UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY
FACULTÉ JEAN MONNET
DROIT-ÉCONOMIE-GESTION

Licence Economie gestion 1ère année.

.

Cours de mathématiques 1 de P.Beau

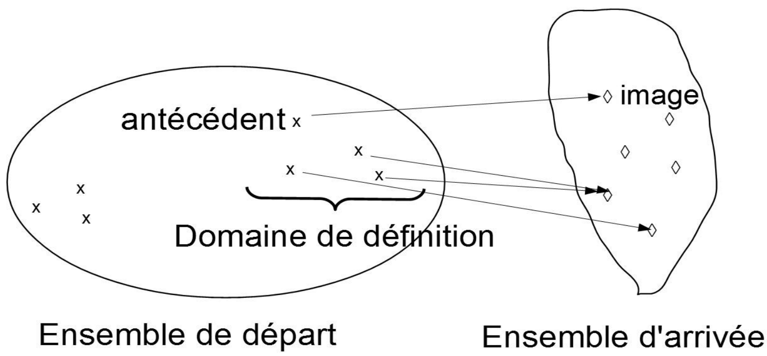
Chapitre 1 . Fonctions numériques d'une et deux variables réelles

1 Notion de fonction

Une fonction est une association, entre des éléments d'un ensemble de départ et des éléments d'un ensemble d'arrivée. Une fonction associe à chaque élément de l'ensemble de départ aucun ou un (mais pas plus d'un) élément de l'ensemble d'arrivée.

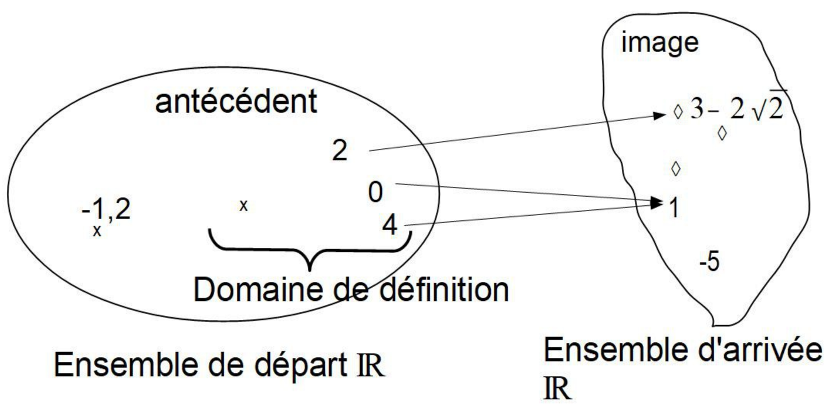
Dans cette association, l'élément considéré de l'ensemble de départ est appelé **l'antécédent**, l'élément de l'ensemble d'arrivée est appelé **l'image**.

Le **domaine de définition** est l'ensemble de tous les éléments de l'ensemble de départ qui ont une image par la fonction.



Exemple 1 Considérons la fonction qui à tout nombre réel positif x associe $1+x - 2\sqrt{x}$

On peut considérer que l'ensemble de départ est $\mathbb{R}$, le domaine de définition est $[0 , +\infty[$, l'ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}$,



Exemples 2

a) Vous connaissez les **fonctions numériques d'une variable réelle** qui associent à certains nombres réels (l'ensemble de départ est IR) d'autres nombres réels (l'ensemble d'arrivée est IR aussi) . La **fonction racine** associe à chaque nombre réel positif un autre nombre réel positif. On peut considérer que l'ensemble de départ est IR, l'ensemble d'arrivée est IR aussi. Le domaine de définition est IR^{+}.

b) Un capital de 10 000 € placé au taux fixe 3% par an , à intérêts composés, produit au bout de n années un **intérêt** i (n) = 10 000 ($1,03^n$ -1) € . Ici on peut considérer que l'ensemble de départ de la fonction i est IN, ensemble des nombres entiers naturels . On aurait pu aussi considérer que l'ensemble de départ est IR , et que IN est l'ensemble de définition de cette fonction .

c) Une **probabilité** est une fonction. Elle associe à chaque événement d'une tribu un nombre réel compris entre 0 et 1. Par exemple en observant un tirage au sort par un dé équilibré, on associe à l'événement A : « le résultat est pair » la probabilité P(A) = 1/2 et on associe à l'événement B : « le résultat est supérieur ou égal à 5 » la probabilité P(B) = 1/3.
Ici l'ensemble de départ de la fonction **n'est pas un ensemble de** nombres, mais un ensemble d'événements.

Dans l'exemple suivant, l'ensemble de départ n'est pas non plus IR.

Exemple 3

Un capital K placé au taux annuel i% à intérêts composés produit au bout de 7 années un intérêt

$$f(K,i) = K[\ (1+ i\ )^7 - 1]$$

On dit que l'intérêt produit est une **fonction numérique** – car le résultat est un nombre réel – **de deux variables réelles** – K et i – .

De façon générale, vous rencontrerez à partir de maintenant des **fonctions numérique de plusieurs variables réelles**, c'est-à-dire des fonctions dont l'ensemble de départ est l'ensemble de couples (x,y), de triplets (x,y,z), ou de p-uplets (x_1, x_2, ...x_p) de nombres réels, et l'ensemble d'arrivée est IR.

Par exemple, un capital K placé, à intérêts composés, au taux i_1 la première année, i_2 la seconde et i_3 la 3ème année rapporte au bout de 3 ans un intérêt de $f(K,i_1,i_2,i_3) = K[(1+i_1)(1+i_2)(1+i_3) - 1]$

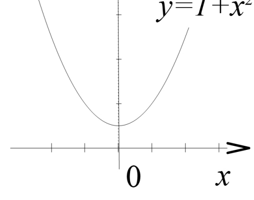
Il s'agit d'une fonction numérique de 4 variables réelles K,i_1,i_2,i_3.

Dans ce cours vous rencontrerez des fonctions numériques d'**une** ou **deux** variables réelles.

Notation : l'ensemble de tous les couples possibles de réels : (x,y) avec x appartient à IR et y appartient à IR est noté IR^2. De façon générale l'ensemble de tous les p-uplets (x_1,x_2, ... x_p) où x_1,x_2, ... x_p désignent des nombres réels, est noté IR^p. Vous rencontrerez aussi cette notation dans les chapitres traitant des espaces vectoriels, mais les notions qui y entrent en jeu n'interviennent pas ici.

2 Représentation graphique

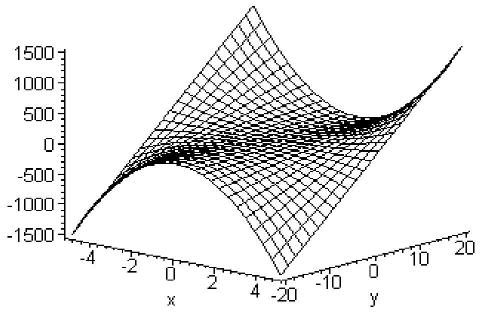
Une fonction numérique d'**1 variable** réelle peut se représenter dans un plan, à l'aide de deux axes.



Une fonction **de 2 variables** réelles porte sur des couples de nombres réels. On représente l'ensemble de ces couples (c'est-à-dire le domaine de définition de la fonction) par une partie d'un plan. Les images de ces couples sont des nombres réels. On représente toutes ces images sur une droite. On a donc besoin d'un espace à 3 dimensions pour représenter graphiquement la fonction.

Exemple 4

soit $f(x, y) = 3x^2y$, pour tous les (x, y) tels que $-5 < x < 5$ et $-20 < y < 20$ (cet ensemble est $[-5,5] \times [-20,20]$)

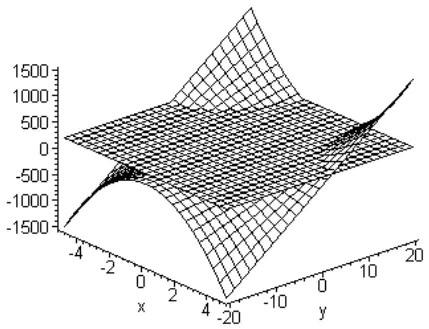


En contraignant certaines variables, on fait intervenir des fonctions d'une seule variable:

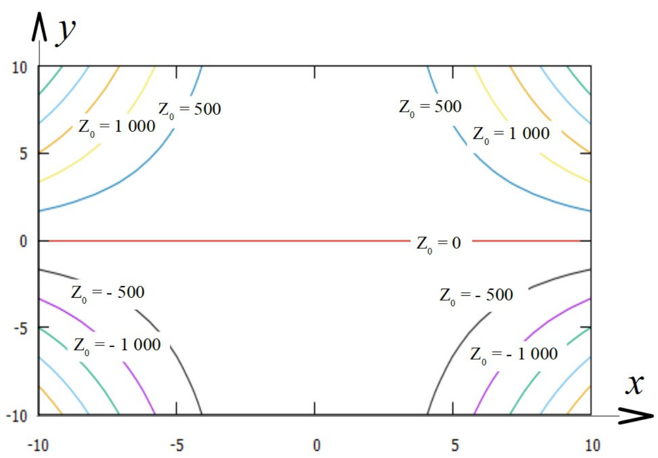
Pour y fixé, par exemple $y = -2$, $f(x,-2)$ ne dépend plus que d'x : $f(x,-2) = -6x^2$, définit une fonction parabolique d'x.

Pour x fixé, par exemple $x = 2$, $f(2, y)$ ne dépend que d'y : $f(2, y) = 12y$, définit une fonction linéaire d'y

Pour une valeur fixée z_0 non nulle, on peut chercher s'il existe des nombres x, y tels que $f(x, y) = z_0$. Il s'agit de résoudre $z_0 = 3x^2y$, ce qui est équivalent à $x \neq 0$ et $y = z_0/ 3x^2$: Sous cette contrainte, **y devient une fonction d'x**.



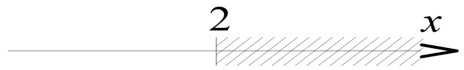
On peut alors représenter la courbe d'équation $y = z_0/ 3x^2$ dans un plan pour lequel $z = z_0$ est constant. Une telle courbe est appelée **courbe de niveau** ou **ligne de niveau**. Quelques unes sont représentées ici pour différentes valeurs de z_0.



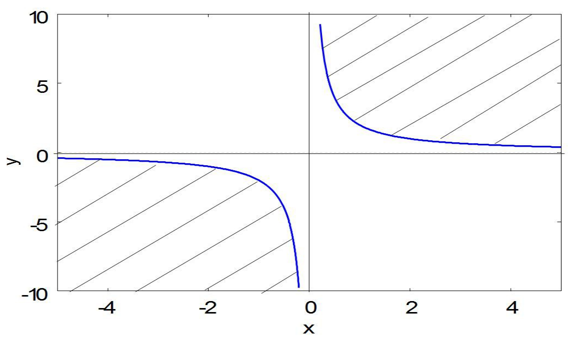
3 Domaine de définition d'une fonction

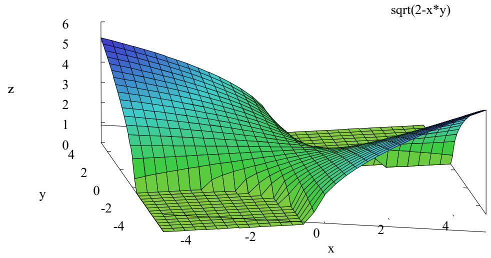
Il s'agit du plus grand ensemble sur lequel on peut définir cette fonction.

Exemple 5 Fonction d'une seule variable réelle . Son ensemble de définition est une partie de $\mathbb{R}$ et on peut le représenter graphiquement par une partie d'une droite.
Par exemple la fonction d'une variable *x* :
f : x$\longmapsto$ $\sqrt{2-x}$ est définie sur l'ensemble]-∞; 2[. Cet intervalle est le domaine de définition de f. On peut le représenter par la partie non hachurée de la droite tracée ici .



Exemple 6 Fonction de 2 variables réelles. Le plus grand sous-ensemble de IR ^{2} sur lequel on puisse définir la fonction (x, y) $\longmapsto$ $\sqrt{2-xy}$ est l'ensemble des couples (x, y) tels que xy ≤ 2. C'est une portion de plan délimitée par les 2 branches de l'hyperbole d'équation : y = 2/x pour tout x ≠ 0.





Le **domaine de définition** de cette fonction est la partie non hachurée du plan: $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; 2 - xy \geq 0\}$.

Attention à ne pas le confondre avec le **graphe** de cette fonction, que voilà, et qui est défini par : $z = \sqrt{2-xy}$

Exemple 7 Le plus grand sous-ensemble de IR^2 sur lequel on puisse définir une fonction de 2 variables réelles par (x, y) $\longmapsto$ $\dfrac{1}{x+y-1}$ est l'ensemble des couples (x, y) de IR^2 tels que x+y ≠ 1, c'est-à-dire tout le plan privé de la droite d'équation y = 1-x.

4 Fonctions usuelles d'une variable réelle

4.1 Fonctions affines et droites

Vous les rencontrerez très souvent en économie comme en gestion. Vous êtes supposés les connaître depuis la classe de 3ème pourtant l'expérience indique qu'une très grande majorité d'étudiants ne sait plus les utiliser et a besoin de les revoir.

Une fonction affine f est définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ainsi :

(pour tout x de $\mathbb{R}$) $f(x) = a\,x + b$, où a et b sont deux nombres fixes.

Elle se reconnaît bien sûr à son graphe :

***Propriété* 1** Une fonction est affine si et seulement si son graphe est une droite

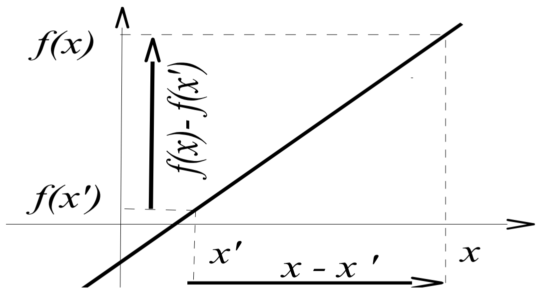
C'est évident, la droite en question a pour équation : $y = a\,x + b$. a est le coefficient directeur, ou pente, de la droite.

Elle se reconnaît aussi à cette propriété :

***Propriété* 2** Une fonction f est affine si et seulement si son **taux d'accroissement** est **constant**. C'est-à-dire si pour tous nombres x, x':

$$\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}=constante \quad .$$

Cette constante est la pente a de la droite.



Preuve :

1. Si $f(x) = a\,x + b$ pour tout x de $\mathbb{R}$, alors pour tous x, x' de $\mathbb{R}$ $\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}=\frac{ax+b-ax'-b}{x-x'}=a$.
2. d'autre part si $\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}=constante$ pour tous x, x' de $\mathbb{R}$, alors en nommant a cette constante et en choisissant 0 pour la valeur x' il vient : (pour tout x de $\mathbb{R}$) $f(x)-f(0)=a(x-0)$, d'où $f(x)=a\,x+f(0)$

Exemple 8 U n capital de K € placé à **taux d'intérêt simple** – c'est-à-dire que les intérêts acquis au bout d'une période ne sont pas réinvestis et ne rapportent pas eux-mêmes des intérêts ensuite – i constant rapporte Kix intérêts au bout du temps x et vaut donc à la date x :

Capital (x) = Ki x + K Euros.

4.2 Trouver l'équation de la droite passant par 2 points donnés

- Méthode recommandée : On applique la propriété 2, une fois pour ces 2 points, une fois pour un de ces points et un point général de la droite.
  Exemple 9. Cherchons l'équation de la droite (D_1) passant par les points A de coordonnées (1 ;5) et B de coordonnées (3;9) .
  Pour tout point M de coordonnées (x, y) du plan :

M appartient à (D_1) si et seulement si $\underbrace{\dfrac{y-5}{x-1}}_{taux\ d'accroissement\ entre\ A\ et\ M} = \underbrace{\dfrac{9-5}{3-1}}_{taux\ d'accroissement\ entre\ A\ et\ B}$ d 'où

M appartient à (D_1) si et seulement si $y-5=\dfrac{4}{2}(x-1)$

d 'où M appartient à (D_1) si et seulement si $y=2x+3$.

- Une autre méthode possible consiste à chercher les coefficients a,b pour que l'équation y = ax +b soit satisfaite par A et B , d'où $\begin{cases} a\times 1+b=5 \\ a\times 3+b=9 \end{cases}$, il suffit de résoudre ce système de 2 équations à 2 inconnues *a* et *b*.

4.2.1 Trouver l'équation de la droite définie par son coefficient directeur et 1 de ses points.

On utilise à nouveau la propriété 2, pour le point donné et un point général de la droite

Exemple 10. Cherchons l'équation de la droite (D_2) passant par le point A de coordonnées (1 ; 5) et de coefficient directeur -4.

Pour tout point M du plan , de coordonnées (*x*, *y*) :

M appartient à (D_2) si et seulement si $\dfrac{y-5}{x-1}=-4$, d'où

M appartient à (D_2) si et seulement si $y-5=-4(x-1)$, d'où

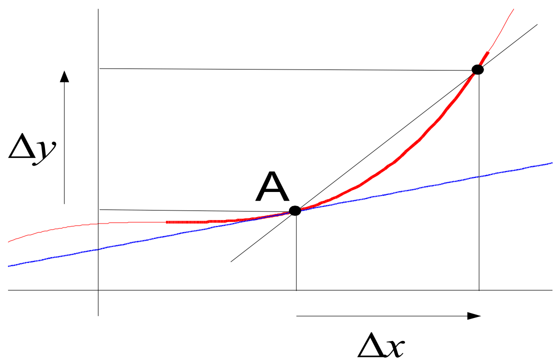
M appartient à (D_2) si et seulement si $y=-4x+9$

4.2.2 Tendance locale. Tangente à une courbe en 1 point.

On considère la courbe représentative d'une fonction *f* connue, un point A sur cette courbe, de coordonnées (*x*, *f* (*x*)) , et on suppose *f* dérivable en *x*.

Si *f* n'est pas une fonction affine, le taux d'accroissement entre A et un autre point n'est pas constant.

Mais il se peut que le taux d'accroissement entre A et un autre point **s'approche** d'une **valeur** limite fixe **lorsque** cet autre point s'approche infiniment près de A. Dans ce cas cette valeur limite est appelée le **nombre dérivé de *f* en *x*** : $f'(x)$.

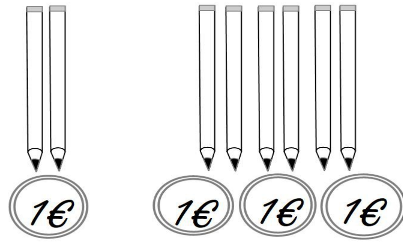


Taux d'accroissement = $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Sur la courbe, il est variable, sur la droite tangente il est constant.

Si le taux d'accroissement devenait brusquement constant à partir de A, il adopterait cette valeur $f'(x)$, et à partir de A la courbe se confondrait avec la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(x)$: **la tangente en A à la courbe** représentative de f.

La tangente en un point indique la **tendance locale en ce point** .
Un objet physique amené en ce point par un ensemble de forces adéquates, et qui subitement ne serait plus soumis à aucune force, continuerait son mouvement sur cette droite. Voir https://tinyurl.com/rectiligne . Le mouvement rectiligne uniforme est le mouvement qu'adopte naturellement un corps soumis à aucune force. On imagine par analogie que si une variable économique *y* prend ses valeurs en fonction d'une autre variable économique *x*, et que si brusquement toutes les autres contraintes cessaient d'agir sur ces deux variables, les variations de l'une deviendraient proportionnelles aux variations de l'autre, et *y* poursuivrait son chemin en suivant une fonction affine d'x.

Ainsi si y est le coût de fabrication de x crayons, et qu'on en fabrique quelques milliers par jour, on peut penser qu'augmenter la production de 6 crayons ne provoquera pas de renégociation des prix des matières premières, ni d'investissement dans des machines, des locaux ou du personnel supplémentaires, et que cela coûtera 3 fois plus qu'augmenter la production de 2 crayons :



Crayons supplémentaires

localement, c'est-à-dire tant qu'on reste proche de la production actuelle, **la variation du coût *y*** a tendance à évoluer **proportionnellement** à la **variation de la production *x*,** c'est-à-dire qu'***y* a tendance à suivre une fonction à peu près affine d'*x*.**

Pour **trouver l'équation de la tangente à une courbe en un point,** on applique à nouveau la propriété 2, entre ce point et un point général de la tangente. Le taux d'accroissement est la dérivée au point considéré.

Exemple 11. Cherchons l'équation de la tangente T au point A (3, 9) à la courbe d'équation $y = x^2$.

1. Le nombre dérivé en 3 de la fonction qui à tout x associe x^2 est $2 \times 3 = 6$, c'est le coefficient directeur de T.
2. Pour tout point M du plan , de coordonnées (x, y) :

   M appartient à (T) si et seulement si $\underbrace{\dfrac{y-9}{x-3}}_{taux\,d\,'\,accroisement\ entre\,(3{,}9)\,et\,un\,autre\,point\,de\,la\,tangente} = \underbrace{6}_{dérivée\,en\,3}$, d'où

   M appartient à (T) si et seulement si $y-9=6(x-3)$, d'où

   M appartient à (T) si et seulement si $\boldsymbol{y=6x-9}$.

Il reste possible, quoique déconseillé, d'utiliser la formule apprise - par cœur, donc sans comprendre sa justification, c'est pourquoi elle est déconseillée ici – au lycée :

M (x,y) appartient à (T) si et seulement si

$$y = f(x_0) + (x-x_0)f(x_0) = f(3) + (x-3)f'(3)=9+(x-3)f'(3) = 9+(x-3)\times 6 = 6x-9$$

en notant f la fonction qui à tout nombre x associe $f(x) = x^2$, $x_0 = 3$, $f'(3) =$ $2\times 3=6$

4.2.3 Tendance globale, sur l'ensemble des points. Droite de régression linéaire ou droite des moindres carrés.

On considère n données représentées par des points d'un plan, de coordonnées (x_1 , y_1) , (x_2 , y_2) , … (x_n, y_n) . En général ces points ne sont pas alignés, et faute de pouvoir les joindre par une droite, on cherche **la droite qui les résume au mieux** dans leur ensemble. La quasi totalité des économistes, à la suite des scientifiques, ont adopté la droite de régression linéaire, ou droite des moindres carrés. C'est en cours de statistiques qu'on aborde en détails la justification des formules qui vont suivre, et des critères pour juger de l'adéquation de cette droite aux données.. Mais la tendance linéaire a tant d'importance en économie et gestion qu'on vous la présente dès maintenant.

La droite de régression linéaire (D) a pour équation :

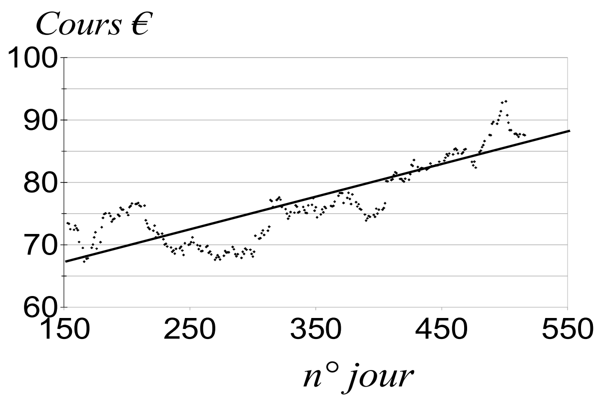
M (x, y) appartient à (D) si et seulement si $y = a\,x + b$,

avec : $a=\dfrac{\overline{x\,y}-(\overline{x})(\overline{y})}{\overline{x^2}-(\overline{x})^2}$, et $b=\overline{y}-a\,\overline{x}$,

la notation $\overline{x}$ signifiant la moyenne arithmétique des x $\overline{x}=\dfrac{x_1+x_2+...+x_n}{n}$

Exemple 12. Voici les cours de clôture de l'action SANOFI sur le marché Euronext, en Euros, relevés tous les jours du 1er Juin 2016 au 31 mai 2017,

soit 256 jours, numérotés de 1 à 364 – il y a des jours sans cotations –



Exercice 1

a) D'après le graphique, quelle est l'équation de cette droite ? Quelle est , en moyenne, la variation du cours par jour ?

b) Voici un extrait du tableau des données

date	01/06/16	02/06/16	03/06/16	06/06/16	…	31/05/17	
n°jour	1	2	3	6	…	364	46 215
Cours (€)	73,47	73,38	72,49	72,40	…	87,56	19 564,60
$(\text{n°jour})^2$	1	4	9	36	…	132496	11 151 663
Cours × n°jour	73,47	146,76	217,2	434,4	…	31871,84	3 671 216,59
							Somme

Que sont ici $\bar{x}, \bar{y}, \overline{x^2}, \overline{xy}$? Calculer les coefficients a et b par les formules et comparer avec a) .

Vous avez réalisé votre 1ère régression linéaire !

4.2.4 Reconnaître des droites parallèles ou des droites perpendiculaires par leur équation

Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs coefficients directeurs sont égaux.

Deux droites sont perpendiculaires si et seulement si le produit de leurs coefficients directeurs est -1.

Exercice 2 Trouver l'équation de la droite parallèle à la droite (T) de l'exemple 11 , passant par le point de coordonnées (5, 2)

Exercice 3 Trouver l'équation de la droite perpendiculaire à la droite (T), passant par le point de coordonnées (5, 2)

4.3 Trinômes du second degré

Une fonction trinôme du second degré est définie ainsi :

$$\mathbf{f : x \in \mathbb{R} \mapsto ax^2 + bx + c} \quad \text{où a, b, c sont des nombres fixés et } a \neq 0.$$

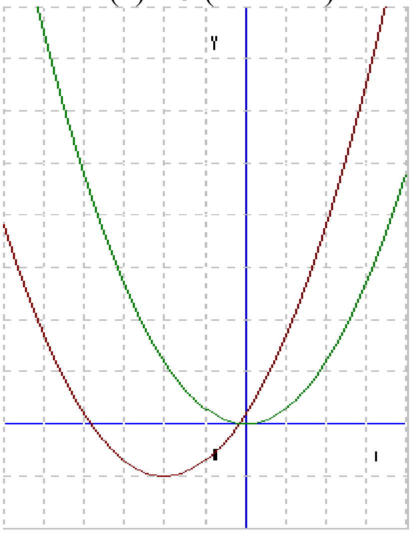
La courbe représentative de f , d'équation y = f(x) , est une **parabole :** il existe toujours deux constantes x_0 et y_0, telles qu'en posant $X = x - x_0$ et $Y = Y - y_0$ – ce qui se traduit sur le graphique par une translation des axes – on ait y = f(x) si et seulement si $\mathbf{Y = a\,X^2}$.
Voici la preuve :

pour tout x de $\mathbb{R}$, $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=ax^2+\frac{ab^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a}+\frac{4ac}{4a}=ax^2+bx+c=y$,

donc $y+\frac{b^2-4ac}{4a}=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$. Il suffit de prendre $y_0=-(b^2-4ac)/4a$ et $x_0=-\frac{b}{2a}$

Exemple 13 f : x ∈ IR ↦ **$3x^2 + 12x + 2$**

$f(x) = 3 (x^2 + 4x) + 2 = 3 [(x + 2)^2 - 4] + 2 = 3 (x+2)^2 - 10$



La représentation graphique de f, C(f) a pour équation $y = 3x^2 + 12x + 2$, c'est-à-dire : $y + 10 = 3 (x +2)^2$.

C(f) est donc une ***parabole*** qui se déduit de la parabole d'équation $y = 3X^2$ par la translation de vecteur $\vec{u}:(-2,-10)$

Elle a pour sommet S (-2;-10) et pour axe de symétrie la droite D d'équation x = -1.

Comment trouver l'allure de la courbe.

1) On détermine l'axe de symétrie x = α, en résolvant l'équation f ' (x) = 0 (α en est l'unique solution).
2) Le sommet de la parabole est le point de coordonnées (α, f(α))
3) Si a > 0, la parabole est tournée vers les y > 0 et l'extremum est un minimum
   Si a < 0, la parabole est tournée vers les y < 0 et l'extremum est un maximum

Reprenons l'exemple 13 :

1. l'équation 0 = f ' (x) = 6x + 12 a pour seule solution x = - 12/6 = - 2, et f(-2) = - 10
2. 3 > 0 ,

donc la courbe représentative de *f* est une parabole de sommet (-2, -10), d'axe parallèle à (Oy) et de branches dirigées vers le haut.

4.4 Fonctions homographiques

Les fonctions homographiques sont de la forme : f : x ∈ IR \ {- $\frac{d}{c}$ } ↦ $\frac{ax+b}{cx+d}$ où *a,b,c,d* sont des nombres fixes, avec *ad* - *bc* ≠ 0 et *c* ≠ 0 – si ad-bc= 0 f est constante et si c = 0, d ≠ 0, f est une fonction affine – .

Leurs représentations graphiques sont toujours des hyperboles.

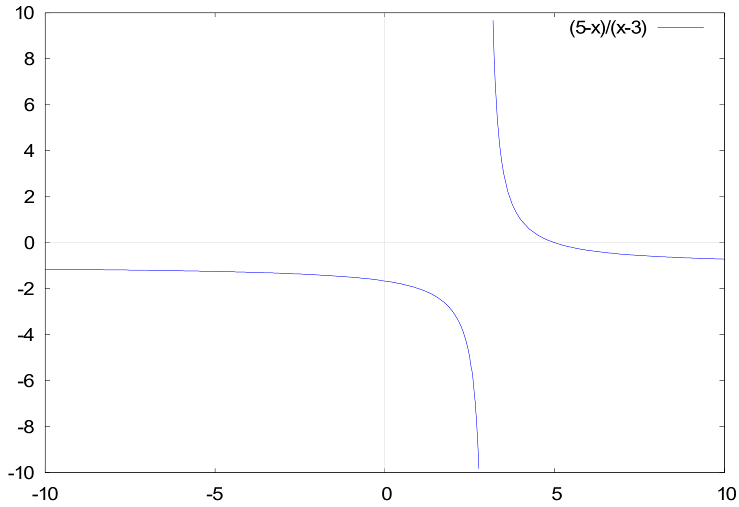
Exemple 14 :

(pour tout $x \neq 3$) $f(x) = \dfrac{-x+5}{x-3}$

f(x) $= \dfrac{(-x+3)+2}{x-3} = \dfrac{-(x-3)+2}{x-3}$

$= -1 + \dfrac{2}{x-3}$

d'où
(x,y) appartient à la courbe si et seulement si : $y + 1 = \dfrac{2}{x-3}$



En notant Y = y+1 et X = x-3 , on s'aperçoit que la courbe **<u>C(f)</u>** est une **<u>hyperbole</u>** qui se déduit de l'hyperbole d'équation y = $\dfrac{2}{x}$, x ≠ 0, par la translation de vecteur $\vec{u}$ (3;-1)

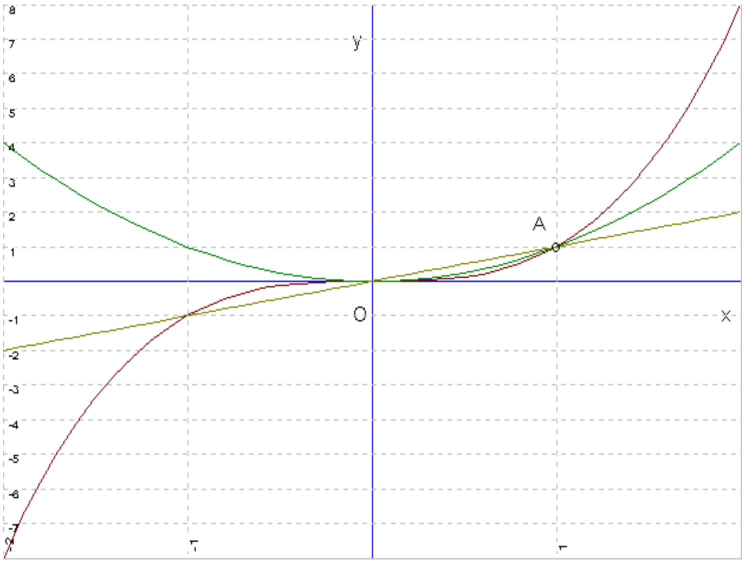
Dans ce cours, on ne vous demandera pas de faire cette transformation. En revanche la méthode suivante vous concerne ;

En pratique On obtient rapidement le graphe d'une fonction homographique
f : x ∈ IR \ {- $\dfrac{d}{c}$ } ↦ $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ ainsi :

1. Il y a toujours 1 asymptote parallèle à l'axe (0y) , on l'obtient en cherchant **pour quelle valeur le dénominateur s'annule** – la fraction tend alors vers + ∞ ou - ∞ – . Elle a pôur équation $x = -d/c$.
   Dans l'exemple $x-3$ s'annule pour x = 3.
   L'asymptote verticale a donc pour équation x = - 3 .
2. Il y a toujours une asymptote parallèle à l'axe (0x). On obtient son ordonnée en observant vers quelle valeur tend la fraction lorsque x tend vers + ∞ ou - ∞. Dans l'exemple $\dfrac{-x+5}{x-3}$ a la même limite en + ∞ que $\dfrac{-x}{x} = -1$, donc –1. L'asymptote horizontale a pour équation y = -1.
3. La courbe admet un centre de symétrie à l'intersection des 2 asymptotes. Donc dans l'exemple au point de coordonnées (-3 ; -1).
4. les 2 asymptotes partagent le plan en 4 quadrants. On calcule la position d'1 point du graphe pour déterminer 1 des deux quadrants occupés par la courbe ;
5. On complète le graphe par symétrie par rapport au centre de symétrie.

4.5 Fonctions puissances entières

- Les fonctions puissances entières **positives** sont les fonctions x ∈ IR ↦ x^n , où n est un entier **strictement positif**. Ce sont des fonctions paires pour les valeurs paires de n et impaires pour les valeurs impaires de n. Elles sont strictement croissantes sur IR $^+$. Leur représentation graphique est bien connue:



On remarquera que les points O(0,0) et A(1,1) appartiennent à toutes les courbes et que

si $0<x<1$: $0<...<x^3 < x^2 < x < 1$
si $x>1$: $1< x< x^2< x^3< ...$

- Les fonctions puissances entières **négatives** sont définies ainsi :
  (pour tout n entier strictement positif) (pour tout x de IR*) $x^{-n}=\dfrac{1}{x^n}$. Par exemple
  $2^{-3}=\dfrac{1}{2^3}=\dfrac{1}{8}=0{,}125$

Rappels :

- (pour tout x de IR et pour tous entiers n,m positifs)
  $x^{n+m} = x^n x^m$; $(xy)^n = x^n y^n$; $(x^n)^m = x^{nm}$.
- Pour tout x de IR , **différent de 0,** on définit $x^0 = 1$ et les règles précédentes sont valables pour tous entiers m,n qu'ils soient positifs ou négatifs. .

Attention à ne pas confondre $x^{-n}=\dfrac{1}{x^n}$ avec $x^{1/n}=\sqrt[n]{x}$ définie au paragraphe suivant.

Exemple 15 : simplifier $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{-4}$

4.6 Fonctions racines n ièmes, puissances rationnelles

Pour tout entier n positif et tout nombre ***x* positif** , il y a une, et une seule solution dans [0 , + ∞[à l'équation $y^n=x$

Cette unique solution est notée $\sqrt[n]{x}$ et la fonction qui à tout x de IR^{+*} associe $\sqrt[n]{x}$ est appelée fonction racine n ième.

Ainsi pour tous x,y réels **positifs**, $y=\sqrt[n]{x}$ si et seulement si $y^n = x$.

Par exemple $2=\sqrt[3]{8}$ car 2 est la seule solution positive de l'équation d'inconnue x : $x^3 = 8$.

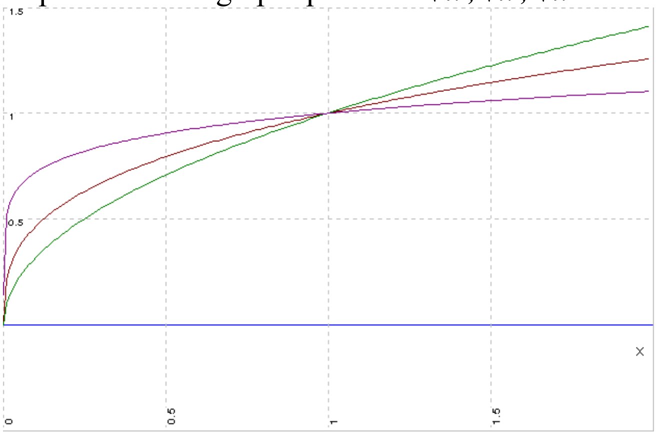
Exemples 16 : simplifier $\sqrt{9}$, $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[4]{16}$, $\sqrt[3]{729}$ – remarque $729 = 27^2$ – ,

La représentation graphique de $x \in IR^+ \mapsto \sqrt[n]{x}$ s'obtient en repère orthonormé à partir de celle de la fonction $x \in IR^+ \mapsto x^n$ par une symétrie par rapport à la première bissectrice.A

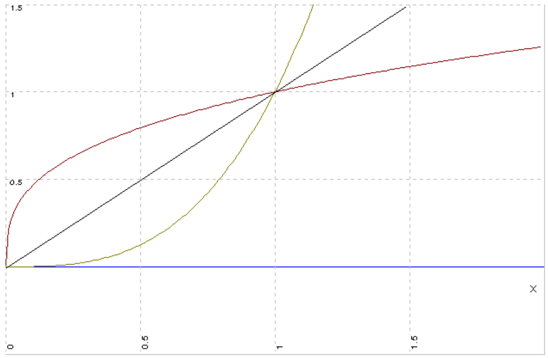
Remarque : pour n impair , il existe pour tout x, même négatif, un nombre y solution de $y^n = x$. Ainsi $(-2)^3 = -8$.

Certains utilisateurs des mathématiques notent $\sqrt[3]{-8}=-2$ et vous pouvez trouver cette notation sur des calculettes. Mais pour la cohérence avec les avec les exposants réels, qui permettront d'écrire $\sqrt[n]{x}=e^{\frac{1}{n}\ln(x)}$, les mathématiciens considèrent que , comme pour les exposants pairs, $\sqrt[3]{\;}$ n'est pas définie sur les nombres négatifs et ils écrivent que $-2=-\sqrt[3]{8}=-\sqrt[3]{|-8|}$

Représentations graphiques de $\sqrt{x}, \sqrt[3]{x}, \sqrt[7]{x}$



Représentations graphiques de $\sqrt[3]{x}, x^3$



Positions relatives sur IR $^+$:

si $0 < x < 1$: $0 < \ldots x^3 < x^2 < x < \sqrt{x} < \sqrt[3]{x} < \sqrt[n]{x} < \ldots < 1$ (pour n entier > 3)

si $x > 1$: $1 < \ldots < \sqrt[n]{x} < \sqrt[3]{x} < \sqrt{x} < x < x^2 < x^3 < \ldots$

Exemples 17 *:* ordonner $(1/2)^{12}$, 1/2, $\sqrt[8]{8}$, $\sqrt[5]{1/2}$, $\sqrt[3]{8}$, 8.

Exposants fractionnaires :

si r est un nombre rationnel, $r = \frac{p}{n}$; avec n,p entiers relatifs et $n \neq 0$

Propriété **3** on montre que (à faire en exercice) $\sqrt[n]{x^p} = (\sqrt[n]{x})^p$ pour tout entier strictement et tout entier p, et tout nombre strictement positif x .

Cette quantité est notée $x^{p/n}$

Définition 1

On définit pour tout x de IR $^{+*}$ et tout entier n strictement positif $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$

et pour tout nombre rationnel r = p/n, avec p nombre entier et n nombre entier strictement $x^{p/n}$ par

$$x^{p/n} = \sqrt[n]{x^p} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^p$$

Propriété **4** On obtient les mêmes règles de calcul que pour les exposants entiers :

$$x^{\frac{p_1}{n_1}} \times x^{\frac{p_2}{n_2}} = x^{\frac{p_1}{n_1} + \frac{p_2}{n_2}} \quad , \quad \left(x^{\frac{p_1}{n_1}}\right)^{\frac{p_2}{n_2}} = x^{\frac{p_1}{n_1} \times \frac{p_2}{n_2}}$$

et c'est pourquoi **il est fortement conseillé d'utiliser la notation** $x^{\frac{p}{n}}$ **lieu de** $(\sqrt[n]{x})^p$ et en particulier $x^{\frac{1}{n}}$ au lieu de $\sqrt[n]{x}$

Exemple 18 : simplifier $\sqrt[4]{\sqrt[3]{25^6}}$

Exemple 19 : calculer $16^{3/4}$; $27^{-2/3}$ et $9^{2/24}$.

Exemple 20 un capital K placé au taux d'intérêt composé annuel i acquiert au bout de n années la valeur

$K(1+i)^n$. Votre entreprise a la possibilité d'investir 1 000 € dans un projet, avec la garantie d'obtenir 1 217 € dans 5 ans. A quel taux d'intérêt annuel composé correspond cette opération ? Si elle doit emprunter pour financer cette opération, à quels taux peut-elle emprunter pour que ce projet soir rentable ?

Exemple 21 , exercice résolu. Taux moyen. Le PIB de la Lettonie était de 16,91 Milliards de $US en 2005 et de 27,09 Milliards de $US en 2015. Source : tradingeconomics.com, banque mondiale.

a. Quel est le taux de variation – c'est-à-dire la variation en pourcentage – entre ces deux dates ?
b. Quel a été le **taux de variation annuel moyen**, c'est-à-dire quelle variation annuelle constante en pourcentage, aurait engendré la même variation sur ces 6 ans ?

Résolution :

a. de 2000 à 2006 le PIB a été multiplié par un facteur $\frac{PIB_{2015}}{PIB_{2005}}=\frac{27{,}09}{16{,}91}\approx 1{,}602$ à 0,001 près, le taux de variation a été de $\frac{PIB_{2015}-PIB_{2005}}{PIB_{2005}}=\frac{27{,}60-16{,}91}{16{,}91}\approx 0{,}602$ et en pourcentage de 60,2 % à 0,1 % près.

b. si y désigne cette variation annuelle en % , alors chaque année le PIB augmente de y%, et est donc multiplié par 1+ y/100. De 2005 à 2015 le PIB serait donc multiplié par $(1+y/100)^{10}$.

y est donc solution de l'équation $\left(1+\frac{y}{100}\right)^{10}=1{,}602 \quad (E)$. D'où $(E)\Leftrightarrow 1+\frac{y}{100}=\sqrt[10]{1{,}602}$, d'où $(E)\Leftrightarrow y=(\sqrt[10]{1{,}602}-1)\times 100\approx 4{,}8\,\%$. Remarquez bien que 60,2/10 = 6,02 % ne répondait pas au problème.

4.7 Fonctions polynômes d'une variable réelle

Après les fonctions affines, les fonctions les plus simples sont les fonctions polynômes.

4.7.1 Définition

Une fonction polynôme P de degré n est une fonction définie de IR dans IR par:

$x \in IR \mapsto P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ avec $a_n, a_{n-1}, \ldots , a_0$ nombres réels, appelés les coefficients du polynôme, et $a_n \neq 0$.

Exemples 22

a) Un polynôme de degré 0 est constant : $x \in IR \mapsto P(x) = a_0$
b) $-4x^3 +x - 1$ est un polynôme de degré 3 (d°P = 3) ordonné suivant les ***puissances décroissantes***, le coefficient de x est 1.
c) $1 + 2x - 3x^2 + x^5$ est un polynôme de degré 5 ordonné suivant les ***puissances croissantes***.

On définit aussi le polynôme nul, $x \in IR \mapsto 0$. Il n'a pas de degré.

4.7.2 Opérations

On peut faire des ***sommes*** et des ***produits*** de polynômes comme on fait des sommes et des produits de fonctions.

Propriété 5: si d°P = n et d°Q = k , alors **d°(P+Q) ≤ max(n,k)**

Exemples 23

a) soient $P(x) = x^3 - 5x +2$, $Q(x) = -8x^2 -3x +1$ et $R(x) = -x^3 + x^2 -1$. Comparer les degrés de P,Q,R, P+Q, P+R.
b) trouver un polynôme P_1 tel que $d°(P+P_1) = 0$.

Propriété 6 si d°P = n et d°Q = k, alors **d°(PQ) = k+n**, et le terme de plus haut (respectivement plus bas) degré dans PQ est le produit des termes de plus haut (respectivement plus bas) degré dans P et Q.

Exemple 24 si on reprend les polynômes de l'exemple précédent, le coefficient de x^5 dans PQ est -8 et le terme constant (coefficient du terme de degré 0) est 2. Faire le produit PQ en écrivant le résultat sans intermédiaire. On remarquera que le terme en x^4 provient de la somme du produit du terme en x^3 dans P et du terme en x dans Q et du produit des termes de degré 2 dans P et Q , etc. ...

4.7.3 Factorisation et racines

Définition 2 On appelle ***zéro*** ou ***racine*** d'un polynôme P, tout nombre x solution de $P(x) = 0$.

Propriété 7 un polynôme de degré n a ***au plus n racines***.

Cas d'un polynôme du second degré :
soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.
S'il a 2 racines x_1 et x_2 (éventuellement $x_1 = x_2$ dans le cas d'une racine double),
alors $P(x) = a(x-x_1)(x - x_2)$;
Pour calculer x_1 et x_2 ,

*On regarde d'abord s'il n'y a pas une **racine évidente** (-1 , O, 1, 2 , ou une valeur suggérée par le contexte). Dans ce cas on peut retrouver l'autre racine en développant $a(x – x_1) (x – x_2)$.

*Sinon on utilise le ***discriminant*** $\mathbf{\Delta = b^2 - 4ac}$

- Si $\Delta \geq 0$, on calcule les racines, éventuellement égales dans le cas où $\Delta = 0$, x_1 et x_2, par les formules habituelles :
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$
- Si $\Delta < 0$, il n'y a pas de racine réelle : le polynôme ne s'annule pour aucun nombre réel et il garde un signe constant.
Dans ce cas il existe deux racines dans l'ensemble des nombres complexes, que nous n'utiliserons pas cette année, mais qui montrera sont utilité en 2nde année.

Cas général :

Propriété 8 : si ***x_0 est une racine*** du polynôme P, alors P est divisible par $(x-x_0)$ C'est-à-dire, il existe un polynôme Q de degré d°P - 1, tel que ***$P(x) = (x - x_0)\, Q(x)$***.

Ainsi pour factoriser un polynôme, on commencera par en déterminer une racine. Pour cela on essaiera toujours les racines évidentes comme 0, 1, -1, éventuellement 2 ou -2, voire d'autres valeurs suggérées par le contexte. S'il n'y a pas de racine évidente, on pourra étudier la fonction
$x \in IR \mapsto P(x)$ et utiliser le tableau de variation et la continuité de P pour déterminer un zéro simple de P.

Ensuite on détermine le polynôme Q. Il y a plusieurs méthodes. On peut utiliser par exemple la méthode des coefficients indéterminés qui n'est pas la plus rapide mais la plus facile à retenir. On pose comme d°P – 1 inconnues les coefficients de Q, on effectue le produit PQ et on résout.
Voici un exemple.

Exemple 25 :
Soit $P(x) = 2x^3 + 5x^2 - 22x + 15$. On cherche des racines évidentes et on remarque $P(1) = 0$.

D'après le théorème fondamental et la propriété 2, on peut donc écrire $P(x) = (x-1)Q(x)$, $Q(x)$ étant un polynôme de degré 2 à déterminer: $Q(x) = ax^2 + bx + c$.
$2x^3 + 5x^2 – 22x + 15 = (x – 1) (ax^2 + bx + c) = a x^3 + (- a + b) x^2 + (c-b) x - c$
Les coefficients de plus haut et de plus bas degrés de Q sont toujours les plus simples à trouver : a = 2 (car $2x^3 = a x^3$) et -c = 15 (coefficient de degré 0).
Les autres s'en déduisent de proche en proche :
$(-a + b) = 5$ (coefficient de x^2) , d'où $b = 5 + a = 7$.
d'où $P(x) = (x-1)(2x^2 + 7x - 15)$.
Ensuite on peut factoriser $(2x^2 + 7x - 15)$. C'est un polynôme du second degré. On peut calculer ses racines 3/2 et -5.

On obtient : $2x^2 + 7x – 15 = (2x – 3)(x+5)$, d'où (pour tout x de IR) $P(x) = (x+1)(2x - 3)(x+5)$

Exercice 4*:* factoriser $P(x) = 3x^4 - 5x^3 -5x^2+ 5x + 2$

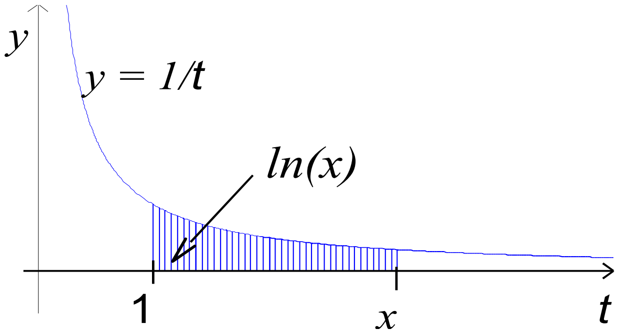
4.8 Fonction logarithme néperien

Définition 3:

La fonction logarithme Népérien est la fonction définie sur]0, + ∞[par :

$x \in]0, +\infty[\mapsto \ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$.,

aire entre l'axe des abscisse, la courbe d'équation *y =1/t* , la droite d'équation *t* = 1 et celle d'équation *t* = x.



ln(x) est l'aire hachurée, affectée d'un signe – si $x < 1$.

Ou encore

ln est **la seule fonction *f*** définie et dérivable sur]0, + ∞[satisfaisant à la fois aux deux égalités :

$$\begin{cases} (a) & (\text{pour tout } x \text{ de }]0,+\infty[) \quad f'(x)=1/x \\ (b) & f(1)=0 \end{cases}$$

le chapitre d'intégration de Terminale indique qu'il y a une, seule fonction solution de ces deux égalités. Il y a une infinité de fonctions solutions de l'égalité (a) seulement. Elles sont appelées primitives de la fonction 1/x sur]0, + ∞[et elles se déduisent toutes l'une de l'autre en ajoutant une constante.

***Propriétés* 9** issues directement de la définition

a. **ln est définie, continue et dérivable sur]0, + ∞[**
b. ln 1 = 0
c. ln(x) < 0 pour 0 < x < 1 , ln(x) > 0 pour x > 1
d. **pour tout x de]0, + ∞[, ln' (x) = 1 /x**
e. Si une fonction f définie et dérivable sur]0, + ∞[, vérifie f' (x) = 1/x pour tout x de]0, + ∞[, alors f(x) = ln x + constante pour tout x de]0, + ∞[.

***Propriétés* 10**

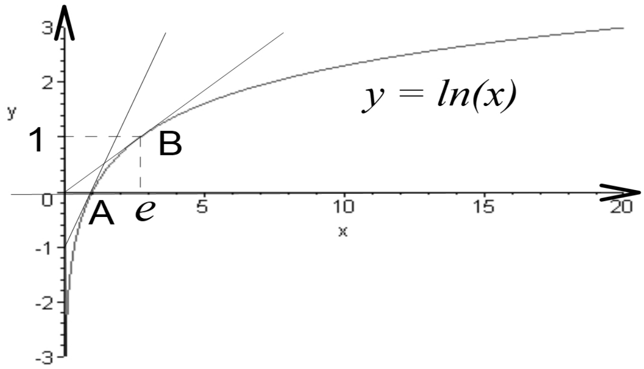
f. **Pour tous a et b de]0, + ∞[, ln(ab) = lna + ln b**
g. Pour tout a de]0, + ∞[, ln (1/a) = - lna
h. Pour tous a et b de]0, + ∞[, ln(a / b) = lna - ln b
i. Pour tout a de]0, + ∞[et tous entiers p, q avec q non nul, $\ln(a^{p/q}) = \frac{p}{q} \ln a$
j. Plus généralement, pour tout a de]0, + ∞[et tout r de IR $\ln(a^r) = r \ln a$
a^r pour r nombre de IR sera défini au paragraphe suivant 4.9 Fonction exponentielle

***Propriété* 11** variations

k. **ln est strictement croissante sur]0, + ∞[,** $\lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$, $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

Tableau de variations et graphe de la fonction ln
Les propriétés (j) et (k) permettent de dresser le tableau de variations

x	0	1	e	+ ∞
ln'(x)= 1/x	||	+ + +		
ln(x)	||	- ∞ ↗ 0 ↗ 1 ↗		+ ∞



Remarque : évaluer à l'aide d'une calculette ln(100), ln (1000 000) , ln (100 000 000 000) . Quel commentaire peut-on en tirer sur les limites indiquées dans ce tableau ?

***Propriétés* 12** lien avec l'exponentielle

l. Il existe un, seul, nombre réel positif dont le logarithme Népérien est 1. Ce nombre est appelé base des logarithmes Népériens et est noté e. ln(e) = 1. e ≈ 2,72 , arrondi à 0,01 près.

m.**pour tout x de] 0, + ∞ [, $x = e^{\ln x}$**

n. pour tous x,y de] 0, + ∞ [, x = y ⇔ ln x = ln y

Les propriétés (a), (b), (c) viennent directement de la définition, pour (d) voir le chapitre sur les primitives.
Démonstration de (e):

Fixons a dans]0, + ∞[et considérons la fonction g : x ∈]0, + ∞[↦ ln(ax)
D'après le théorème sur la dérivation des fonctions composées; g est dérivable sur]0, + ∞[, de dérivée :

x ∈]0, +∞[↦ g ' (x) = a ln ' (ax) = a / ax = 1/x

Donc, d'après la propriété 4 , il existe une constante C telle que pour tout x de]0, + ∞[,
g(x) = C + ln x. En particulier, pour x = 1; g(1) = C . Or g(1) = ln(a ·1) = ln a . Donc C = ln a.

La propriété (f) découle de (e) en remarquant que 0 = ln 1 = ln(a/a) = ln a + ln (1/a)
On obtient alors la propriété (g) en écrivant $\ln(a/b)=\ln(a\times\frac{1}{b})=\ln(a)+\ln(\frac{1}{b})$
On obtient (h) en écrivant , d'après (e), $\ln(a^p) = p\ln(a)$, puis $\ln(a) = \ln((a^{1/q})^q) = q\ln(a^{1/q})$,
d'où $\ln(a^{1/q}) = (\ln a)/q$, d'où $\ln(a^{p/q}) = \ln((a^{1/q})^p) = p\ln a^{1/q} = \frac{p}{q}\ln(a)$.
(i) vient de la définition de a^r pour r nombre réel non rationnel — voir le paragraphe sur l'exponentielle — et est compatible avec (h) dans le cas où r est un nombre rationnel p/q
(j) : en remarquant que pour tout $x > 0$, ln ' (x) = 1/x > 0 on obtient que ln est strictement positive, en utilisant $\ln(a^n) = n\ln(a)$ pour un nombre a plus grand que 1, donc ln(a) > 0, on obtient que $\lim_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ et en utilisant la même égalité pour un nombre a plus petit que 1, donc ln(a) < 0, on obtient $\lim_{x\to 0}\ln(x)=-\infty$
(k) découle de l'étude des variations de ln , en (j), et du fait que ln est dérivable, donc continue, sur tout]0, +∞[.
pour la propriété (l), voir le paragraphe suivant: fonction exp.
La propriété (m) vient du fait que la fonction ln est strictement croissante.

Une propriété couramment utilisée en économie :

C'est elle qui fait que le logarithme intervient naturellement en économie et gestion.
Commençons par un exemple. Supposons qu'on mesure une variable économique 2 années consécutives sur différentes observations. La mesure de la première année est notée x, celle de la seconde année x'. Les valeurs sont arrondies à 0,001 près.

x	36	3000	896	600	402	8000	19600	304
x'	37,800	3150	940,800	618	414,06	8240	19208	297,92
x' - x	**1,800**	**150**	**44,800**	**18**	**12,06**	**240**	**- 392**	**- 6,08**
lnx	3,584	8,006	6,798	6,397	5,996	8,987	9,883	5,71726
lnx'	3,632	8,055	6,847	6,426	6,026	9,017	9,863	5,697
lnx' - ln x	**0,049**	**0,049**	**0,049**	**0,030**	**0,030**	**0,030**	**- 0,020**	**- 0,020**
x'/x	**1,05**	**1,05**	**1,05**	**1,03**	**1,03**	**1,03**	**0,98**	**0,98**

Observe-t-on un point commun sur la variation des valeurs x' – x ? et sur la variation des logarithmes lnx' – lnx ? Que penser de la dernière ligne ?
D'après la dernière ligne, comment qualifierait-on les variations de x à x' en langage courant ?

Voilà l'énoncé mathématique de la propriété qui cause le phénomène que vous venez de remarquer
Enoncé mathématique de la propriété :
***Propriété* 13** $\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$ *(cf. Chapitre 2). Dans ce cours cette propriété sera admise.*
Posée ainsi, son lien avec l'économie ne saute pas aux yeux, mais voilà comment elle se manifeste dans les disciplines qui vous concernent :

Interprétation pratique :

lorsqu'une valeur

$$\left.\begin{array}{ll} & \textit{est multipliée par un facteur}\,(1+t) \\ \textit{ou} & \textit{varie avec un taux de variation}\ t \\ \textit{ou encore} & \textit{varie d'un pourcentage}\ 100t\ \% \end{array}\right\}\ \text{Ces 3 expressions sont synonymes}$$

son logarithme varie approximativement de t. L'approximation est de plus en plus fine à mesure que t s'approche de 0.

Exercice 5. Traduire par une égalité entre x et x' le fait la variation de x à x' soit de t%. En déduire une égalité sur ln(x'/x) , puis sur ln x' – ln x . En déduire le lien entre l'interprétation pratique et la propriété 13.

Exemple 27 Un économiste s'intéresse au chiffre d'affaires de restaurants de la côte normande. La première semaine de Mai il pleut. La seconde semaine est plus ensoleillée. Les chiffres d'affaires (C.A.) hebdomadaires des restaurants étudiés vont de 1 200 à 13 000 euros. Justifier que pour comparer les évolutions d'une semaine à l'autre des divers restaurant, il est plus judicieux d'étudier le logarithme du Chiffre d'Affaires que le C.A. lui-même.
Exercice 6. Sachant que ln(2) ≈ 0,69 et ln(3) ≈1,10 à +/- 0,01 près, en déduire sans calculette des valeurs approchées de ln(6) , ln(2/3) , ln(1/2), $\ln(2^{10})$
Exercice 7.Un capital K est investi n années à un taux d'intérêt annuel composé de 3%. Au bout de n années il aura acquis la valeur $K(1 + 3/100)^n$
A partir de combien d'années aura-t-il doublé ?

4.9 Fonction exponentielle

La fonction logarithme étant continue et strictement croissante de]0, +∞[sur IR, est une bijection de]0,+∞[sur IR. Elle admet donc une fonction réciproque, définie de IR sur]0, +∞[, elle aussi continue et strictement croissante.

Définition 4 : **La fonction réciproque de ln** est appelée **fonction exponentielle** et notée **exp.**

C'est-à-dire que pour tout a de IR et tout b de]0, + ∞[: **b = exp(a)** **si et seulement si** **ln (b) = a**

$$\begin{tikzcd} a=\exp(b) \arrow[r, bend left, "ln"] & b=\ln(a) \arrow[l, bend left, "exp"] \end{tikzcd}$$

On en déduit immédiatement

Propriétés 14 :

a) Pour tout x de IR, $\ln(\exp(x)) = x$

b) Pour tout y > 0, $\exp(\ln y) = y$

D'autre part :

Propriétés 15 :

c) **pour tout x et tout y de IR,** $\mathbf{\exp(x + y) = (\exp x)(\exp y)}$ **et** $\mathbf{\exp(x - y) = \dfrac{\exp x}{\exp y}}$

ce qui s'écrit aussi après la définition 5 : $\mathbf{e^{x+y} = e^x e^y}$ **et** $\mathbf{e^{x-y} = e^x/e^y}$

d) $\exp(1) = e$, unique solution sur IR de $\ln e = 1$, $e \approx 2{,}72$ à +/- 0,01 près.

e) $\exp(0) = 1$, ce qui s'écrit aussi après la définition 5 : $\mathbf{e^0 = 1}$

f) **Pour tous entiers p, q avec** $\mathbf{q \neq 0}$**,** $\mathbf{\exp(p/q) = e^{p/q}}$

Les propriétés a) et b) résultent directement de la définition de la fonction exponentielle.

La propriété c) est vraie car pour tous x et y de IR: $\ln(\exp x \exp y) = \ln(\exp x) + \ln \exp(y) = x + y = \ln(\exp(x+y))$, *d'où* $\exp x \exp y = \exp(x+y)$.

Les propriétés d) et e) viennent des propriétés de ln : $\ln e = 1$ et $\ln 1 = 0$

Preuve de la propriété f : d'après a) $\ln\left(\exp\left(\dfrac{p}{q}\right)\right) = \dfrac{p}{q}$. *Or* $\ln(e^{p/q}) = \dfrac{p}{q} \ln e = \dfrac{p}{q}$ *aussi.*

Donc $\exp\left(\dfrac{p}{q}\right) = e^{p/q}$

Définition 5 puissance réelle d'un nombre strictement positif:
pour tout nombre réel r, on définit e^r par $\mathbf{e^r = \exp(r)}$
et de façon générale **pour tout nombre a > 0** on définit a^r par $\mathbf{a^r = \exp(r \ln a) = e^{r \ln a}}$.

En particulier si $r = p/q$, où p et q sont entiers, cette définition est cohérente avec celle de $a^{p/q}$, *cf.* Définition 1.

De façon générale pour tous a > 0, b >0 , x,y, de IR**,**

$a^{x+y} = a^x a^y$	$a^{x-y} = a^x / a^y$
$(a^x)^y = a^{xy}$	$(ab)^x = a^x b^x$
$a^0 = 1$	$a^x = e^{x \ln a}$

4.9.1 Dérivée de la fonction exponentielle

***Propriété* 16** : pour tout x de IR $\exp'(x) = \exp(x) = e^x$.

Preuve : pour tout y de $]0,+\infty[$ $(\ln)'(y) = \dfrac{1}{y}$. Or exp est la fonction réciproque de ln. Donc pour tout x de IR : $\exp'(x) = \ln^{-1}{}'(x) = \dfrac{1}{\ln'(\ln^{-1} x)} = \dfrac{1}{1/\ln^{-1}(x)} = \dfrac{1}{1/\exp(x)} = \exp(x)$.

***Propriété* 17** : La fonction exponentielle est **la seule fonction *f* définie et dérivable sur** $\mathbb{R}$ solution de :

$$\begin{cases} (a) & (pour\ tout\ x\ de\ \mathbb{R}) \quad f'(x)=f(x) \\ (b) & f(0)=1 \end{cases}$$

Remarque $a^x = e^{x\ln a}$ donc la dérivée de x ∈] 0, + ∞ [α a^x est x ∈] 0, + ∞ [α ln a . $e^{x\ln a} = a^x \ln a$

Exercice résolu 8. Résoudre les équations d'inconnue x et donner des valeurs approchées à 0,01 des solutions
(E1) ln(3x) = 5 (x >0) (E2) $3^x = 0{,}2$ (x ∈ $\mathbb{R}$) (E3) $3^x = 2^x \times 5$ (x ∈ $\mathbb{R}$)

Résolution : (E1) ⇔ 3x = exp(5) , d'où (E1) ⇔ x = $e^5/3 \approx 49{,}47$

(E2) ⇔ $\ln(3^x) = \ln(0{,}2)$, d'où (E2) ⇔ x ln 3 = ln (0,2), d'où (E2) ⇔ $x=\dfrac{\ln(3)}{\ln(0{,}2)}$ ≈ - 0,68

(E3) ⇔ $\ln(3^x) = \ln(2^x \times 5) = \ln(2^x) + \ln(5)$, d'où (E3) ⇔ x ln (3) = x ln(2) + ln(5) , d'où

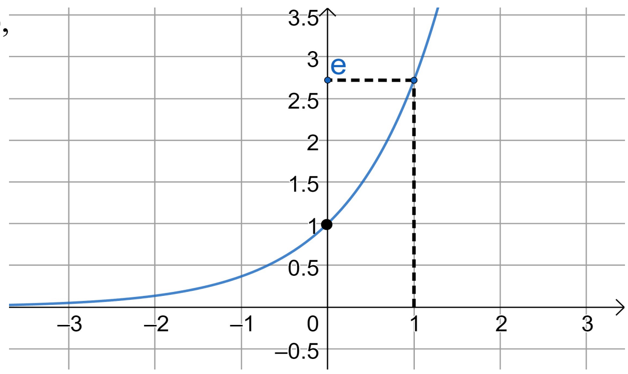
(E3) ⇔ x (ln(3) – ln(2)) = ln(5), d'où (E3) ⇔ $x=\dfrac{\ln(5)}{\ln(3)-\ln(2)}$ ≈ 0,97 à 0,01 près.

4.9.2 Etude de la fonction exp : x ∈ IR ↦ eˣ

Elle est définie sur IR et à valeurs dans IR^{+*} .

$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ *(car exp = ln^{-1} et* $\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$; $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$)

Evaluer à l'aide d'une calculette exp(10), exp(100), exp(200), exp(1000) , exp (-10). Quel commentaire peut-on faire sur ces deux limites ?



x	- ∞		0		1		+∞
exp'		+	1	+	e	+	
exp	0	↗	1	↗	e	↗	+∞

Quelques exemples d'apparition de l'exponentielle

Exemple 28: $e^x = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$

La preuve sera à votre portée avant la fin du semestre :

Preuve : puisque $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{x}{n}=0$ *, il existe une valeur de n au-dessus de laquelle (1 +* $\dfrac{x}{n}$ *) sera toujours strictement positif , et on peut poser pour tout n supérieur à cette valeur :* y = *(1 +* $\dfrac{x}{n}$ *) > 0 .*

Alors ln y = n ln (1+ $\dfrac{x}{n}$ *) .*

Ecrivons que la fonction ln est dérivable en 1, de nombre dérivé 1/1 = 1:

$\lim_{u\to 0} \dfrac{\ln(1+u)-\ln 1}{u} = 1$ *. Donc , en posant pour tout* u *différent de 0,* $\varepsilon(u)=\dfrac{\ln(1+u)-\ln 1}{u}$ *:*

ln (1+u) = ln (1) + u . 1 + u . ε (u) avec $\lim_{u\to 0}$ *(ε (u)) = 0 (c"esr ce qu'on appelle un développement limité au 1er ordre en u au voisinage de 0.Un chapitre sera consacré aux développements limités).*

En posant u = $\dfrac{x}{n}$ *, on obtient : ln (1 +)* $\dfrac{x}{n}$ = $\dfrac{x}{n}+\dfrac{x}{n}\varepsilon\left(\dfrac{x}{n}\right)$ *+ . ε() et* $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon\left(\dfrac{x}{n}\right)=0$.

D'où : ln y = n ln (1+) $\dfrac{x}{n}$ *= n (* $\dfrac{x}{n}+\dfrac{x}{n}\varepsilon\left(\dfrac{x}{n}\right)$ *) = x + x ε(* $\dfrac{x}{n}$ *) et* $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon\left(\dfrac{x}{n}\right)=0$ *, donc* $\lim_{n\to+\infty} \ln(y)=x$

De plus, la fonction exponentielle est continue , donc $\lim_{n\to+\infty} y=e^x$ *d'où le résultat..*

Exemple 29 *Capitalisation continue.*

Un capital K est investi à **taux d'intérêt annuel simple i** pendant **une fraction d'une année** : 1/12 d'année pour un mois, 1/365ème pour un jour, .. Pour une fraction d'année les intérêts sont évalués en capitalisation simple : le capital . Pour **une durée de (1/n) année**, le capital K rapporte un intérêt Ki/n et à la fin de la période il acquiert une valeur de capital + intérêts = K + K i/n = K(1+i/n). Sa valeur a été multipliée par (1+i/n).
Si cette somme est réinvestie, à la fin d'une seconde période elle est aussi multipliée par (1+i/n) et devient $K(1+i/n)^2$. A la fin de p périodes la valeur acquise est $K(1+i/n)^p$. Au bout d'un an, soit p = n périodes, la valeur acquise est $K(1+i/n)^n$. Si on considère une fraction infiniment petite d'une année, le nombre n de périodes dans une année tend vers l'infini, la valeur acquise du capital $K(1+i/n)^n$ tend vers $K\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{i}{n}\right)^n=Ke^i$ et l'intérêt annuel obtenu en comptant ainsi des intérêts composés de façon infiniment précise est $Ke^i - K = K(e^i - 1)$
Le taux d'intérêt composé, évalué avec cette méthode, dite **capitalisation continue**, est donc $\mathbf{e^i - 1}$ pour un an **.**
Pour une période q d'une année, on trouve de la même façon un intérêt de

Intérêt produit par 1 unité monétaire pour une période de q année, 0 < q < 1, en capitalisation continue :
$$\mathbf{e^{qi} - 1.}$$

Cette capitalisation est utilisée pour les échanges entre organismes financiers.
Exercice 9 Un organisme financier propose de l'argent à ses clients sur de très courtes périodes avec un taux d'intérêt annuel simple de 6% . Quel taux d'intérêt annuel continu, rapporte cette opération ?
Exemple 30 *Processus de Poisson.* On considère généralement que si on observe *en moyenne* m clients arrivant dans une file d'attente en une durée T, alors la probabilité qu'il en arrive k dans un intervalle précis de temps T est $\exp^{-m}\times\frac{m^k}{k!}$
Exemple 31 En 2nde année, vous réaliserez des tests statistiques et vous évaluerez la précision de sondages à l'aide d'une primitive de la fonction qui à tout nombre x associe $\exp(-x^2)$

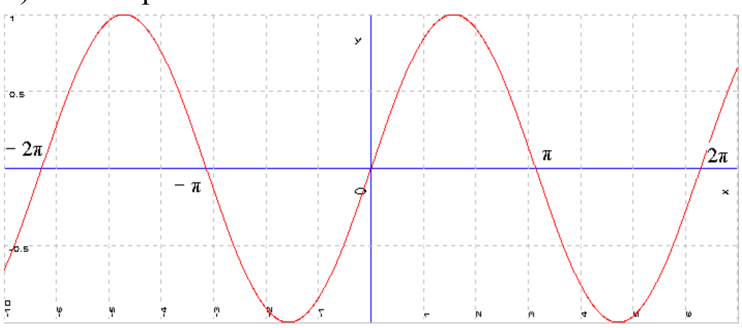
4.10 Fonctions trigonométriques

Sin (et cos) apparaissent dans la modélisation de tous les phénomènes périodiques. Grâe à l'*analyse harmonique* on sait en effet décomposer pratiquement toutes les fonctions périodiques qu'on rencontre en somme de fonctions sinus et cosinus.

4.10.1 sinus : x ∊ IR ↦ sin x

Sinus est définie et dérivable sur IR . Sinus est **impaire** sur IR : sin (-x) = -sin x pour tout x réel.
Sinus est **périodique** de période 2π : sin (x + 2kπ) = sin x pour tout x réel et tout k de Z.. .
Il suffit donc d'étudier S sur [0 ; π] puis d'effectuer une symétrie par rapport à O de sa représentation graphique et des translations de vecteur $2k\pi\ \vec{i}$ ($\vec{i}$ vecteur unitaire suivant (Ox)) .
Pour tout x de IR , sinus'(x) = cos x d'où

x	0		π/2		π
sin'	1	+	0	-	-1
sin	0	↗	1	↘	0



4.10.2 Cosinus : x ∊ IR ↦ cos x

Les variations de cos se déduisent de celles de la fonction sin grâce à cette égalité :
$$\cos x = \sin(x+\pi/2).$$