Continuité à droite, à gauche

x_0 désigne un nombre réel et *f* désigne une fonction définie sur un intervalle contenant x_0.
Si $f(x_0)=\lim_{x\to x_0+} f(x)$ on dit que *f* est **continue à droite** en x_0.
Si $f(x_0)=\lim_{x\to x_0-} f(x)$ on dit que *f* est **continue à gauche** en x_0.

La fonction *h* de l'exemple précédent est continue à gauche, mais pas à droite, en 0.

Définition 12 Continuité sur un intervalle.

Une fonction est dite continue sur un intervalle ouvert si elle est continue en tout point de l'intervalle.
Elle est dite continue sur un intervalle]a, b] si elle est continue en tout point de]a,b[et continue à gauche en b.
Elle est dite continue sur un intervalle [a, b[si elle est continue en tout point de]a,b[et continue à droite en a.

Exemples : la fonction exp est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction ln est continue sur]0, + ∞[, la fonction *h* de l'exemple précédent est continue sur] - ∞, 0].

Définition 13 : prolongement par continuité.

Si une fonction f , définie sur un ensemble D, n'est pas définie en un réel x_0, mais qu'elle a en x_0 une limite à droite, une limite à gauche, et que ces 2 limites sont égales, alors la fonction g définie par :
g(x) = f(x) pour tout x de D, et $g(x_0) = \lim_{x \to x_0 -} f(x) = \lim_{x \to x_0 +} f(x)$ est appelée le prolongement par continuité de f en x_0 . C'est une fonction définie en x_0, continue en x_0, et égale à f sur tout D.

Exemple 16 : soit f la fonction définie sur]-1, 0[U]0, + ∞[par : $x \mapsto f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$. On a $\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1+} f(x) = 1$. La fonction *g* définie sur]-1, + ∞[, y compris en 0, par :

$$g(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} \quad \text{si } x \neq 0 , \qquad \text{et } g(0) = 1$$

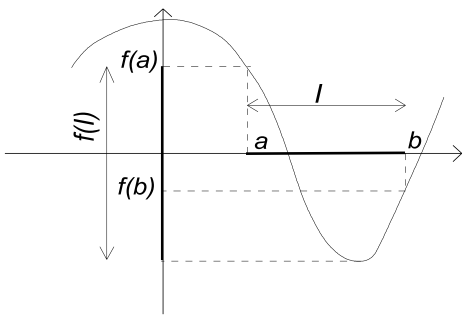
est le prolongement par continuité en 0 de *f*. Elle est continue en 0.

Propriété 5 :

- La somme, le produit, le quotient de deux fonctions continues sont des fonctions continues partout où elles sont défnies.
- La composée d'une fonction continue en x_0 et d'une fonction continue en $y_0 = f(x_0)$ est continue en x_0.

***Propriété 6* :** (admise)

Si *f* est une fonction continue, alors l'image par *f* d'un intervalle est aussi un intervalle (mais pas nécessairement de même nature)



Exemple 17 : considérons la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$
une étude des variations de *f* nous apprend que *f* ( ] -1/2 , 3[ ) = [- 3, 1]

Propriété 7. Théorème des valeurs intermédiaires.

Soit *f* une fonction continue sur [a;b], alors pour tout réel m compris entre *f*(a) et *f*(b), il existe au moins un réel c de [a;b] tel que *f*(c) = m

Preuve : d'après la propriété 6 , f([a, b]) , ensemble des images par *f* des nombres de [a, b] est un intervalle J. *f*(a) et *f*(b) sont dans J, donc tout nombre m compris entre *f*(a) et *f*(b) est dans J. Donc m est l'image par *f* d'au moins un nombre de [a,b].

Conséquences :

1.
   a) si f est une fonction définie et continue sur $]-\infty; b]$, et que f a une limite L en $-\infty$ (éventuellement infinie), alors pour tout réel m compris entre L et f(b),avec $m \neq L$, il existe au moins un réel c de $]-\infty;b]$ tel que f(c) = m
   b) si f est une fonction définie et continue sur $[a;+\infty[$, et que f a une limite L en $+\infty$ (éventuellement infinie), alors pour tout réel m compris entre L et f(a),avec $m \neq L$, il existe au moins un réel c de $[a;+\infty[$ tel que f(c) = m
2. si f est continue sur [a;b] et si $f(a).f(b) < 0$ alors il existe (au moins un) $c \in]a;b[$ tel que f(c) =0.

Ce théorème est très important, il permet de prouver qu'il existe un ou des solutions à des équations qu'on ne sait pas résoudre explicitement, c'est-à-dire en appliquant des fonctions connues à des nombres connus.

Exemple 18 : Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = -x + \exp(x)$, et l'équation $f(x) = 3$.

Montrons qu'il y a une solution à cette équation sur $]-\infty, 0]$:

- f est définie et continue sur $]-\infty, 0]$
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $f(0) = 1 < 3$

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires **il y a au moins une solution à l'équation** $f(x) = 3$ **dans l'intervalle** $]-\infty, 0]$
De plus, le tableau de variations de f montre que f est décroissante strictement sur cet intervalle, donc il n'y a **pas d'autre solution sur** $]-\infty, 0]$.

Cela bien qu'on ne sache pas résoudre explicitement cette équation.

Une fois l'existence de cette solution établie, on peut en chercher une valeur approchée par dichotomie :
Notons m cette solution, cherchons une valeur approchée arrondie à 0,1 de m

x	f(x) ≈	<3 ou > 3	Intervalle contenant m
0	1	< 3	]- ∞ , 0[
-2	9,39	> 3	]-2, 0[
(0+(-2))/2 = -1	3,72	> 3	]-1, 0[
(0 -1)/2 = - 1/2	2,15	< 3	]-1, -0,5[
(-1/2 -1)/2 = -3/4	2,87	<3	]-1, -3/4[
(-3/4 -1)/2 = -7/8	3,27	>3	]-7/8 , -3/4[=]-0,875, -0,75[

Donc $m \approx -0{,}8$ à +/- 0,1 près.

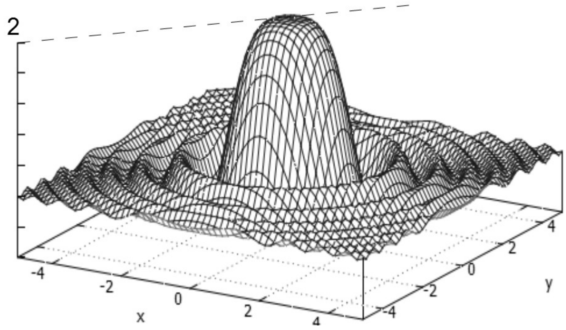
Le tableau de variations de f permet d'établir qu'il y a exactement 2 solutions à l'équation : une dans l'intervalle $]-\infty, 0[$, l'autre dans l'intervalle $]0, +\infty[$.

2. 15 Limites de fonctions de 2 variables

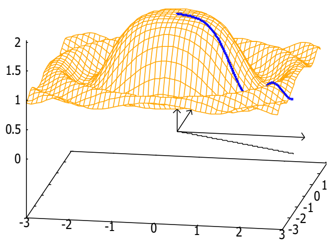
Considérons la fonction de 2 variables :

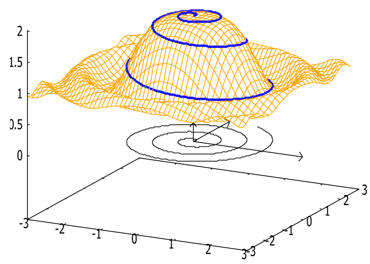
$(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \mapsto f(x,y) = 1 + \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$.

Elle n'est pas définie en (0,0). Pourtant, il semble bien sur le graphe que lorsque (x,y) s'approche infiniment près de (0,0), $f(x,y)$ s'approche d'une valeur finie : 2

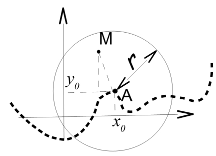


La valeur critique (x,y) = (0,0) peut être approchée par une infinité de chemins différents, ils mènent tous à la même limite pour f (x,y).





Une fonction d'une seule variable pouvait tendre vers une valeur limite lorsque la variable s'approchait d'une valeur critique en parcourant des intervalles de largeurs de plus en plus petites.
Ici, puisqu'un couple de valeurs critiques (x_0 , y_0) peut être approché par une infinité de chemins différents dans le plan, nous l'encadrerons par des **disques** de rayons de plus en plus petits.

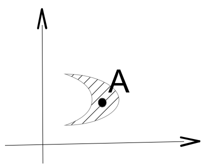


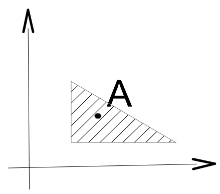
Rappel : un Disque ouvert centré en un point A de coordonnées (x_0, y_0) , de rayon r, est l'ensemble des points M de coordonnées (x,y) satisfaisant à AM < r, c'est-à-dire $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<r$

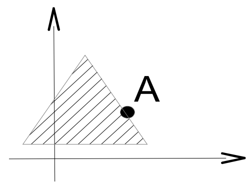
Vous pourrez par la suite rencontrer le terme de voisinage :

Définition 14 Voisinage d'un point de $\mathbb{R}^2$.

Pour un point A de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées (x_0 , y_0) , on appelle Voisinage de A tout sous-ensemble du plan contenant un disque ouvert non vide centré en A.







Ceci est un voisinage de A — Ceci en est un autre — Cela **n'est pas** un voisinage de A

Définition 15 Limite finie en un point de $\mathbb{R}^2$.

f désigne une fonction définie sur un voisinage de M (x_0, y_0). On écrit que f a pour limite le nombre l , et on note :

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left(f(x,y)\right) = l \in \mathbb{R}$$

lorsque, quelle que soit la précision choisie p > 0 choisie, *f* (*x,y*) s'approche de la valeur *l* avec la précision p, dès que *(x,y)* est astreint à rester dans un disque ouvert centré en M, de rayon suffisamment petit.

Pour tout p > 0 , il existe $r \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que (pour tout (x,y) de D $((x_0, y_0), r)$ $l - p \leq f(x,y) \leq l + p$.

Exemple 19 : : cherchons une limite en (0,0) à la fonction $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{0,0\} \mapsto f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

a) montrer que pour tous x,y réels, $-(x^2 + y^2) \leq 2xy \leq x^2 + y^2$.

b) en déduire que pour tous x,y réels non tous les deux nuls, $\dfrac{-\sqrt{x^2+y^2}}{2} \leq \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$

c) en déduire que quel que soit le nombre p > 0, pour tout (x,y) du disque ouvert centré en 0 de rayon 2p :

$$-p \leq f(x,y) \leq p$$

d) en déduire que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(f(x,y)\right) = 0$

Exemple 20 : on cherche une limite éventuelle en (0,0) à la fonction définie sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ par :

$f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \mapsto f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{2x^2+y^2}$

a) On approche (0,0) en restant sur la droite d'équation $y = 2x$ dans le plan (O*xy*). C'est-à-dire qu'on s'intéresse à $f(x, 2x)$, pour x parcourant $\mathbb{R}^*$. Quelle est $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y=2x}} f(x,y)$?

b) Que pensez-vous de $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y=3x}} f(x,y)$, ce qui peut s'écrire aussi $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x,3x)$?

c) Conclure quant à $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

Exemple 21 :

1) On pose, pour tout (x,y) différent de (0,0) : f(x,y) = $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, et pour (x,y) = (0,0) : f(0,0) = 0.
   Etudier (existence, valeur éventuelle) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. On pourra étudier d'abord les limites éventuelles en 0 de f(x,x) et f(x,2x).
2) Etudier (existence, valeur éventuelle) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 \ln(x^2+y^2)$, en remarquant que pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, $\left|x^2 \ln(x^2+y^2)\right| \leq \left|(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)\right|$ et que $\displaystyle\lim_{t\to 0+} t\ln(t) = 0$

Propriété 8 : Théorème des gendarmes pour les fonctions numériques de 2 variables réelles.

Comme pour les fonctions numériques d'une variable réelle, on montre directement en appliquant la définition :

S'il existe 3 fonctions numériques de 2 variables réelles, *f,g,h* définies sur un même voisinage V d'un point A(x_0, y_0) et que

(pour tout (x,y) de V) $\quad f(x,y) \leq g(x,y) \leq h(x,y)$

et $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left(f(x,y)\right) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left(h(x,y)\right)$

Alors g a une limite en (x_0 , y_0) et $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left(g(x,y)\right) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left(f(x,y)\right) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left(h(x,y)\right)$

Définition 16 : infiniment petits et comparaisons.

On dit qu'une fonction numérique de 2 variables est un infiniment petit en (x_0 , y_0) si elle admet 0 pour limite en (x_0, y_0).
On dit qu'une fonction f est infiniment petite – ou négligeable – devant une autre fonction g au voisinage de (x_0,y_0) si le rapport $\frac{f}{g}$ a pour limite 0 en (x_0, y_0)
Dans ce cas, on note $f = o\,(g)$.
En particulier , si $\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \frac{f(x_1,x_2)}{|x_1|^k+|x_2|^k} = 0$ on écrit $f(x_1 , x_2) = o\,(x_1^k , y_2^k)$

2. 16 Continuité pour une fonction numérique de 2 variables.

Définition 17 :

Une fonction numérique de deux variables est dite continue en (x_0, y_0) si $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$.

Propriétés 9 (admises)

Une fonction composée de fonctions continues est continue partout où elle est définie

Un polynôme à deux variables est continu sur tout $I\!R^2$
Une fonction rationnelle de deux variables est continue partout où elle est définie.

En pratique :
En utilisant la dernière propriété et le fait que les fonctions usuelles d'une variable (polynômes, fonctions rationnelles, ln, exp, puissances, valeur absolue, fonctions trigonométriques) sont continues partout où elles sont définies, les fonctions que vous rencontrerez en Licence, construites à partir de fonctions usuelles, ne poseront de problèmes de continuité que là où il y a un problème de définition.